マニピュレータの PD 型二重構造ロバストモデル追従制御†

大須賀 公 一*・杉 江 俊 治**・小 野 敏 郎*

PD-Type Two-Stage Robust Tracking Control for Robot Manipulators

Koichi OSUKA*, Toshiharu SUGIE** and Toshiro ONO*

In this paper, we propose a practical design method of a Fixed-Gain-Type controller (PD-controller) for manipulators. The controller has the following properties;

- (a) The desired trajectory can be specified.
- (b) The control accuracy can be specified.
- (c) The convergence characteristics of initial error can be specified.
- (d) The robustness to modeling errors and to measurement noises is ensured.
- (e) The structure of the controller is simple.

The main idea of our method is that we take account of the work space of a practical manipulator precisely and adopt the Two-Stage Robust Tracking Control System (Two-Stage-RTCS) developed by the authors. The consideration of the work space is used for assuring the boundedness of state variable of the manipulator and the Two-Stage-RTCS is used for avoiding an excessive input torque to the manipulator. Further, we show that the controller based on the Computed-Torque-Method can be used as a robust controller.

Key Words: manipulator, robust control, PD control, two-stage control, work space, computed torque method

1. はじめに

マニピュレータの軌道追従制御問題を考える上で、最も基本的な制御方式としてよく知られているのが、Computed-Torque 法 (C-T 法) である¹⁾。ところが従来から、この方法には動特性変動に対するロバスト

性が欠けているとされ、その対策として、(a) 適応制御^{2), 3)}や (b) 可変構造型制御⁴⁾、あるいはスライディング・モードの概念を利用した (c) 可変ゲイン型制御^{5)~9)}などの併用が考えられてきた。このうち (c) は、制御則が単純で連続入力を得られることから、有力な制御方式であると思われる。さらに (c) は、本質的にはハイゲイン・フィードバックになっており、固定ゲイン化することが可能である。実際、これについては、Leitmannら、Ambrosino らも指摘している^{5), 6), 8)}。

さて、マニピュレータの実用的な制御系を開発する際、制御系に対して、以下のような設計仕様を考えることは、自然であろう。

- (1) 目標軌道を与えることができる。
- (2) 制御精度を指定することができる。
- (3) 初期誤差収束特性を指定することができる。
- (4) モデリング誤差、観測雑音に対してロバストである。
- (5) 制御系の構造が単純である (主要部がたとえば、PD 制御器になっている)。

しかしながら、上述のいずれの制御方式でも、これら五つの仕様をすべて満たすことはできない (たとえば、(c) を用いると、(1)(2)(4) は満たすが、(3)(5) が満足しない)。

そこで本論文では、設計仕様 (1)~(5) をすべて満足することができる、固定ゲイン型ロバスト制御系の設計法について考察する。そのためには、

(i) 状態量の動きうる領域を定量的に予想できるか？

(ii) マニピュレータに対して過大な入力を加えることにならないような配慮がなされているか？

という問題を吟味する必要がある。(i) は、ゲインの大きさを定量的に見積るために必要となるが、これについてはしばしば、十分大きな有界領域を考え状態は常にそのなかに収まっている、という仮定をおくこと

† 第17回制御理論シンポジウムで発表 (昭63・6)

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804

** 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

* College of Engineering, University of Osaka Prefecture, Sakai

** Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji
(Received March 16, 1988)

(Revised August 16, 1988)

が多い^{7),13)}。ところが本来、状態の有界性は保証すべきものであって、仮定するものではないはずである。また(ii)は、固定ゲイン型制御則では、初期状態誤差が大きい場合に問題になると予想される(一般にハイ・ゲインになっているから)が、これまで、初期誤差に対する考慮がなされていなかった。本論文では、マニピュレータの動作限界・制御誤差の大きさなどを定量的に考慮することによって、(i)に対処することを考える。また、これまでに筆者らが提案してきた二重構造方式(二重構造 RTCS: Robust Tracking Control System)¹⁰⁾では、初期時刻でマニピュレータの状態と一致している中間線形モデルというものを考え、マニピュレータは、この中間線形モデルの状態に、常に精度 ε で追従するようになっている。したがって、二重構造方式を採用し、中間線形モデルの運動を適当に指定することによって、(ii)のなかで、初期誤差が大きい場合に入力が高次化する、という問題点を緩和することができる。また二重構造制御系は、初期誤差収束特性を伝達関数の形で陽に指定できることから、(i)を考える際にも有効になる。

そして最後に、前述の C-T 法が、ここで示す PD 型二重構造 RTCS の特殊な場合に相当していることが示される。これは、C-T 法のロバスト性の保証をしたことになる。

2. 問題の設定

本章では、ここで考えるマニピュレータとその作業領域の定義、および問題の記述を行う。なお、本論文では、 $\lambda_M(\mathbf{A})$, $\lambda_m(\mathbf{A})$ でそれぞれ行列 $\mathbf{A}$ の最大特異値、最小特異値を表わすものとする。 $\|\mathbf{a}\|$ でベクトル $\mathbf{a}$ のユークリッドノルムを、 $\|\mathbf{A}\|$ で行列 $\mathbf{A}$ の最大特異値を表わす。そして $\mathbf{a}$ 、あるいは $\mathbf{a}(t)$ でベクトルの時間領域表現、 $\mathbf{a}(s)$ でベクトル $\mathbf{a}(t)$ のラプラス変換を表わすものとする。

