非線形確率システムの非定常パラメータ同定の一手法[†]

相 原 伸 一*

A Method of Nonstationary Parameter Identification for Nonlinear Stochastic Systems

Shin Ichi AIHARA*

In this paper, we consider an identification problem for a nonstationary parameter contained in stochastic nonlinear dynamical systems, whose states are modeled by stochastic boundary value processes. We review nonlinear filtering problems for stochastic boundary processes where the unknown nonstationary parameter is fixed. An equation of an unnormalized conditional distribution for X_t (system state) given by Y_t (observation) and θ_t (parameter) is derived.

Introducing a pathwise version of this equation, existence of maximum likelihood estimates (M. L. E.) for the unknown parameter θ_t is studied. The consistency property for M. L. E. is also explored under many independent experimental observation data. In order to derive a realization algorithm for M. L. E., necessary conditions for an optimal M. L. E., i. e., variational inequality and adjoint equation are presented.

Key Words: stochastic boundary process, Zakai equation, maximum likelihood estimate, consistency property

1. 緒 言

非線形フィルタリングの問題は近年確率偏微分方程式自体,あるいはその解である密度や測度値確率過程を解析することによって,数多くの未解決の問題が解明されている^{1),2)}.たとえば雑音で乱された部分観測のもとでの非線形確率システムの最適制御の存在が,測度値確率過程を生成するザカイ方程式を取扱うことにより証明された³⁾.さらに最適制御問題の必要

条件も同様の手法を用いて導出されている^{4)~7)}.一方,パラメータ同定に関しては,ザカイ方程式の適用はあまり行われておらず,最尤推定法に応用した一例がみうけられるが⁸⁾,一致性などまだ未解決である.

本論文では雑音で乱された非線形観測機構をもつ非線形確率システムを考え,それが含む非定常パラメータの最尤法による同定問題を考察する.まず非定常パラメータの最尤推定値の存在を,文献3)と同様にザカイ方程式の解の性質を調べることにより証明する.さらにパラメータ推定値の一致性も同様の手法で解析する.定数パラメータの同定問題^{9),10)}と異なり,非定常パラメータの同定の場合には観測を長時間行った一致性を論議しても無意味であろう.そこで有限時間内で何回も独立な実験を繰り返し行うことにする.すなわち観測データの数多くのサンプルが得られ,このサンプル数と最尤推定値の一致性の関係を調べることになる.すなわち統計学でよく使われている,不偏性を調べることになる.最後に条件付き確率分布の密度値過程を直接取扱うことにより,最適最尤推定値の必要条件を導く.この必要条件より最尤推定実現のためのアルゴリズムが勾配法などを使用して構成できる.

ここで考えるシグナル X_t は境界条件をもった伊藤型確率微分方程式の解で与えられるとする.議論の簡単化のために反射境界の場合のみを考える,すなわちシグナル $X_t, t \in [0, T]$ は確率1で $G \subset R^m$ にあり,もし X_t が ∂G (G の境界)に当れば X_t は G の内部に反射される場合である.他の吸収壁のような境界条件の場合もこの反射壁の結果が容易に適用できるので,ここでは考えないことにする.このような確率過程は確率境界値過程と称され,交通問題や経済システムによくみうけられる¹¹⁾.さらに考察するシステムが安定であり領域 G を大きく選べば, ∂G に X_t が当たる確率は非常に小さくなるので,境界条件をもった伊藤型確率微分方程式もシステムモデルとして十分使用で

[†] 第18回制御理論シンポジウムで発表 (1989・5)

* 東京理科大学工学部 東京都新宿区神楽坂 1-3

* Faculty of Engineering, The Science University of Tokyo, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received March 6, 1989)

(Revised August 7, 1989)

きると考えられる。

2. システムおよび観測機構

システムは以下の伊藤型方程式で表現されるとする。

$$\left. \begin{aligned} X_t &\in C(0, T; G), \\ k_t &\in C(0, T; R^n) \cap BV(0, T) \\ X_t &= X_0 + \int_0^t f(\theta, X_s) ds + W_t - k_t, \\ k_t &= \int_0^t n(X_s) d|k|_s, \\ |k|_t &= \int_0^t 1_{\partial G}(X_s) d|k|_s \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで k_t は ∂G 上の X_t の局所時間を表わし、 dk_t は X_t が ∂G 上にあるときのみ反射を引き起こすように働くものであり、もし X_t が G 内にあれば (2.1) 式は従来の伊藤型方程式と同じものである。さらに W は R^n 上のブラウン運動過程であり、 $|k|$ は k の $[0, t]$ の全変動を表わし、 n は ∂G の外向き単位ベクトル、 BV は有界変動を表わす。領域 G に関しては R^n の凸有界集合で滑らかな境界 $\partial G(C^3)$ をもつとする。非定常未知パラメータ θ は

$$\Theta = \{\theta | \theta \in H^1(0, T), |\theta|_{H^1} \leq \text{const}\} \quad (2.2)$$

に属する、ただし H^1 はオーダー1のソボレフ空間である。(2.1)式の解の存在と一意性を保証するために以下の条件を設定する。

$$(A-1): f \in R^1 \times R^n \rightarrow R^n$$

$$(A-2): \exists K > 0, \forall x_1, x_2 \in G, \forall \theta \in \Theta$$

$$|f(\theta, x_1) - f(\theta, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

$$|f(\theta, x_1)| \leq K(1 + |x_1|)$$

さらに $X_0 \in G$ a.s. とすれば文献12) p. 202 および13)より (2.1)式は一意的な解 (X, k) をもつことが証明される。

システム (2.1) に関して以下のような観測機構を設定する。

$$Y_t = \int_0^t h(X_s) ds + V_t \quad (2.3)$$

ここで V は W と X_0 に独立な R^m 上のブラウン運動過程でさらに

$$(A-3): h \in C^2(G; R^m)$$

を満足する。

標本見本空間 $\Omega = \Omega_s \times \Omega_0$ とおく。ただし

$$\Omega_s = C(0, T; G), \quad \Omega_0 = C(0, T; R^m)$$

である。 (Ω_s, F_s) 上の X の分布測度を Π_s, Π_0 を (Ω_0, F_0) 上のウィナー測度とする。すなわちギルザノフの定理より、測度 Π_0 のもとで Y_t は $\sigma(Y_s; 0 \leq$

