反対称 M 系列を用いる Deconvolution†

北 島 雲 平*・柏 木 潤**・坂 田 正 登**

A Deconvolution Method by Use of Antisymmetric M-Sequence

Unpei KITAJIMA*, Hiroshi KASHIWAGI** and Masato SAKATA**

This paper presents a method of deconvolution of Wiener-Hopf type integral equation using antisymmetric M-sequence as the test signal to a system to be identified.

Key Words: antisymmetric M-sequence, correlation method, deconvolution, Wiener-Hopf type integral equation

1. ま え が き

相関法を用いるインパルス応答の測定においては、Wiener-Hopf 型の積分方程式をいかにして deconvolute するかという点が重要な問題である。従来、この deconvolution が容易に行えるようないくつかの入力信号が考えられているが^{2), 4), 6)}、本報告は、制御系の入力信号として、反対称 M 系列を用いると容易に deconvolution が行えることを示したものである。

2. 従来の方法

制御系への入力信号を $x(t)$ 、出力信号を $y(t)$ 、制御系のインパルス応答を $g(t)$ とすると、周知のように

$$\phi_{xy}(t) = \int_0^\infty g(\tau) \phi_{xx}(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

が成り立つ。ここに $\phi_{xy}(\cdot)$ は $x(t)$ と $y(t)$ との相互相関関数、 $\phi_{xx}(\cdot)$ は $x(t)$ の自己相関関数を表わす。ここで時間の増分を Δt とし、簡単のため、

$$\phi_{xy}(i) \triangleq \phi_{xy}(i\Delta t), \quad g(i) \triangleq g(i\Delta t)$$

と書いて、(1) 式を離散形で近似すると、

$$\phi_{xy}(j) = \sum_{i=0}^{k-1} g(i) \phi_{xx}(j-i) \cdot \Delta t \quad (2)$$

となる。和の上限 k は、

$$g(j) \approx 0 \quad (\text{for } j \geq k)$$

となるようにとるものとする。

(2) 式を別の表現をすると

$$\Phi_{xy} = A \cdot g \cdot \Delta t \quad (3)$$

ただし

$$\Phi_{xy} = (\phi_{xy}(0), \phi_{xy}(1), \dots, \phi_{xy}(k-1))'$$

$$g = (g(0), g(1), \dots, g(k-1))'$$

$$A = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \dots & \phi_{xx}(k-1) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_{xx}(k-1) & \dots & \dots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

となる。したがって A の逆行列が容易に求められるとすると、

$$g = \frac{1}{\Delta t} A^{-1} \cdot \Phi_{xy} \quad (4)$$

とインパルス応答が求められる。

従来 A^{-1} が容易に求められる例として、つぎのような場合が知られている。

- (1) $\phi_{xx}(t) = \delta(t)$ の場合
- (2) $\phi_{xx}(t) = e^{-\lambda|t|}$ の場合
- (3) $x(t)$ が M 系列の場合²⁾
- (4) $X(t)$ が重みをつけた M 系列の場合⁹⁾

3. 反対称 M 系列を用いる場合

n 段のシフトレジスタに適当なフィードバックをかけることにより発生される M 系列信号を m_i ($m_i = +1$ または -1) とするとき、 m_i を一つおきに符号反転して得られる信号 A_i は、antisymmetric M-sequence³⁾ または inverse repeat M-sequence⁷⁾ と呼ばれ、ここではこれを反対称 M 系列と訳すことにする。すなわち

$$A_i = (-1)^i m_i \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

反対称 M 系列の性質を列挙するとつぎのようになる。

- (1) 周期は $2N$ である (ただし $N=2^n-1$)。
- (2) 周期 $2N$ のうち、前半分の系列の符号を反転したものが後半分の系列である。すなわち

$$A_{N+i} = -A_i \quad (i=0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

- (3) 平均値はゼロである。

† 第 14 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 50・8)

* 九州東海大学工学部 熊本市大江町渡鹿 223

** 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kyushu Tokai University, Kumamoto

** Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received February 17, 1988)

(Revised May 19, 1988)

(4) A_i の自己相関関数 $\phi_{AA}(k\tau)$ は, m_i の自己相関関数 $\phi_{mm}(k\tau)$ を一つおきに符号反転したものに等しい。すなわち,

$$\phi_{AA}(k\tau) = (-1)^k \phi_{mm}(k\tau) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

ただし, τ はシフトレジスタのクロックパルスの周期である。

(5) A_i の奇数次の相関関数はゼロである。

(6) A_i と m_i の相互相関関数は, すべての遅延に対してゼロである。

制御系への入力信号として, この反対称 M 系列信号を用いると, 前述の行列 A はつぎようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \dots \\ \varepsilon & 1 & & & \\ -\varepsilon & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし $\varepsilon \triangleq 1/N$ とする。 A の逆行列はつぎのように求めることができる。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D & -E & E & -E & \dots \\ -E & D & & & \\ E & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & D \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし

$$D \triangleq \frac{N(N-K+2)}{(N+1)(N-K+1)}, \quad E \triangleq \frac{N}{(N+1)(N-K+1)} \quad (10)$$