2.1 マニピュレータ

本論文では、つぎのような回転関節のみからなる n 入力 n 自由度のマニピュレータに対する軌道追従制御系の構成法について考察する。

$$\langle \mathbf{M} \rangle \begin{cases} \text{マニピュレータ: } \mathbf{J}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{f}(\theta, \dot{\theta}) = \mathbf{u} & (1a) \\ \text{制 御 量: } \theta, \dot{\theta} & (1b) \\ \text{観 測 量: } \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta + \eta_1 \\ \dot{\theta} + \eta_2 \end{bmatrix} & (1c) \\ \text{初期状態: } \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(0) \\ \mathbf{z}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{10} \\ \mathbf{z}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & (1d) \end{cases}$$

ただし、 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T \in \mathbf{R}^n$ は関節角度ベクトル、 $\eta_i \in \mathbf{R}^n$ ($i=1, 2$) は観測雑音、 $\mathbf{J}(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は慣性行列、

$\mathbf{f}(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbf{R}^n$ は遠心力・コリオリ力、重力、摩擦、および外乱などを合せたベクトル、 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ は入力ベクトルとした。

Remark 1: ここでは簡単のため、 $\eta_1(0)=\mathbf{0}$, $\eta_2(0)=\mathbf{0}$, $\dot{\theta}(0)=\mathbf{0}$ としたが、本質的ではない。□

ここで、 $\langle \mathbf{M} \rangle$ に対して、つぎのような仮定をおく。

[A 1] $\mathbf{J}(\theta)$, $\mathbf{f}(\theta, \dot{\theta})$ は必ずしも既知ではないが、以下の性質を満たしているものとする。

(a) $\mathbf{J}(\theta)$ は正定行列で、次式を満たす正数 J_j , J_j が存在する。

$$\lambda_M(\mathbf{J}(\theta)^{-1}) < J_j \quad (2a)$$

$$\lambda_m(\mathbf{J}(\theta)^{-1}) > J_j \quad (2b)$$

(b) 任意の有界領域 $\mathbf{S}$ に対して、次式を満たす有界正数 f が存在する。

$$\|\mathbf{f}(\theta, \dot{\theta})\| < f \quad \text{for } \forall \theta \in \mathbf{R}^n, \forall \dot{\theta} \in \mathbf{S} \quad (3)$$

[A 2] 次式を満たす正数 O_w が存在する。

$$\eta = [\eta_1^T, \eta_2^T]^T \quad (4a)$$

$$\|\eta\| < O_w \quad \text{for } \forall t \quad (4b) \quad \square$$

2.2 動作領域

ところで、現実のマニピュレータの軌道制御を考える上で、必ず考慮すべき問題として、そのマニピュレータの動作領域の検討があげられる。すなわち、一般のマニピュレータには、各関節の回転範囲・出しうる角速度の範囲などが、あらかじめカタログ値として設定されていることが多い。したがって目標軌道は、初期誤差・制御精度なども考慮にいれて、実際の軌道が動作限界を越えないように計画されなければならない。そこでここでは、以下に示す領域を定義しておく。

【定義 1】 各関節の動作限界 $\theta_i^{\min}$, $\theta_i^{\max}$, 出しうる最高角速度 $\dot{\theta}_i^{\min}$, $\dot{\theta}_i^{\max}$, および定数 $\varepsilon_s \geq 0$, $\varepsilon_v \geq 0$ に対してつぎの領域を定義する:

$$\mathbf{H}_s(\varepsilon_s) = \{\theta \mid \theta_i^{\min} + \varepsilon_s < \theta_i < \theta_i^{\max} - \varepsilon_s\}$$

$$\mathbf{H}_v(\varepsilon_v) = \{\dot{\theta} \mid \dot{\theta}_i^{\min} + \varepsilon_v < \dot{\theta}_i < \dot{\theta}_i^{\max} - \varepsilon_v\} \quad \square$$

【定義 2】 任意の θ , $\dot{\theta}$, および定数 $\varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_v > 0$ に対してつぎの領域を定義する:

$$\mathbf{R}_s(\theta, \varepsilon_s) = \{\zeta \mid \|\theta - \zeta\| < \varepsilon_s\}$$

$$\mathbf{R}_v(\varepsilon_v) = \{\mathbf{u}_M \mid \|\mathbf{u}_M\| < \varepsilon_v\} \quad \square$$

2.3 問題の記述

本論文で考える問題をまとめると、つぎのようになる。

【問題】 仮定 [A 1] [A 2] を満たしているマニピュレータ $\langle \mathbf{M} \rangle$ に対して、

$$(a) \quad \text{目標軌道: } \theta_R(\theta_R(0) = \theta_{R0}) \quad (5a)$$

$$\dot{\theta}_R(\dot{\theta}_R(0) = \mathbf{0})$$

$$\|\ddot{\theta}_R(t)\| < R \quad \text{for } \forall t$$

$$(b) \text{ 初期誤差収束特性: } G_0(s) = \frac{s+2\lambda}{(s+\lambda)^2} \quad (5b)$$

$$(c) \text{ 初期誤差許容範囲: } \|e_0^*\| < E_1 \quad (5c)$$

$$(d) \text{ 制御精度: } \varepsilon \quad (5d)$$

を指定したとする. ただし, $e_0^* = \theta_0 - \theta_{R0}$ とおいた.