$s \leq t$) 可測なウィナー過程とみなされる。そこで $\hat{P}$ を

$$\hat{P} = \Pi_s \otimes \Pi_0$$

と定義する。すると測度 $\hat{P}$ のもとで $\{X\}$ と $\{Y\}$ は互いに独立な確率過程になる。そこで $\{X, Y\}$ の結合分布を

$$\frac{dP}{d\hat{P}} = L_T \quad (2.4)$$

と構成できる。ただし

$$L_T = \exp \left\{ \int_0^T h(X_s) \cdot dY_s - \frac{1}{2} \int_0^T |h(X_s)|^2 ds \right\} \quad (2.5)$$

であり、 $\cdot$ はベクトルの内積を表わす。 (Ω, P) のもとで、つぎの三性質が得られる。

i) $\{X\}$ の分布は $\hat{P}$ のもとでも同じである。

ii) $\{V_t\}$ は標準ブラウン運動過程である。

iii) $\{V_t\}$ と $\{X_t\}$ は測度 P のもとでも独立である (これは X と V の独立性より容易に導かれる)。

確率境界値過程のフィルタリング問題に対する非規格化条件付密度関数を、デービス²⁾の提案した方法にそって導出しよう。ただしこの場合未知非定常パラメータはある関数に固定しておく。まず $\theta \in R^n \rightarrow R^1$ に対し $E\{|g(X_t)|\} < \infty, t \in [0, T]$ を仮定する。ただし $E\{\cdot\}$ は測度 P に関する積分を表わす。フィルタリングの問題は $E\{g(X_t)|Y_t\}$ を計算することより始まる。よく知られたカリアンプール・ストリーベルの公式¹⁴⁾より

$$E\{g(X_t)|Y_t\} = \frac{\hat{E}\{g(X_t)|Y_t\}}{\hat{E}\{1|Y_t\}} \quad (2.6)$$

が得られる。ただし $\hat{E}\{\cdot\}$ は測度 $\hat{P}$ に関する積分である。 $\sigma_t(g)$ を (2.6) 式右辺の分子と置き、測度 $\hat{P}$ のもとで X_t と Y_t が独立であることより、

$$\sigma_t(g) = \int_{\Omega_s} g(X_s) \exp \left(\int_0^t h(X_\tau) \cdot dY_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t |h(X_\tau)|^2 d\tau \right) d\Pi_s \quad (2.7)$$

と計算される。さて $\sigma_t(g)$ の満たす方程式を導出するのであるが、ここでは確率的関数方程式ではなく、パスワイズ形式を導出することにする。すなわち Y_t に関する確率積分を含まない、 Y_t が単に係数として現れる微分方程式を導く。そのために変数変換の公式を用いて、(A-3)より

$$\begin{aligned} \int_0^t h(X_s) \cdot dY_s &= h(X_t) \cdot Y_t - \int_0^t L_s^h h(X_s) \cdot Y_s ds \\ &+ \int_0^t \sum_{i=1}^n n_i(X_s) \frac{\partial h(X_s)}{\partial x_i} Y_s d|k|_s \\ &- \int_0^t Y_s \cdot \nabla h(X_s) dW_s \end{aligned} \quad (2.8)$$

と変形する. ただし $Y_t \cdot \nabla h$ は $Y_t \cdot h$ の X に関する勾配を表わし,

$$L_t^g(\cdot) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n f_i(\theta, x) \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

である. (2.7) 式は

$$\begin{aligned} \sigma_t(g, Y) = & \int_{\Omega_s} g(X_t) \exp(h(X_t) \cdot Y_t) \\ & - \int_0^t L_s^g h(X_s) \cdot Y_s ds \\ & + \int_0^t \sum_{i=1}^n n_i(X_s) \frac{\partial h(X_s)}{\partial x_i} \cdot Y_s d|k|_s \\ & - \int_0^t Y_s \cdot \nabla h(X_s) dW_s \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t |h(X_s)|^2 ds \Big) d\Pi_s \quad (2.10) \end{aligned}$$

となり, 以後 $\{Y_t\}$ は任意の固定された連続関数として取扱うことになる. さてボレル σ 代数 $B(G)$ 上に測度 Γ_t^Y が存在して

$$\langle g, \Gamma_t^Y \rangle = \sigma_t(g, Y) \quad (2.11)$$

を満足する. ただし任意の測度 ν ($\nu(G) < \infty$) とすべての $g \in C(G)$ に対し

$$\langle g, \nu \rangle = \int_G g(X) \nu(dX)$$

である.

