既存のロバスト安定測度の比較

森 武 宏*

Comparison of the Proposed Stability Robustness Measures

Takehiro MORI*

Comparison in sharpness is made among existing stability robustness measures for linear time-invariant continuous systems. The relation of the decay rate of the systems to these measures is also discussed. Due to this work, all the cited measures can be arranged in order of sharpness.

Key Words: stability, robustness measures, decay rate, linear time-invariant systems, unstructured perturbation

1. ま え が き

パラメータ空間においてロバスト安定性を考える場合、通常、安定性が保たれるために許されるパラメータ変動の大きさを評価することに興味をもたれる。状態空間表現されたシステムに対して、システムの特性行列が一体どの程度安定余裕をもっているのかを測るスカラー量の尺度に関しては、現在いくつかの提案がある。これらの尺度の良否は、計算の容易さ、設計理論との馴染みなど種々の観点から定められるべきであるが、もちろんとりわけ肝要な視点はそれらの鋭さ、あるいは強弱である。本稿は、代表的ないくつかのロバスト安定測度をとりあげ、それら相互の間の大小関係を論じたものである。これにより、少なくとも鋭さに関する限り、それらの間の序列は明らかになる。

以下では、行列 $X \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対して $\lambda_i(X)$ でその固有値を示し、それらがすべて実数であるときその最小、最大のものを $\lambda_{\min}(X)$, $\lambda_{\max}(X)$ と表わす。また、 X の特異値を $\sigma_i(X)$ とすれば、 $\sigma_i(X) \triangleq \{\lambda_i(X^*X)\}^{1/2}$, $(*)$: 共役転置記号、である。 X のスペクトルノルムを $\|X\|$ で表わせば、 $\|X\| = \sigma_{\max}(X)$ となる。この $\|X\|$ から導かれる行列メジャーを $\mu(X)$ とすれば、 $\mu(X)$ は $\mu(X) \triangleq \{\lambda_{\max}(X+X^*)/2\}$ で定義される。

3. 主要な結果

線形定係数システム

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

の係数行列 A が摂動 E を受けて、

$$\dot{x} = (A+E)x, \quad E \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (2)$$

で表わされる場合を考える。名目システムである (1) 式は漸近安定、つまり $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$, $i=1, \dots, n$ とする。このとき、(2) 式のシステムも同じく安定に留まるために許される E の大きさ、 $\|E\|$ の限界値はいかほどであろうか。一般に、この値を正確に手に入れることは難しく、その下限値で我慢しなければならない。 A で直接表現されたものに限れば、現在までに提案されているその代表的なものとしてつぎの二つが挙げられる。

$$m_1 \triangleq -\mu(A)^{1/2}, \quad \text{ただし } \mu(A) < 0 \quad (3)$$

$$m_2 \triangleq \inf_{\omega \geq 0} \sigma_{\min}(\omega I - A)^{2/3, 9)} \quad (4)$$

ただし、 I は単位行列である。これらは、 $\|E\| < m_i$, $i=1$ または 2 , ならば、(2) 式のシステムは依然漸近安定に留まるという意味でロバスト安定測度である。まずこれらの強弱について調べてみよう。結果はつぎに示す定理に示される。

《定理 1》 つぎの不等式が成り立つ。

$$m_2 \geq m_1 \quad (5)$$

(証明) つぎの補題を用いる。

[補題 1]⁴⁾ 任意の行列 $X \in \mathbf{C}^{n \times n}$ に対して、つぎの一連の不等式が正しい。

$$\lambda_i \left(\frac{X+X^*}{2} \right) \leq \sigma_i(X), \quad i=1, \dots, n \quad (6)$$

ただし、両辺の各量は i に関してともに非増加または非減少の順に並べられているものとする。

この補題より、とくに、

$$\lambda_{\min} \left(\frac{X+X^*}{2} \right) \leq \sigma_{\min}(X) \quad (7)$$

すなわち、

$$-\lambda_{\max} \left(-\frac{X+X^*}{2} \right) \leq \sigma_{\min}(X) \quad (8)$$

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji

(Received April 13, 1989)