このときマニピュレータ $\langle M \rangle$ が,

$$\theta_d(s) = \theta_R(s) + G_0(s)e_0^* \quad (6)$$

に精度 ε で追従する, すなわち

$$\|\theta^T - \theta_d^T, \dot{\theta}^T - \dot{\theta}_d^T\| < \varepsilon \quad \forall t \quad (7)$$

となるような連続入力 u の設計法を示せ. $\square$

3. PD 型二重構造ロバスト制御

前章であげた問題を解くために, つぎのような二重構造をもつ制御系の設計法を考える¹⁰⁾.

(Stage-1) 初期状態がマニピュレータ $\langle M \rangle$ の初期観測状態と一致している中間線形モデル $\langle M_M \rangle$ を構成し, その状態量に $\langle M \rangle$ の状態量を常に精度 ε で追従させるロバスト補償器 $\langle C_R \rangle$ を設計する. 特に本論文では, $\langle C_R \rangle$ としてマニピュレータ動特性の公称値を用いた非線形補償に PD 制御器を加えたものを考える.

(Stage-2) $\langle M_M \rangle$ に対して, 二自由度系 $\langle C_L \rangle$ を構成し, 得られた系を (6) 式にモデルマッチングさせる.

このような構成にすると, $\langle M_M \rangle$ は (6) 式の特徴をもったシステムになり, そのシステムに $\langle M \rangle$ は精度 ε で追従するようになる. その結果 (7) 式が満たされ, すべての仕様を満足する制御系が構成できる. しかも制御系の主要部分は, 線形制御器になり, 実現がきわめて容易になる.

3.1 Stage 1: PD 型ロバスト線形化補償器の設計

マニピュレータ $\langle M \rangle$ に対して, n 入力 n 出力の中間線形モデル $\langle M_M \rangle$ をつぎのように構成する.

$$\langle M_M \rangle \begin{cases} \text{中間線形モデル: } \dot{\theta}_M = u_M & (8a) \\ \text{制 御 量: } \theta_M, \dot{\theta}_M & (8b) \\ \text{観 測 量: } \theta_M, \dot{\theta}_M & (8c) \\ \text{初期状態: } \theta_M(0) = z_{10}, \dot{\theta}_M(0) = z_{20} & (8d) \end{cases}$$

いま, $\langle M \rangle$ が $\langle M_M \rangle$ に追従するための入力の候補として

$$u = \hat{J}(z_1)(u_M + \tau) + \hat{f}(z_1, z_2) \quad (9)$$

を考える. ただし, $\hat{J}(z_1) \in R^{n \times n}$, $\hat{f}(z_1, z_2) \in R^n$ は, [A 1] と同様な仮定を満たす, $J(\theta)$, $f(\theta, \dot{\theta})$ の公称値とする. また, $\tau \in R^n$ はロバスト性を確保するために付加する制御器からの入力であり, 以下でその決定法を考察する. ここで $\langle M \rangle$ に (9) 式を代入し, $\langle M_M \rangle$ との差をとり,

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta - \theta_M \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_M \end{bmatrix} \quad (10)$$

とおくと, つぎのような誤差システムが得られる.

$$\dot{e} = A_M e + B_M w \quad (\|e(0)\| < O_w) \quad (11a)$$

$$w = D\tau + g \quad (11b)$$

ただし,

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (11c)$$

$$D = J(\theta)^{-1} \hat{J}(z_1) \quad (11d)$$

$$g = [J(\theta)^{-1} \hat{J}(z_1) - I] u_M + J(\theta)^{-1} [\hat{f}(z_1, z_2) - f(\theta, \dot{\theta})] \quad (11e)$$

とおいた. 特に $\hat{J}(z_1)$ は, D がつぎの仮定を満たすように決定しておく.

[A 3] D は任意の θ, z_1 で共正定行列, すなわち

$$D^* = (D + D^T)/2 > 0 \quad (11d)'$$

となり, 次式を満たす $J_D > J_a$ なる正数 J_D, J_a が存在する.

$$\lambda_m(D) < J_D \quad (2a)'$$

$$\lambda_m(D^*) > J_a \quad (2b)''$$

Remark 2: 仮定 [A 3] を満たす $\hat{J}(z_1)$ の例として,

$$\hat{J}(z_1) = \xi I$$

が考えられる. ここに ξ は適当な正数である. また, 仮定 [A 1], および $\hat{f}(z_1, z_2)$ の選び方より, 任意の有界領域 $R_u(\varepsilon_u)$ に対して有界定数 f_u が存在し, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \|g\| &< f_u \quad \text{for } \forall \theta \in H_s(0), \\ &\quad \forall \dot{\theta} \in H_v(0), \quad \forall u_M \in R_u(\varepsilon_u) \end{aligned} \quad (12)''$$

ここでつぎのような補題が得られる.