$0 \leq s \leq t$ に対し

$$\begin{aligned} \alpha_t^i = & \exp \left(- \int_s^t L_\tau^g h(X_\tau) \cdot Y_\tau d\tau \right. \\ & + \int_s^t \sum_{i=1}^n n_i(X_\tau) \frac{\partial h(X_\tau)}{\partial x_i} \cdot Y_\tau d|k|_\tau \\ & \left. - \int_s^t Y_\tau \cdot \nabla h(X_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_s^t |h(X_\tau)|^2 d\tau \right) \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$v_t^Y(x) = E_{0,x}(g(X_t) \exp\{Y_t \cdot h(X_t)\} \alpha_t^0) \quad (2.13)$$

ここで $E_{0,x}(\cdot)$ は Π_s に関する初期条件 $X(0) = x$ を固定した積分である. ゆえに X_0 の分布を μ とすれば

$$\langle g, \Gamma_t^Y \rangle = \langle v_t^Y, \mu \rangle \quad (2.14)$$

が得られる. そこで Γ_t^Y の密度の満たすべき方程式を導くために, まず α_t^i と $g(t, X_t)$ の満たすべき方程式を伊藤の公式を用いて導出する.

$$\begin{aligned} d\alpha_t^i = & \left\{ -L_t^g h(X_t) \cdot Y_t - \frac{1}{2} |h(X_t)|^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} Y_t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i} \cdot Y_t \Big\} \alpha_t^i dt \\ & + \sum_{i=1}^n n_i(X_t) \frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i} \cdot Y_t \alpha_t^i d|k|_t \\ & - \alpha_t^i Y_t \cdot \nabla h(X_t) dW_t \quad (2.15) \end{aligned}$$

$g \in C^{1,2}([0, T] \times G)$ に対して

$$\begin{aligned} g(t, X_t) - g(0, X_0) = & \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + L_s^g g \right) ds \\ & - \int_0^t \sum_{i=1}^n n_i(X_s) \frac{\partial g}{\partial x_i} d|k|_s \\ & + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} dW_s^i \quad (2.16) \end{aligned}$$

が得られる.

ゆえに (2.15) 式と (2.16) 式より

$$\begin{aligned} g(t, X_t) \alpha_t^i = & g(s, X_s) + \int_s^t \left(\frac{\partial g}{\partial \tau} + L_\tau^g g \right) \alpha_\tau^i d\tau \\ & - \int_s^t \sum_{i=1}^n n_i(X_\tau) \frac{\partial g}{\partial x_i} \alpha_\tau^i d|k|_\tau \\ & + \int_s^t g \left\{ -L_\tau^g h(X_\tau) \cdot Y_\tau - \frac{1}{2} |h(X_\tau)|^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} Y_\tau \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(X_\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial h(X_\tau)}{\partial x_i} \cdot Y_\tau \Big\} \alpha_\tau^i d\tau \\ & + \int_s^t g \sum_{i=1}^n n_i(X_\tau) \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_\tau \alpha_\tau^i d|k|_\tau \\ & - \int_s^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_\tau \alpha_\tau^i d\tau + M_t^i \quad (2.17) \end{aligned}$$

が得られる. ただし M_t^i は F_t^X -可測なマルチンゲールで $M_t^i = 0$ である. さらに

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial g(t, x)}{\partial x_i} = & \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \\ & \cdot Y_t g(t, x), \text{ on }]0, T] \times \partial G \quad (2.18) \end{aligned}$$

と置き, (2.17) 式に $E_{s,x}\{\cdot\}$ での期待値を取れば

$$\begin{aligned} E_{s,x}(g(t, X_t) \alpha_t^i) = & g(s, x) \\ & + E_{s,x} \left\{ \int_s^t \left(\frac{\partial g}{\partial \tau} + \tilde{L}_\tau^g g \right) \alpha_\tau^i d\tau \right\} \quad (2.19) \end{aligned}$$

が得られる. ただし

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^g(\cdot) = & L_t^g(\cdot) - Y_t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \\ & - \left\{ L_t^g h(x) \cdot Y_t + \frac{1}{2} |h(x)|^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} Y_t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot Y_t \right\}(\cdot) \quad (2.20) \end{aligned}$$

である. ここで以下の後ろ向き方程式を導入する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} + \tilde{L}_s^g v = & 0, \quad \text{for } (s, x) \in [0, t] \times G \\ v(t) = & g(x) \exp\{Y_t \cdot h(x)\}, \quad \text{for } x \in G \quad (2.21) \\ \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x_i} = & \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot Y_s v(s, x), \\ & \text{for } (s, x) \in [0, t] \times \partial G \end{aligned}$$

さらに関数 g および $\tilde{L}^g$ のすべての係数の滑らかさを仮定すれば文献 15) p. 144~146 より (2.21) 式は $C^{1,2}([0, T] \times G)$ に古典的な解をもつことが証明できる。

(2.19) 式より (2.21) 式の解は

$$v(s, x) = E_{s, x} \{g(X_t) \exp(Y_t \cdot h(X_t)) \alpha_t^i\} \quad (2.22)$$

という確率の意味をもつことが知られている²⁾⁻⁴⁾。

ここで (2.21) 式に対する随伴方程式を導入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{L}_t^g p &= 0, \quad \text{for } (t, x) \in]0, T[\times G \\ p(0) &= p_0, \quad \text{for } x \in G \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial p(t, x)}{\partial x_i} &= \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\theta, x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n n_i(x) \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot Y_i \right\} p(t, x) \\ &\quad \text{for } (t, x) \in]0, T[\times \partial G \end{aligned}$$

が得られ、ただし

$$\begin{aligned} \tilde{L}_t^g(\cdot) &= L_t^g(\cdot) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ Y_i \cdot \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}(\cdot) \right\} \\ &\quad - \left\{ L_t^g h(x) \cdot Y_i + \frac{1}{2} |h(x)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} Y_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \cdot Y_i \right\}(\cdot) \end{aligned} \quad (2.24)$$