が得られる。上式で、 $X = \omega I - A$ とおくと、

$$-\mu(A) \leq \sigma_{\min}(\omega I - A) \quad (9)$$

となる。左辺は ω に無関係ゆえ、両辺の ω に関する極小をとることにより、求める(5)式が従う。

ところで、上記の m_1, m_2 以外に、 A を直接その定義に用いずに、リャプノフ行列方程式、

$$A'P + PA + 2I = 0, \quad ('): \text{転置記号} \quad (10)$$

の正定値解 P を通して間接的に表現されたロバスト安定度度がつぎのように得られている。

$$m_3 \triangleq 1/\|P\| = 1/\sigma_{\max}(P)^{30} \quad (11)$$

この指標の鋭さは一体どのあたりに位置するであろうか。つぎの定理がまず m_1 との関係を与える。

《定理2》 つぎの不等式が成り立つ。

$$m_3 \geq m_1 \quad (12)$$

(証明) つぎの補題の不等式(13)式より直ちに従う。

[補題2]⁵⁾ リャプノフ方程式(10)式に対して、つぎに示す評価式が成り立つ。

$$\|P\| \leq 1/(-\mu(A)), \text{ただし } \mu(A) < 0 \quad (13)$$

$$\|P\| \geq 1/\alpha, \quad \alpha \triangleq -\max \operatorname{Re} \lambda_i(A) \quad (14)$$

残る m_3 と m_2 との関係については、すでに調べられており、つぎのように結着をみている。

《定理3》⁶⁾ つぎの不等式が成り立つ。

$$m_2 \geq m_3 \quad (15)$$

かくして、リャプノフ方程式を用いた測度 m_3 は、 m_2 と m_1 の中間に位置する。以上より、 $m_1 = m_2$ のときのみこれら三者が一致することがわかる。これはたとえば A が対称行列であるときである。結果的には、定理1の内容は、定理2および3により間接的に別途証明されたことになるが、同定理の証明は m_1 と m_2 の間の直接の比較も簡単にできることを示している。ところで上記の補題2の(14)式でスカラー量 α を定義した。これを引き合いに出したのは、 α が A の固有値と虚軸との間の距離、すなわち A の減衰度を表わし、一般に直観的に非常にわかりやすい安定性の指標であると受け取られているためである。しかしながら、この α は $m_i, i=1, 2, 3$ と同じ意味でのロバスト安定度度ではないことが報告されている⁷⁾。つまり安定な A でも α よりも十分小さな摂動で不安定となる場合が存在する。けれども、それにもかかわらず α が安定性に関連の深いスカラー量であることに疑いがない。そこで、 α と $m_i, i=1, 2, 3$ との関係を考えてみると、(14)式より

$$\alpha \geq m_3 \quad (16)$$

が得られる。したがって残されているのは、 α と m_2

との比較である。これについては、最近、つぎの結果が明らかにされた。

$$\alpha \geq m_2^{9)} \quad (17)$$

以上で、本稿の諸量の順序関係がすべて確定したことになる。この場合も、(16)式は(15)、(17)式を組み合わせると得られるが、リャプノフ方程式を用いた直接の不等関係(14)は等号成立の場合に対する示唆を与えるという意義をもっている。

3. む す び

状態空間表現されたシステムに対して、現在までに提案されているいくつかのロバスト安定度度間の大小関係を整理した。摂動を表わす E 自身の大きさだけでなくその要素の変動の大きさの概略が手中にある場合、Yedavalli によるリャプノフ行列方程式を用いたロバスト安定解析法が知られている⁸⁾。この方法によるロバスト安定性の尺度と m_i との比較は問題の設定が異なるので意味はないが、適当な条件のもとで強いて比較すれば、システムの構造に関する情報が知れている分だけ前者が優れているという結果になる。離散時間システムに対して、本稿と並行した検討がつぎの課題として残されている。

参 考 文 献

- 1) W. J. Wang and T. T. Lee: Robust Stability Criteria for Single- and Large-Scale Perturbed Systems, Int. J. Systems Sci, **19**-3, 405/413 (1988)
- 2) N. Becker and W. M. Grimm: Comments on "Reduced Conservatism in Stability Robustness by State Transformation", IEEE Trans. Automatic Control, **AC-33**-2, 223/224 (1988)
- 3) R. V. Patel and M. Toda: Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, Proc. JACC, San Francisco, Paper TP8-A (1980)
- 4) K. Fan and J. Hoffman: Some Metric Inequalities in the Space of Matrices, Proc. Am. Math. Soc., **6**, 111/116 (1955)
- 5) K. Yasuda and K. Hirai: Upper and Lower Bounds on the Solution of the Algebraic Riccati Equation, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24**-3, 483/487 (1979)
- 6) T. Mori: Estimate for a Measure of Stability Robustness via a Lyapunov Matrix Equation, Int. J. Control, **50**-1, 435/438 (1989)
- 7) C. Van Loan: How Near Is a Stable Matrix to an Unstable Matrix?, Contemporary Mathematics, **47**, 465/478 (1985)
- 8) R. K. Yedavalli: Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30**-6, 577/579 (1985)
- 9) D. Hinrichsen and A. J. Pritchard: Stability Radii of Linear Systems, Sys. Control Letters, **7**-1, 1/10 (1986)