[補題 1] システム (11) に対して, 出力方程式

$$v = h_1 e_1 + h_2 e_2 \quad (13)$$

を考える. ただし, h_1, h_2 は任意の正数とする. このとき $\rho > \rho_0$ なる任意正数 ρ に対して,

$$\|v\| \leq \rho \quad \text{for } \forall t \quad (14)$$

となる w が存在すれば,

$$\|e\| \leq \rho \mu \quad \text{for } t \geq 0 \quad (15)$$

が成立する. ただし, ρ_0, μ は以下のようにおいた.

$$\rho_0 = O_w(h_1^2 + h_2^2)^{1/2} \quad (16a)$$

$$\mu = 2(1/h_1^2 + 1/h_2^2)^{1/2} \quad (16b)$$

(証明) まず $\rho > \rho_0$ ならば, $\|e(0)\| < O_w$ なる任意の初期状態で, (14) 式が成立する. つぎに, (11), (13) 式より,

$$\dot{e}_1 = e_2 = -(h_1 e_1 - v)/h_2 \quad (17)$$

を得る. そこで正定値関数,

$$L = e_1^T e_1 \quad (18)$$

を考え, (17) 式に沿って時間微分し, (14) 式を用いる

と

$$\dot{L}/2 < -\|\mathbf{e}_1\|(h_1\|\mathbf{e}_1\| - \rho)/h_2 \quad (19)$$

となるので、

$$\|\mathbf{e}_1\| > \rho/h_1 \rightarrow \dot{L} < 0 \quad (20)$$

を得る。いま、 $\rho/h_1 > \rho_0/h_1 > O_w$ から、 $\|\mathbf{e}_1(0)\| < \rho/h_1$ が得られるので

$$\|\mathbf{e}_1\| \leq \rho/h_1 \quad \text{for } \forall t \quad (21)$$

となり、またそのときには(17)式より

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_2\| &\leq (h_1\|\mathbf{e}_1\| + \|\mathbf{v}\|)/h_2 \\ &\leq 2\rho/h_2 \quad \text{for } \forall t \end{aligned} \quad (22)$$

となる。したがって、上2式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\| &< (1/h_1^2 + 4/h_2^2)^{1/2} \rho \\ &< 2(1/h_1^2 + 1/h_2^2)^{1/2} \rho \quad \text{for } \forall t \end{aligned} \quad \blacksquare$$

〔補題 2〕 システム(11)に対して、正数 k を含む、

$$\boldsymbol{\tau} = -kh_1(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\theta}_M) - kh_2(\mathbf{z}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_M) \quad (23)$$

なる PD 入力を加えると、

$$\|\mathbf{v}\| < \frac{h_1\|\mathbf{e}\| + h_2\|\mathbf{g}\|}{kh_2J_d} + \frac{J_D\rho_0}{J_d} \quad \text{for } \forall t \quad (24)$$

が得られる。

(証明) 正定値関数

$$L = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (25)$$

を考え、(11)、(23)式に沿って時間微分する。そのとき、 $\mathbf{H} = [h_1 \mathbf{I} \ h_2 \mathbf{I}]$ とおくと、 $\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{e}$ となるので次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{L}/2 &= \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_M \mathbf{e} - k\mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{B}_M \mathbf{D} \mathbf{v} - k\mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{B}_M \mathbf{D} \mathbf{H} \boldsymbol{\eta} \\ &\quad + \mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{B}_M \mathbf{g} \\ &= -kh_2\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v} + h_1\mathbf{v}^T \mathbf{e} - kh_2\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{H} \boldsymbol{\eta} + h_2\mathbf{v}^T \mathbf{g} \\ &= -kh_2\mathbf{v}^T \mathbf{D}^* \mathbf{v} + h_1\mathbf{v}^T \mathbf{e} - kh_2\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{H} \boldsymbol{\eta} + h_2\mathbf{v}^T \mathbf{g} \\ &\leq -kh_2J_d\|\mathbf{v}\|^2 + h_1\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{e}\| \\ &\quad + kh_2J_d\|\mathbf{H}\|\|\mathbf{v}\|\|\boldsymbol{\eta}\| + h_2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{g}\| \\ &< -\|\mathbf{v}\|\{kh_2J_d\|\mathbf{v}\| \\ &\quad - (h_1\|\mathbf{e}\| + h_2\|\mathbf{g}\| + kh_2J_D\rho_0)\} \end{aligned} \quad (26)$$

これより

$$\|\mathbf{v}\| \geq \frac{h_1\|\mathbf{e}\| + h_2\|\mathbf{g}\|}{kh_2J_d} + \frac{J_D\rho_0}{J_d} \rightarrow \dot{L} < 0 \quad (27)$$

を得る。ここで、 $\|\mathbf{e}(0)\| < O_w$ より $\|\mathbf{v}(0)\| < \rho_0$ となることと、 $J_D/J_d \geq 1$ となっていることに注意すると(27)式から(24)式が得られる。 $\blacksquare$

これらの補題より、つぎの命題が得られる。

〔命題 1〕 仮定[A1][A2]を満たすマニピュレータ $\langle \mathbf{M} \rangle$ に対して、中間線形モデル $\langle \mathbf{M}_M \rangle$ と $\varepsilon > \varepsilon_0$ なる任意の正数 ε 、および適当な有界正数 ε_u を指定し、

$$\boldsymbol{\theta}_M \in \mathbf{H}_\varepsilon(\varepsilon), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_M \in \mathbf{H}_\varepsilon(\varepsilon), \quad \mathbf{u}_M \in \mathbf{R}_u(\varepsilon_u) \quad (28)$$

が満たされているものとする。さらに、[A3]を満たす入力(9)、(23)を $\langle \mathbf{M} \rangle$ に加えたとする。このと

き、

$$k > k_0 = \frac{(h_1\varepsilon + h_2f_\theta)(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}{h_1h_2^2J_d(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad (29)$$