である。(2.21) 式の場合と同様に p_0 と (2.24) 式の係数の滑らかさを仮定すれば、 p は $C^{1,2}([0, T] \times G)$ に属することが証明できる。ゆえに (2.21) および (2.23) 式より

$$(v(t), p(t)) = (v(0), p(0)) \quad (2.25)$$

が得られる。 $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(G)$ の内積を表す。(2.13) 式より、(2.25) 式は

$$(v(t), p(t)) = (v_0^g, p_0) \quad (2.26)$$

となる。ここで p_0 を X_0 の初期分布 μ と置けば、(2.14) 式より

$$(v(t), p(t)) = \langle g, \Gamma_t^g \rangle \quad (2.27)$$

が得られる。 $v(t) = g(x) \exp Y_t \cdot h$ であるので

$$\langle g, \Gamma_t^g \rangle = \int_G g(x) \exp \{Y_t \cdot h(x)\} p(t, x) dx \quad (2.28)$$

となり

$$q(t, x) = p(t, x) \exp \{Y_t \cdot h(x)\} \quad (2.29)$$

と定義すれば $q(t)$ は非規格化条件付分布測度 Γ_t^g の密度であることがわかる。

残っている問題はこれまですべての係数にかなりの滑らかさを仮定していたが、以後は条件 (A-1)~(A-3) のもとで (2.23) 式を定式化することである。すなわちこの式を古典的な意味ではなく、 L^2 空間で意味付けする (弱い解) ことになる。証明する手法は古典的な解

で弱い解に収束するような列を構成すればよく、詳細は文献 3) p. 278 の定理 7.1 を参照されたい。(2.23) 式は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dp}{dt}, \phi \right\rangle &+ \langle A p, \phi \rangle + \langle D p, \phi \rangle_{L^2(\partial G)} \\ &= \langle B^g p, \phi \rangle + \langle C p, \phi \rangle \\ p(0) &= p_0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

ただし $\phi \in H^1(G)$ であり

$$\begin{aligned} \langle A \phi_1, \phi_2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^n Y_i \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}, \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$D \phi_1 = \frac{1}{2} Y_i \cdot \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \phi_1 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \langle B^g \phi_1, \phi_2 \rangle &= \sum_{i=1}^n \left(f_i(\theta, x) \phi_1, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(f_i(\theta, x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_i \phi_1, \phi_2 \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} C \phi_1 &= \left\{ \frac{1}{2} Y_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} - \frac{1}{2} |h|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} Y_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_i \right\} \phi_1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

である。

ゆえに以下の二つの性質が得られる^{3), 5)}。

[性質 2.1] (A-1)~(A-3) に加え

(A-4) $p_0 \in L^2(G)$

のもとで、(2.30) 式は

$$p \in C([0, T]; L^2(G)) \cap L^2(0, T; H^1(G))$$

なる一意解をもつ。さらに θ に独立で $\sup |Y|$ に依存した以下のような定数 C が存在する。

$$\begin{aligned} \sup_{(t, \theta) \in [0, T] \times \Theta} \|p(t)\|_{L^2(G)}^2 &\leq C \\ \sup_{\theta \in \Theta} \int_0^T \|p(t)\|_{L^2(G)}^2 dt &\leq C \end{aligned}$$

[性質 2.2] $q(t)$ は非規格化条件付分布 Γ_t^g の密度である。

3. 最尤推定値の存在

尤度比関数を提示するまえに、密度 p の θ にかんする連続性を調べなくてはならない。以後以下の条件が満足される場合のみ考える。

$$(A-5) \quad \sup_{\substack{a \in R^1 \\ x \in G}} \left| \frac{\partial f(a, x)}{\partial a} \right| \leq \text{const}$$

《補助定理 3.1》 まず

$$\theta_k \rightarrow \theta \text{ weakly in } H^1(0, T)$$

と仮定し、 $p^k = p(t; \theta = \theta^k)$ と置けば

i) $p^k \rightarrow p$ weakly in $L^2(0, T; H^1(G))$
weakly star in $L^\infty(0, T; L^2(G))$

ii) $p^k \rightarrow p$ strongly in $L^2(0, T; L^2(G))$

となるような部分列が存在する。ただし $p = p(\cdot; \theta)$ である。

(証明) 補助定理 2.1 より p^k および dp^k/dt はそれぞれ $L^2(0, T; H^1(G))$ と $L^2(0, T; (H^1(G))')$ の有界部分集合に属することがわかる。ただし $(H^1(G))'$ は、 H^1 の双対空間である。ゆえに以下のような部分列 (以後部分列を k' のように明記しない) を取り出すことができる。

$$\begin{aligned} p^k &\rightarrow \tilde{p} \text{ weakly in } L^2(0, T; H^1(G)) \\ &\text{weakly star in } L^\infty(0, T; L^2(G)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

さらにコンパクトネス定理¹⁶⁾より

$$p^k \rightarrow \tilde{p} \text{ strongly in } L^2(0, T; L^2(G)) \quad (3.2)$$

がわかる。ゆえに $p = \tilde{p}$ を示せば定理の結論が得られたことになる。 ϕ を $C^0(0, T; R^1) \cap \{\phi(0) = 0\}$ と置き (2.30) 式に掛け部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^T \phi \langle Ap^k, \phi \rangle dt + \int_0^T \phi \langle Dp^k, \phi \rangle_{L^2(G)} dt \\ &\quad + (p^k(T), \phi) \phi(T) \\ &= \int_0^T \phi \langle B^{\theta^k} p^k, \phi \rangle dt + \int_0^T \phi \langle Cp^k, \phi \rangle dt \\ &\quad + \int_0^T \phi \frac{d\phi}{dt} (p^k, \phi) dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。再度コンパクトネス定理を使用して、 $\theta_k \rightarrow \theta$ strongly in $L^2(0, T; R^1)$ がいえるので条件 (A-5) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(\theta_k, x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &\rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(\theta, x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &\text{strongly in } L^2(0, T; L^2(G)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(\theta_k, x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_i \phi &\rightarrow \sum_{i=1}^n f_i(\theta, x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot Y_i \phi \\ &\text{strongly in } L^2(0, T; L^2(G)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