したがって, インパルス応答 $g(i)$ は,

$$\begin{aligned} g(i) &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ (D-E) \phi_{xy}(i) + E \sum_{k=-i}^{K-i-1} (-1)^k \phi_{xy}(i+k) \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{N}{N+1} \phi_{xy}(i) + e_a(i) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$e_a(i) \triangleq \frac{N}{(N+1)(N-K+1)} \sum_{k=-i}^{K-i-1} (-1)^k \phi_{xy}(i+k) \quad (12)$$

であり, 更に $e_a(i)$ は i が偶数か奇数かによって符号を変えるだけであることを考慮に入ると,

$$\begin{aligned} e_a(i) &= \frac{(-1)^i N}{(N+1)(N-K+1)} \sum_{j=0}^{K-1} (-1)^j \phi_{xy}(j) \\ &= \frac{(-1)^i N}{(N+1)(N-K+1)} \sum_{l=0}^{K-1} g(l) \sum_{j=0}^{K-1} (-1)^j \phi_{xx}(j-l) \Delta t \\ &= \frac{(-1)^i}{(N+1)} \sum_{l=0}^{K-1} (-1)^l g(l) \Delta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{(-1)^i}{(N+1)} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\Delta t} g(t) dt \\ &= \frac{1}{(N+1)} \cdot \eta \end{aligned} \quad (13)$$

ここに

$$\eta \simeq (-1)^i g(\Delta t/2) \cdot \Delta t/2 \quad (14)$$

であり, 通常の M 系列を用いた場合は, Δt のいかんにかかわらず $\eta=1$ となるのに対し, 反対称 M 系列の場合は, 符号が交互に変わるが Δt を十分小さくしておけば η は十分小さくできる。したがって, (11) 式は

$$g(i) \simeq \frac{N}{(N+1)\Delta t} \cdot \phi_{xy}(i) \quad (15)$$

と近似できる。

また (2) 式で $j=0$ とおいた式と (13) 式から

$$e_a(i) = (-1)^i \left\{ g(0) - \frac{N}{N+1} \phi_{xy}(0) \right\} \quad (16)$$

とも書けるので, たとえば 2 次以上の高次系では $g(0)=0$ となるから, 誤差 $e_a(i)$ は $\phi_{xy}(0)$ によって定まることがわかる。したがって補正をしようと思えば容易に行える。

4. あとがき

制御系の入力として, 反対称 M 系列信号を用いると Wiener-Hopf 型積分方程式の deconvolution を容易に行うことができることを示した。

参考文献

- 1) M. T. G. Hughes and A. R. M. Noton: The Measurement of Control System Characteristics by Means of a Crosscorrelator, Proc. Inst. Elec. Eng., **109**, part B, 77/83 (1962)
- 2) 佐藤 勇: 線形なプロセスの応答の実時間算定法, 計測と制御, **3-9**, 675/683 (1964)
- 3) P. A. N. Briggs and K. R. Godfrey: Pseudorandom Signals for the Dynamic Analysis of Multivariable Systems, Proc. IEE, **113-7**, 1259/1267 (1966)
- 4) 磯部 孝編: 相関関数及びスペクトル, 170/181, 東大出版会 (1968)
- 5) 中村, 岩貞, 足立: I 系列によるプラント動特性の同定法, 計測自動制御学会論文集, **5-2**, 118/126 (1969)
- 6) D. W. Clarke and P. A. N. Briggs: Errors in Weighting Sequence Estimation, Int. J. of Control, **11-1**, 49/56 (1970)
- 7) N. Ream: Nonlinear Identification Using Inverse Repeat m-Sequences, Proc. IEE, **117-1**, 213/218 (1970)
- 8) H. A. Barker, S. N. Obidegwu and T. Pradisthayon: Performance of Antisymmetric Pseudorandom Signals in the Measurement of 2nd Order Volterra Kernels by Crosscorrelation, Proc. IEE, **119-3**, 353/362 (1972)
- 9) H. Kashiwagi: A Method of System Identification Using Weighted M-Sequence Signal, Proc. 1974 JACC Held in Austin, Texas, USA, 285/292 (1974)
- 10) 柏木, 坂田: 反対称 m 系列信号とその応用, 第 14 回 SICE 学術講演会予稿集, 319/320 (1975)
- 11) 柏木: M 系列再発見, 計測と制御, **20-2**, 236/245 (1981)