となっていれば、次式が成立する。

$$\|[\boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}_M^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}^T - \dot{\boldsymbol{\theta}}_M^T]^T\| < \varepsilon \quad \text{for } \forall t \quad (30)$$

ここで、入力(9)(23)を $\langle \mathbf{C}_R \rangle$ と呼んでおく。また、

$$\varepsilon_0 = \frac{2J_D(h_1^2 + h_2^2)}{J_dh_1h_2} O_w \quad (31)$$

である。

(証明) まず、

$$\|\mathbf{e}(0)\| < O_w < \varepsilon_0 < \varepsilon \quad (32a)$$

$$\|\mathbf{v}(0)\| < \rho_0 < \varepsilon/\mu \quad (32b)$$

となっていることに注意しておく。さて、

$$\|\mathbf{e}\| < \varepsilon \quad \text{for } \forall t \quad (33)$$

となっていれば、(30)式は成立するが、そのためには、補題1より、

$$\|\mathbf{v}\| < \varepsilon/\mu \quad \text{for } \forall t \quad (34)$$

となっていればよい。いま、(32)式が成立しているので、(34)式が成り立つための十分条件は、(24)、(34)式より

$$\begin{aligned} k &> \frac{(h_1\|\mathbf{e}\| + h_2\|\mathbf{g}\|)\mu}{h_2J_d(\varepsilon - J_D\rho_0\mu/J_d)} \\ &= \frac{(h_1\|\mathbf{e}\| + h_2\|\mathbf{g}\|)(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}{h_1h_2^2J_d(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad \text{for } \forall t \end{aligned} \quad (35)$$

となることである。ところで $\boldsymbol{\theta}_M$ 、 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_M$ 、 $\mathbf{u}_M$ は、(28)式のように選んでいるので、 k を(35)式にしたがって選んだとすると、

$$\|\mathbf{e}\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{g}\| < f_\theta \quad \text{for } \forall t \quad (36)$$

となる。したがって、(35)式の右辺で $\|\mathbf{e}\|$ 、 $\|\mathbf{g}\|$ をそれぞれ ε 、 f_θ と置き換えたものを k_0 とおき、 $k > k_0$ なる k を用いれば十分である。 $\blacksquare$

3.2 Stage 2: 二自由度補償器の設計

前節からマニピュレータ $\langle \mathbf{M} \rangle$ は、中間線形モデル $\langle \mathbf{M}_M \rangle$ に精度 ε で追従することが保証された。そこでつぎに、 $\langle \mathbf{M}_M \rangle$ を制御対象とみなして、 $\langle \mathbf{M}_M \rangle$ に対して線形制御器 $\langle \mathbf{C}_L \rangle$ を構成し、その結果得られる系を(6)式にモデルマッチングさせる。(6)式は目標軌道と初期誤差収束特性とを指定する形になっているので、 $\langle \mathbf{C}_L \rangle$ として二自由度制御系を用いればよく、つぎの命題が得られる¹⁰⁾。

〔命題 2〕 中間線形モデル $\langle \mathbf{M}_M \rangle$ に対して、

$$\mathbf{u}_M = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_R - b_2(\ddot{\boldsymbol{\theta}}_M - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R) - b_1(\boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R) \quad (37)$$

なる入力 ($\langle \mathbf{C}_L \rangle$) を加えたとする。このとき、

$$b_1 = \lambda^2, \quad b_2 = 2\lambda \quad (38)$$

となっていれば、

$$\boldsymbol{\theta}_M(s) = \boldsymbol{\theta}_R(s) + G_0(s)\mathbf{e}^* \quad (39)$$

が成立する。

(証明) (37), (38)式を(8a)式に代入し, $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R$ とおくと

$$\ddot{\mathbf{y}} + 2\lambda\dot{\mathbf{y}} + \lambda^2\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (40a)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_0^* \quad (40b)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{0} \quad (40c)$$

を得る。そこで, (40)式をラプラス変換すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \frac{s + 2\lambda}{(s + \lambda)^2} \mathbf{e}_0^* \\ &= G_0(s) \mathbf{e}_0^* \end{aligned} \quad (41)$$

となる。したがって, これより(39)式が得られる。■

また, つぎの補題が証明できる。

〔補題 3〕 命題 2 において,

$$\|\boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R\| < \|\mathbf{e}_0^*\| \quad (42a)$$

$$\|\dot{\boldsymbol{\theta}}_M - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R\| < 0.4\lambda\|\mathbf{e}_0^*\| \quad (42b)$$

$$\|\mathbf{u}_M\| < R + 2\lambda\|\dot{\boldsymbol{\theta}}_M - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R\| + \lambda^2\|\boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R\| \quad (42c)$$

が任意の時間 t で成立する。

(証明) 省略。 ■

3.3 設計方法

前節までの結果をまとめると, 2.3 節であげた問題の解として, つぎの定理が得られる。

《定理》 仮定 [A 1][A 2]を満たすマニピュレータ $\langle M \rangle$ と, 設計仕様

$$(a)' \text{ 精度} : \varepsilon (> \varepsilon_0) \quad (43a)$$

$$(b)' \text{ 初期誤差許容範囲} : E_1 \quad (43b)$$

$$(c)' \text{ 初期誤差収束特性} : G_0(s) \quad (\lambda \text{ の指定}) \quad (43c)$$

$$(d)' \text{ 目標軌道} : \begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_R &\in \mathbf{H}_s(\varepsilon_s), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_R &\in \mathbf{H}_v(\varepsilon_v), \\ \|\dot{\boldsymbol{\theta}}_R\| &< R \end{aligned} \quad (43d)$$