が得られる。ゆえに (3.1) 式より Ap^k , Dp^k , $p^k(T)$, Cp^k の (3.3) 式の形での極限が取れることは、弱収束の定義より明らかである。 $B^{\theta^k} p^k$ は (3.4), (3.5) 式より係数が強収束し、全体として弱収束することがわかる。すなわち (3.3) 式の極限が取れ、かつ ϕ は任意であるので結局 $\tilde{p} = p$ が得られる。

3.1 尤度関数

Π_Y^q を Y より生成された測度とし μ_Y を V のウィナー測度とする。尤度関数は

$$\frac{d\Pi_Y^q}{d\mu_Y} = \hat{E} \{L_t\} = \int_G p(t, x) \exp \{Y_t \cdot h(x)\} dx \quad (3.6)$$

と与えられる。ここで非線形関数 f に含まれる θ が未

知であるとする。以後未知パラメータの真値を θ^0 と表わす。非定常未知パラメータ θ^0 を同定するために、実験を k 回行うとする。すなわち観測データ $\{Y_1^k, Y_2^k, \dots, Y_t^k\}$ が得られることになる。未知パラメータ θ^0 を θ と固定し各 Y_t^k ごとの (2.30) 式の解を

$$p^j(t, x) = p(t, x)|_{Y_t = Y_t^j, \theta^0 = \theta} \quad (3.7)$$

と表記する。 $Y_1^k, Y_2^k, \dots, Y_t^k$ は互いに独立なので尤度関数は

$$\prod_{j=1}^k \frac{d\Pi_{Y_j^k}^q}{d\mu_Y} = \prod_{j=1}^k \int_G p^j(t, x) \exp \{Y_j^k \cdot h(x)\} dx \quad (3.8)$$

となる。

ここで (3.8) 式を最大にする $\hat{\theta}^k$ を求めるのであるが注意すべきことは p^j は有界領域 G で定義されているので、有限要素法あるいは差分法で容易に実現できることであり形式的な近似は不必要なことである。

《定理 3.1》 (3.8) 式を最大にする最適最尤推定値 $\hat{\theta}^k$ が少なくとも一つ存在する。

(証明) (3.8) 式で定義される尤度関数が θ で上半連続であることを証明すればよい。今 θ^i を以下のような最大化列としよう。

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^k \int_G p^j(T, x; \theta^i) \exp(Y_j^k \cdot h(x)) dx \\ &\rightarrow \sup_{\theta \in \Theta} \prod_{j=1}^k \int_G p^j(T, x; \theta) \exp(Y_j^k \cdot h(x)) dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Θ は $L^2(0, T; R^1)$ でコンパクトであるので (コンパクトネス定理) 以下のような部分列が存在する。

$$\theta^i \rightarrow \hat{\theta}^k \text{ strongly in } L^2(0, T; R^1)$$

補助定理 3.1 の結果より

$$p^j(T, x; \theta^i) \rightarrow p^j(T, x; \hat{\theta}^k) \text{ weakly in } L^2(G)$$

となり、 $\hat{\theta}^k$ が最適最尤推定値であることがわかる。

4. 一致性と最適最尤推定のための必要条件

4.1 一 致 性

尤度関数 (3.8) 式をまずよく知られた形に変形する。

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k \frac{d\Pi_{Y_j^k}^q}{d\mu_Y} &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\int_0^T \hat{h}_j^k(t) \cdot dY_j^k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^T |\hat{h}_j^k(t)|^2 dt \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで $\hat{h}_j^k$ は $E \{ \cdot | Y_j^k, 0 \leq s \leq t, \theta^0 = \theta \}$ であり Y_j^k は

$$Y_j^k = \int_0^t h(X_s^j) ds + V_j^k \quad (4.2)$$

を満足する。

《補助定理 4.1》 $M(t)$ を R^1 で値を取る標準ブラウン運動とすれば、定数 $C > 1$ と $\tilde{T}(\omega)$ が存在し、

$t > \tilde{T}(\omega)$ に対し

$$|M(t)| \leq C \{2t \log t\}^{1/2} \text{ a. s.} \quad (4.3)$$

が成り立つ。

(証明) $M(t)$ の一様連続性はすでにレビーによって $|t| < 1$ に対して証明されており¹⁷⁾, $|M(t)| \leq C \{2|t| \log(1/|t|)\}$ が得られている。ここで $M(1/t)t$ と $M(t)$ は同じ分布であることより, $M(t)$ を $M(1/t)t$ とおきかえ, さらに $1/t$ を改めて t とすれば, 十分大きい t に対する (4.3) 式が得られる。この変換はブラウン運動の“equivalent transformation”とよばれている。

《補助定理 4.2》^{12) p.183} まず $g \in L^2([0, T] \times \Omega)$ に関し

$$I^t = \int_0^t g(s, \omega) dM(s) \quad (4.4)$$

なる伊藤の確率積分を考える。不規則時間変換を

$$\phi^{-1}(t) = \int_0^t g^2(s, \omega) ds \quad (4.5)$$

と定義すれば, $F_{\phi^{-1}(t)}$, 可測なブラウン運動 $\tilde{M}(t)$ が存在し

$$\tilde{M}(\phi^{-1}(t)) = \int_0^t g(s, \omega) dM(s) \quad (4.6)$$

を満足する。

[性質 4.1] 以下の等式が成立する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_0^T \hat{h}_i^k \cdot dV_i^j = 0 \text{ a. s.} \quad (4.7)$$

(証明)

$$\tilde{t} = t + (j-1)T \quad (4.8)$$

$$\tilde{V}(\tilde{t}) = V_i^j + V_i^{j-1} \quad (\text{ただし } V_i^0 = 0) \quad (4.9)$$

$$\hat{h}_i(\theta) = \hat{h}_i^k(t) \quad (4.10)$$

と定義すれば

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_0^T \hat{h}_i^k \cdot dV_i^j = \frac{1}{k} \int_0^{kT} \hat{h}_i(\theta) d\tilde{V}(\tilde{t}) \quad (4.11)$$

が得られる。そこで補助定理 3.1 と 3.2 より, $kT > \tilde{T}(\omega)$ に対して

$$\left| \frac{1}{k} \int_0^{kT} \hat{h}_i(\theta) d\tilde{V}(\tilde{t}) \right| \leq C \{2\phi^{-1}(kT) \log \phi^{-1}(kT)\}^{1/2} \quad (4.12)$$

が a. s. で成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(kT) &= \int_0^{kT} \hat{h}_i(\theta) \cdot \hat{h}_i(\theta) d\tilde{t} \\ &= \sum_{j=1}^k \int_0^T |\hat{h}_i^j(\theta)|^2 dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

である。一方

$$\sup_{x \in G} |h(x)| \leq d \quad (4.14)$$

より

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\hat{h}_i^j(t)| \leq d^2, \quad \forall t \in [0, T] \text{ a. s.} \quad (4.15)$$

が得られる。

ゆえに (4.12) 式より

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_0^T \hat{h}_i^j \cdot dV_i^j \right| \\ \leq \frac{c}{k} \{2d^2 k \log(d^2 k)\}^{1/2} \text{ a. s.} \end{aligned} \quad (4.16)$$

が得られ, $k \rightarrow \infty$ とすれば, (4.7) 式が導出される。

《定理 4.2》 $\hat{\theta}^*$ を Θ 内の最尤推定値とすれば, 以下の一致性が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \int_0^T |\hat{h}_i^j(t) - h(X_i^j)|^2 dt \\ = E \left\{ \int_0^T |h(X_i(\theta^*)) - E\{h(X_i(\theta^*)) | Y_i\}|^2 dt \right\} \text{ a. s.} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(証明) 容易に

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k \frac{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta^*}}{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta}} &= \prod_{j=1}^k \left\{ \frac{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta^*}}{d\mu_{Y_i}} \frac{d\mu_{Y_i}}{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\int_0^T (\hat{h}_i^j(t) - \hat{h}_{i\theta^*}(t)) \cdot dV_i^j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_0^T |h(X_i(\theta^*) - \hat{h}_i^j(t)|^2 dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^T |h(X_i(\theta^*) - \hat{h}_{i\theta^*}(t)|^2 dt \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られ, 右辺を

$$= \exp \{S^k(\theta) - H^k(\theta) + H^k(\theta^*)\}$$

と置く。さらに

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{k} \ln \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \prod_{j=1}^k \frac{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta}}{d\Pi_{Y_i^j}^{\theta^*}} \right\} \\ &\leq \frac{1}{k} \sup_{\theta \in \Theta} S^k(\theta) + \frac{1}{k} H^k(\theta^*) \\ &\quad - \frac{1}{k} \inf_{\theta \in \Theta} H^k(\theta) \text{ a. s.} \end{aligned} \quad (4.19)$$

が得られる。ここで $\{Y_i^j\}$ と $\{X_i^j(\theta^*)\}$ は j に関して独立であることより, 大数の強法則が応用でき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H^k(\theta^*) \\ = \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^T |h(X_i(\theta^*)) - E\{h(X_i(\theta^*)) | Y_i\}|^2 dt \right\} \text{ a. s.} \end{aligned} \quad (4.20)$$

が得られる。2乗平均誤差はパラメータが真値に適合したときに最小になるので

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \frac{1}{k} H^k(\theta) \\ \geq \frac{1}{2} E \left\{ \int_0^T |h(X_i(\theta^*)) - E\{h(X_i(\theta^*)) | Y_i\}|^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

が得られる。ここで性質 4.1 を使用すれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} S^k(\theta) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (4.22)$$

となり、結局以下の関係が得られる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \prod_{j=1}^k \frac{d\pi_{Yj}^{\theta}}{d\pi_{Yj}^{\theta^k}} \right\} = 0 \quad \text{a.s.} \quad (4.23)$$

すなわち θ^k を最尤推定値とすれば (4.23) 式より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (H^k(\theta^k) - H^k(\theta^0)) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} S^k(\theta) = 0 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (4.24)$$

となり定理の結論が得られる。

4.2 最尤推定値のための必要条件

尤度比関数の対数を取れば

$$\tilde{J}(\theta) = \ln \left\{ \prod_{j=1}^k \frac{d\pi_{Yj}^{\theta}}{d\mu_Y} \right\} \quad (4.25)$$

を得る。最尤推定値を求めることは (4.25) 式を θ に関して最大化を行うことと等価である。

$\delta\theta \in \Theta$ と $\varepsilon > 0$ に対して、(2.30) 式より

$$\tilde{p}^j(t; \delta\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{p^j(t; \hat{\theta}^k + \varepsilon \delta\theta) - p^j(t; \hat{\theta}^k)}{\varepsilon} \quad (4.26)$$