が与えられたとする。さらに, 中間線形モデル

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_M = \mathbf{u}_M \quad (44)$$

を構成し,

$$\mathbf{z}_{10} \in \mathbf{R}_s(\boldsymbol{\theta}_{R0}, E_1), \quad \mathbf{z}_{20} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_{R0} = \mathbf{0} \quad (45)$$

なる初期条件に対して, [A 3]を満たす入力

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1)(\mathbf{u}_M + \boldsymbol{\tau}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \quad (46a)$$

$$\mathbf{u}_M = \dot{\boldsymbol{\theta}}_R - b_2(\dot{\boldsymbol{\theta}}_M - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R) - b_1(\boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R) \quad (46b)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -kh_2(\mathbf{z}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_M) - kh_1(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\theta}_M) \quad (46c)$$

を $\langle M \rangle$ に加えたとする。このとき, (38)式が成立している

$$\|\mathbf{u}_M\| \in \mathbf{R}(\varepsilon_u)$$

となり, それに加えて, (29)式が満たされていれば,

$$\|\boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}_a^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}^T - \dot{\boldsymbol{\theta}}_a^T\|^T < \varepsilon \quad \text{for } \forall t \quad (47)$$

が成立する。ただし, h_1, h_2 はあらかじめ与えられる任意の正数,

$$\boldsymbol{\theta}_a(s) = \boldsymbol{\theta}_R(s) + G_0(s)\mathbf{e}_0^* \quad (48a)$$

Fig. 1 PD-type two-stage robust tracking control system ($z = z_1, \dot{z} = z_2$)

$$\varepsilon_s = E_1 + \varepsilon \quad (48b)$$

$$\varepsilon_v = 0.4\lambda E_1 + \varepsilon \quad (48c)$$

$$\varepsilon_u = R + 2\lambda\varepsilon_v + \lambda^2\varepsilon_s \quad (48d)$$

である。

(証明) 補題 3 と (d)' および (44), (48) 式より,

$$\boldsymbol{\theta}_M \in \mathbf{H}_s(\varepsilon), \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_M \in \mathbf{H}_v(\varepsilon), \quad \mathbf{u}_M \in \mathbf{R}_u(\varepsilon_u) \quad (49)$$

となる。したがって, 命題 1 より,

$$\|\boldsymbol{\theta}^T - \boldsymbol{\theta}_a^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}^T - \dot{\boldsymbol{\theta}}_a^T\|^T < \varepsilon \quad \text{for } \forall t \quad (50)$$

を得るが, 命題 2 より $\boldsymbol{\theta}_M = \boldsymbol{\theta}_a$ なので (47) 式を得る。 ■

ここで得られた制御系の構成図を Fig. 1 に示す。

Remark 3: 本来, 動作範囲に限界がある制御対象に対しての目標軌道は, 予想される誤差を考慮して計画されるべきである。そして $\varepsilon_s, \varepsilon_v, \varepsilon_u$ が予想される状態誤差の大きさを表わしている。 □

4. Computed-Torque 法 (C-T 法) のロバスト性

マニピュレータの代表的な制御方式として, C-T 法があげられる¹⁾。これは, マニピュレータ $\langle M \rangle$ と目標軌道 $\boldsymbol{\theta}_R$ に対して,

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1)\mathbf{u}_a + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \quad (51a)$$

$$\mathbf{u}_a = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_R - k_2(\mathbf{z}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R) - k_1(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\theta}_R) \quad (51b)$$

を用いる方法である。ただし, k_1, k_2 は適当な設計パラメータとする。ここで動特性が完全に既知で, 観測雑音がない場合には, 適当な k_1, k_2 を用いることによって, 本制御系は安定化できることが知られている。しかしながら, 動特性が未知の場合や観測雑音がある場合に対する系 (1), (51) の安定性 (ロバスト性) については, 必ずしも保証されているとはいえない。以下では, (51) 式で与えた制御則は, ある条件のもとではロバストな制御則になっている, ということを示す。

まず, (9), (23)式の θ_M , u_M に θ_R , $\ddot{\theta}_R$ をそれぞれ代入すると, (51)式が得られる. これより命題 1 は C-T 法のロバスト性を保証している, と見ることができる. また, マニピュレータ $\langle M \rangle$ に, 入力 (51 a) を代入し,

$$u_a = u_M + \tau \quad (52a)$$

$$u_M = \ddot{\theta}_R - b_2(\dot{\theta}_M - \dot{\theta}_R) - b_1(\theta_M - \theta_R) \quad (52b)$$

$$\tau = -kh_2(z_2 - \dot{\theta}_M) - kh_1(z_1 - \theta_M) \quad (52c)$$

とすると, 前章であげた PD 型二重構造ロバスト制御系が構成できるが, ここで

$$b_i = kh_i = k_i \quad (i=1, 2) \quad (53)$$

とおくと (52) 式は, (51b) 式と一致する. したがって, (51)式は, 二重構造制御系で, 初期誤差収束特性を指定するパラメータ b_i の値を, 制御精度を指定するパラメータ kh_i の値に一致させた場合に相当している, と見ることもできる. すなわち, C-T 法では制御精度と初期誤差収束特性を独立に指定できない, ということがわかる. 以上から, C-T 法に関して, つぎの結果が得られる.