と定義すれば

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{d\tilde{p}^j}{dt}, \psi \right\rangle + \langle A\tilde{p}^j, \psi \rangle + (D\tilde{p}^j, \psi)_{L^2(\mathcal{G})} \\ &= (B^{\theta^k}\tilde{p}^j, \psi) + (C\tilde{p}^j, \psi) \\ &\quad + (\nabla B_j^{\theta^k} p^j, \psi) \delta\theta, \quad \forall \psi \in H^1(G) \end{aligned} \quad (4.27a)$$

$$\tilde{p}^j(0) = 0 \quad (4.27b)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} (\nabla B_j^{\theta^k} \psi_1, \psi_2) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta} \psi_1, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial x_i}, Y_i^* \psi_1, \psi_2 \right) \\ &\quad \forall \psi_1, \psi_2 \in H^1(G) \end{aligned} \quad (4.28)$$

である。また (4.27) 式は $C([0, T]; L^2(G)) \cap L^2([0, T]; H^1(G))$ で一意な解をもつこともわかる。(4.25) 式の θ に関する第一変分は以下のように計算される。

$$\nabla_{\theta} \tilde{J}(\hat{\theta}^k) \delta\theta = \frac{\prod_{j=1}^k \int_G \tilde{p}^j(T; \delta\theta) \exp\{Y_T^* \cdot h\} dx}{\prod_{j=1}^k \int_G p^j(T; \hat{\theta}^k) \exp\{Y_T^* \cdot h\} dx} \quad (4.29)$$

さて以下の随伴方程式を導入する。

$$\begin{aligned} &-\left\langle \frac{dr^j}{dt}, \psi \right\rangle + \langle r^j, A\psi \rangle + (r^j, D\psi)_{L^2(\mathcal{G})} \\ &= (r^j, B^{\theta^k}\psi) + (r^j, C\psi), \quad \forall \psi \in H^1(G) \end{aligned} \quad (4.30a)$$

$$\begin{aligned} r^j(T) &= \exp\{Y_T^* \cdot h\} \Big/ \prod_{\beta=1}^k \int_G p^{\beta}(T; \hat{\theta}^k) \\ &\quad \exp\{Y_T^* \cdot h\} dx \end{aligned} \quad (4.30b)$$

(4.30) 式も $C([0, T]; L^2(G)) \cap L^2([0, T]; H^1(G))$ で一意な解をもつことが証明できるので、(4.27) 式より

$$\begin{aligned} &(\tilde{p}^j(T; \delta\theta), r^j(T)) \\ &= \sum_{j=1}^k \int_0^T (\nabla B_j^{\theta^k} p^j(t; \hat{\theta}^k), r^j(t)) \delta\theta dt \end{aligned} \quad (4.31)$$

が得られる。

終端値条件 (4.30b) より、第一変分は

$$\nabla_{\theta} \tilde{J}(\hat{\theta}^k) \delta\theta = \prod_{j=1}^k \int_0^T (\nabla B_j^{\theta^k} p^j(t; \hat{\theta}^k), r^j(t)) \delta\theta dt \quad (4.32)$$

と書きかえることができる。

ゆえに最尤推定値 $\hat{\theta}^k$ はつぎの変分不等式で定式化できることになる。

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^k \int_0^T (\nabla B_j^{\theta^k} p^j(t; \hat{\theta}^k), r^j(t)) (\hat{\theta}^k(t) - \theta(t)) dt \geq 0 \\ &\quad \forall \theta \in \Theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

変分不等式 (4.33) の解は (2.30) 式 ((3.7) 式) と随伴方程式 (4.30) を連立して解くことにより得られ、それにより最尤推定が求まることになる。さらにこれらの式が確率的偏微分方程式ではなくパスワイズ形式で定義されているため、従来からよく使用されている勾配法¹⁸⁾などで数値的に実現でき、形式的な近似手法が必要ないことも注目すべきであろう。

5. 例題

$G =]0, 1[$ の場合に 4 章の条件はどのように記述され、さらに数値的に最適最尤推定値を求めるのかについて考えてみよう。今 k 回実験を行って、 $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_k^*$ が得られたとする。この場合解くべき $p^j(t; \hat{\theta}^k)$ の式は $j=1, 2, \dots, k$ に対して、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x^2} - Y_i^* \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (f(\hat{\theta}^k, x) p^j(t; \hat{\theta}^k)) \\ &\quad - Y_i^* \frac{\partial h}{\partial x} f(\hat{\theta}^k, x) p^j(t; \hat{\theta}^k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(Y_i^* \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - |h|^2 + |Y_i^*|^2 \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 \right) p^j(t; \hat{\theta}^k), \\ &\quad (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[\end{aligned} \quad (5.1a)$$

$$p^j(0; \hat{\theta}^k) = p_0(x), \quad x \in]0, 1[\quad (5.1b)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial p^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} + \frac{1}{2} Y_i^* \frac{\partial h}{\partial x} p^j(t; \hat{\theta}^k) \\ &= f(\hat{\theta}^k, x) p^j(t; \hat{\theta}^k) \\ &\quad x = 0, 1, t \in]0, T[\end{aligned} \quad (5.1c)$$

となり、また (4.30) 式は

$$-\frac{\partial r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x^2} + Y_i^* \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial h}{\partial x} r^j(t; \hat{\theta}^k) \right\}$$

$$= f(\hat{\theta}^k, x) \frac{\partial r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} - Y_i^j \frac{\partial h}{\partial x} f(\hat{\theta}^k, x) r^j(t; \hat{\theta}^k) \\ + \frac{1}{2} \left(Y_i^j \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - |h|^2 + |Y_i^j|^2 \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 \right) r^j(t; \hat{\theta}^k), \\ (t, x) \in]0, T[\times]0, 1[\quad (5.2a)$$

$$r^j(T) = \exp \{ Y_T^j \cdot h \} \prod_{\beta=1}^k \int_G p^\beta(T; \hat{\theta}^k) \\ \exp \{ Y_T^\beta \cdot h \} dx, \quad x \in]0, 1[\quad (5.2b)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} - \frac{1}{2} Y_i^j \frac{\partial h}{\partial x} r^j(t; \hat{\theta}^k) = 0 \\ x = 0, 1, t \in]0, T[\quad (5.2c)$$

と書きかえることができる。さらに (4.33) 式の $(\cdot, \cdot)$ の部分は

$$(\nabla B_i^k p^j(t; \hat{\theta}^k), r^j(t; \hat{\theta}^k)) \\ = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f(\hat{\theta}^k, x)}{\partial \theta} p^j(t; \hat{\theta}^k) \frac{\partial r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial f(\hat{\theta}^k, x)}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial x} Y_i^j p^j(t; \hat{\theta}^k) r^j(t; \hat{\theta}^k) \right\} dx \quad (5.3)$$

と表現される。実際これらの必要条件より最適最尤推定値を求めるには、まず (5.1), (5.2) 式を時間 t と位置 x に関して差分化を行う。この場合両式とも観測データが偏微分作用素の係数に現れているので従来研究されてきた確定的な偏微分方程式に対する差分法が、直接使用できることに注意されたい。つぎに差分化された (5.1), (5.2) 式を満足し、さらに (5.3) 式右辺の積分核がほとんどすべての t に関してゼロになる $\hat{\theta}^k(t)$ を求めればよいことになるが、これは当然非線形問題であるので、陽な解を直接求めることはできない。そこで従来よく使用されている手法は勾配法を適用し、数値的に解を求める方法である。まず $\hat{\theta}^k(t)$ に θ の適当な関数 $\tilde{\theta}(t)$ を与え、観測データを使用して差分化された (5.1) 式をコンピュータで解き、その p^j の値をメモリーする。つぎにこの p^j と $\tilde{\theta}$, Y_i^j を用いて、差分化された (5.2) 式を解き (5.3) 式右辺を計算する。もしその値がゼロになれば、それが最適最尤推定値になるわけであるが、 $\tilde{\theta}$ が適当に与えてあるのでゼロにならず、以下のように修正を加える：

$$\hat{\theta}^k(t) = \tilde{\theta}(t) + \lambda \left\{ \frac{\partial f(\hat{\theta}^k, x)}{\partial \theta} p^j(t; \hat{\theta}^k) \frac{\partial r^j(t; \hat{\theta}^k)}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial f(\hat{\theta}^k, x)}{\partial \theta} \frac{\partial h}{\partial x} Y_i^j p^j(t; \hat{\theta}^k) r^j(t; \hat{\theta}^k) \right\} \quad (5.4)$$

ただし $0 < \lambda < 1$ である。修正された $\hat{\theta}^k$ を使用して以上のステップを繰り返して数値的に最適最尤推定値

を求めることが可能である。これは単純な勾配法であるが、これ以外にも最適推定値を数値的に求める方法は数多くあり、その誤差解析なども文献 18) を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) M. Zakai: On the Optimal Filtering of Diffusion Processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **11**, 230/234 (1969)
- 2) M. H. Davis: On a Multiplicative Functional Transformation Arising in Nonlinear Filtering Theory, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **54**, 125/139 (1980)
- 3) W. H. Fleming and E. Pardoux: Optimal Control for Partially Observed Diffusions, SIAM J. Control and Optim., **20**, 261/285 (1982)
- 4) V. E. Benes and I. Karatzas: On the Relation of Zakai's and Mortensen's Equations, SIAM J. Control and Optim., **21**, 472/489 (1983)
- 5) A. Bensoussan: Maximum Principle and Dynamic Programming Approaches of the Optimal Control of Partially Observed Diffusions, Stochastics, **9**, 169/222 (1983)
- 6) U. G. Haussmann: On Existence of Optimal Controls for Partially Observed Diffusions, SIAM J. Control and Optim., **20**, 385/407 (1982)
- 7) H. Kwakernaak: A Minimum Principle for Stochastic Control Problems with Output Feedback, Systems and Control Letters, **1**, 74/77 (1981)
- 8) L. Ljung, S. K. Mitter and J. M. F. Moura: Optimal Recursive Maximum Likelihood Estimate, Proc. of the 10th IFAC World Congress, **9**, 247/248 (1987)
- 9) A. Bagchi and V. Borkar: Parameter Identification in Infinite Dimensional Linear Systems, Stochastics, **12**, 472/486 (1984)
- 10) J. K. Tagnait: Continuous-Time System Identification in Compact Parameter Sets, IEEE Trans. Information Theory, **IT-31-5**, 652/659 (1981)
- 11) S. E. Shreve, J. P. Lehoczky and D. P. Gaver: Optimal Consumption for General Diffusions with Absorbing and Reflecting Barriers, SIAM J. Control and Optim., **22**, 652/659 (1984)
- 12) N. Ikeda and S. Watanabe: Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, North-Holland (1981)
- 13) P. L. Lions and A. S. Sznitman: Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Conditions, Comm. Pure. Appl. Math., **37**, 511/537 (1984)
- 14) G. Kallianpur: Stochastic Filtering Theory, Springer (1980)
- 15) A. Friedman: Partial Equations of Parabolic Type, Englewood Cliffs (1964)
- 16) J. L. Lions: Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod (1969)
- 17) T. Hida: Brownian Motion Process, Springer (1980)
- 18) R. Glowinski, J. L. Lions and R. Trémolières: Numerical Analysis of Variational Inequalities, North-Holland (1981)