《系》 仮定 [A 1][A 2] を満たすマニピュレータ $\langle M \rangle$ と, 設計仕様

$$(a)' \text{ 精度: } \varepsilon (> \varepsilon_0) \quad (54a)$$

$$(b)' \text{ 目標軌道: } \theta_R \in H_s(\varepsilon), \dot{\theta}_R \in H_v(\varepsilon), \quad \ddot{\theta}_R = u_M, \quad u_M \in R(R), \quad (54b)$$

および, [A 3] を満たす入力

$$u = \hat{J}(z_1)u_a + \hat{f}(z_1, z_2) \quad (55a)$$

$$u_a = \ddot{\theta}_R - kh_2(z_2 - \dot{\theta}_R) - kh_1(z_1 - \theta_R) \quad (55b)$$

が与えられたとする. このとき, (29)式が満たされ,

$$z_{10} = \theta_{R0}, \quad z_{20} = \dot{\theta}_{R0} \quad (56)$$

となっていれば,

$$\|\theta^T - \theta_R^T, \dot{\theta}^T - \dot{\theta}_R^T\|^T < \varepsilon \quad \text{for } \forall t \quad (57)$$

が成立する. ただし, h_1, h_2 はあらかじめ与えられる任意の正数である.

(証明) 命題 1 より明らか. ■

Remark 4: C-T 法では制御精度の指定と初期誤差収束特性の指定との間にはトレード・オフがある. そこで, 上の系では制御精度を設計仕様のなかにいれた. □

C-T 法のロバスト性についての解析は, Craig¹¹⁾ も行っているが, 制御系の設計法が明確ではない. また, マニピュレータの PD 制御によるロバスト性については竹垣ら¹²⁾, 川村ら¹³⁾の研究がある. しかしながら, 前者は PTP (point to point) 制御に対するものであり, 後者は, 軌道制御に関するものではあるが, 動作時間の有界性を仮定する必要がある, などの問題点があった. また, いずれも, 観測雑音についての考

慮はなされていない.

5. シミュレーション

3, 4 章で述べた議論の有効性を確認するために, Fig. 2 のような 2 自由度アーム^{9), 10)}の軌道追従問題を考える. ここで, I_i, m_i をリンク i の重心まわりの慣性モーメント, 質量, l_i, r_i, B_i を第 i リンクの長さ, 第 i 軸とリンク i の重心との距離, 第 i 軸の粘性摩擦係数とし, これらのパラメータの真値と公称値とが Table 1 のようになっているものとする. さらに, 動作限界と, 観測雑音 (計算機で発生される乱数を用いた) の大きさはつぎのようにしているものとする.

$$\theta_1^{\min} = -\pi/2, \quad \theta_1^{\max} = \pi/2, \quad \dot{\theta}_1^{\min} = -\pi, \quad \dot{\theta}_1^{\max} = \pi$$

$$\theta_2^{\min} = -2\pi/3, \quad \theta_2^{\max} = 2\pi/3, \quad \dot{\theta}_2^{\min} = -\pi, \quad \dot{\theta}_2^{\max} = \pi$$

$$O_w = 0.005$$

そして, $h_1 = h_2 = 1$ とおき, 設計仕様として,

$$(a)' \text{ 精度: } \varepsilon = 0.05 (> \varepsilon_0)$$

$$(b)' \text{ 初期誤差許容範囲: } E_1 = 0.5$$

$$(c)' \text{ 初期誤差収束特性: } \lambda = 5$$

$$(d)' \text{ 目標軌道:}$$

$$\theta_{Ri} = -\frac{1}{2\pi} \sin(\pi t) + \frac{1}{2} t \quad (\text{rad}) \quad (0 \leq t \leq 2s) \quad (i=1, 2)$$

が与えられたとする. この時, 定理に従って制御則を

Fig. 2 Manipulator model with 2 d.o.f.

Table 1 Physical parameters

Parameter	(a) Real value	(b) Nominal value
I_1	0.208 (kgm ²)	0.250 (kgm ²)
I_2	0.208 (kgm ²)	0.250 (kgm ²)
m_1	10 (kg)	12 (kg)
m_2	10 (kg)	12 (kg)
B_1	0.5 (Nms)	0.6 (Nms)
B_2	0.5 (Nms)	0.6 (Nms)
r_1	0.25 (m)	0.25 (m)
r_2	0.25 (m)	0.25 (m)
l_1	0.5 (m)	0.5 (m)
l_2	0.5 (m)	0.5 (m)

設計すると、二重構造制御則

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1)(\mathbf{u}_M + \boldsymbol{\tau}) + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \quad (58a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_M = \mathbf{u}_M \quad (58b)$$

$$\mathbf{u}_M = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_R - 25(\dot{\boldsymbol{\theta}}_M - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R) - 10(\boldsymbol{\theta}_M - \boldsymbol{\theta}_R) \quad (58c)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -400(\mathbf{z}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_M) - 400(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\theta}_M) \quad (58d)$$

が得られる。また比較のため、C-T 法による制御則

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1)\mathbf{u}_M + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \quad (59a)$$

$$\mathbf{u}_M = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_R - 25(\mathbf{z}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_R) - 10(\mathbf{z}_1 - \boldsymbol{\theta}_R) \quad (59b)$$

を求めておく。ただし、(58)、(59)式は、 $\mathbf{z}_1 = \boldsymbol{\theta}$ 、 $\mathbf{z}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 、 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ のとき、両者の初期誤差収束特性が一致するように設計されている。これは、C-T 法では、初期誤差がある場合には、初期誤差収束特性しか指定することができないからである。以上の準備のもとで、つぎのようなシミュレーションを行った。

(I) Computed-Torque 法…(Fig. 3(a))

(II) 二重構造制御系…(Fig. 3(b))

ここで、 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1)$ 、 $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ としては、 $\mathbf{J}(\mathbf{z}_1)$ 、 $\mathbf{f}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ に公称値パラメータ (Table 1(b)) を代入したものを用了。その際、仮定 [A3] については数値計算によって確認した。また、(II) の場合の $\|\mathbf{e}\|$ 、 u_1 をそれぞれ Fig. 4, 5 に示す。このように、(I) では、初期誤差収束特性を指定することによって、特性変動があった場合の制御精度の指定ができなくなっているが (不安定を意味するのではない)、(II) では、それらが独立に指定されているようすがよくわかる。

(a) Computed-torque method

(b) PD-type two-stage RTCS

Fig. 3 Simulated results

Fig. 4 Norm of state error (two-stage RTCS)

Fig. 5 Input torque (two-stage RTCS)

6. おわりに

マニピュレータに対する二重構造制御系の一設計法を示した。本設計法には、以下のような特徴がある。

(a) マニピュレータの動作限界が設計仕様のなかに組み込まれているので、動作中にそれを越えることがない。

(b) 動特性変動、観測雑音に対してロバストである。

(c) 目標軌道、初期誤差収束特性、制御精度とが独立に指定できる。

(d) 従来の固定ゲイン型制御則^{11), 13)}に比べて、初期状態誤差の許容範囲が大きくなった。すなわち、文献 11), 13) などでは、初期状態誤差ノルムの許容される球の半径が ε であるのに対し、本論文では $E_1 (\gg \varepsilon)$ とできる。

(e) 主制御器が固定ゲイン型 PD コントローラになっているので、実現が容易である。

(f) Computed-Torque 法に基づく制御器は、適当な条件のもとではロバスト制御器として働く、ということが示された。

今後の課題としては、寄生要素 (考慮されていない高次モード) に対するロバスト性の検討があげられる。また、本論文のように観測雑音が存在する場合には、 k を大きくしすぎると観測雑音が増幅され、入力が増大化することが考えられる。したがって、このようなとき、特に入力に飽和がある場合には、飽和の大

きさと制御精度との関係などを厳密に議論しておく必要があるが、この点についても今後の課題としておきたい。

参 考 文 献

- 1) J. Y. S. Luh, M. W. Walker and R. P. C. Paul: Resolved-Acceleration Control of Mechanical Manipulators, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-25-3**, 468/474 (1980)
- 2) 大須賀公一：非線形メカニカルシステムの適応制御，計測自動制御学会論文集，**22-7**，756/762 (1986)
- 3) J. J. Craig, P. Hsu and S. S. Sastry: Adaptive Control of Mechanical Manipulators, Int. J. Robotics Research, **16/28** (1987)
- 4) J. J. E. Slotine: The Robust Control of Robot Manipulators, Int. J. Robotics Research, **4-2**, 49/64 (1985)
- 5) G. Leitmann: On The Efficacy of Nonlinear Control in Uncertain Linear Systems, J. Dynamic Syst. Measurement, Contr., Trans. ASME, **102**, 95/102 (1981)
- 6) E. P. Ryan, G. Leitmann and M. Corless: Practical Stabilizability of Uncertain Dynamical Systems: Application to Robotic Tracking, J. Optim. Theory and Applications, **47-2**, 235/252 (1985)
- 7) M. W. Spong, J. S. Thorp and J. M. Kleinwaks: The Control of Robot Manipulators with Bounded Input Part II: Robustness and Disturbance Rejection, Proc. 23rd IEEE CDC, 1047/1052 (1984)
- 8) G. Ambrosino, G. Celentano and F. Galofalo: Tracking Control of High-Performance Robots via Stabilizing Controller for Uncertain Systems, J. Optim. Theory and Applications, **50-2**, 239/255 (1986)
- 9) 大須賀，小野：非線形メカニカルシステムのロバストモデル追従制御，計測自動制御学会論文集，**24-2**，126/133 (1988)
- 10) 杉江，大須賀，小野：二重構造ロバストモデル追従制御，計測自動制御学会論文集，**24-4**，350/356 (1988)
- 11) J. J. Craig: Adaptive Control of Mechanical Manipulators, Addison-Wesley Publishing Company (1987)
- 12) M. Takegaki and S. Arimoto: A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators, J. Dynamic Syst. Measurement, Contr., Trans. ASME, **103**, 119/125 (1981)
- 13) S. Kawamura, F. Miyazaki and S. Arimoto: Stability of Trajectory Tracking PD Feedback Control for Robot Manipulator, Proc. SICE Annual Conf., **2**, 1053/1056 (1987)