ある最適制御近似計算法の収束条件†

師 玉 康 成*・太 田 豊 生*

Convergence of Certain Approximations for Nonlinear Optimal Control

Yasunari SHIDAMA* and Toyomi OHTA*

A family of first-order algorithms for solving unconstrained nonlinear optimal control problems is presented. This method is based on the invariant imbedding and the successive approximations. The followings are considered to be the advantage of this method:

- (a) the algorithms are simple;
- (b) the choice of the initial approximation in this method is not so sensitive as in the second-order algorithms;
- (c) it is not required in these computations to find appropriate parameters in contrast with the case of gradient methods.

Using the fixed point theorem, this paper explains the sufficient conditions for L1-convergence of the proposed algorithms.

Key Words: optimal control, invariant imbedding, successive approximations

1. はじめに

本論文では拘束のない非線形最適制御問題の数値計算法、特に最適性の必要条件から導かれる2点境界値問題¹⁾の数値解法に関して、逐次近似法²⁾と不変埋め込み法³⁾を応用した1次アルゴリズムを提案し、その収束条件を不動点定理²⁾を用いて求める。

逐次近似法は周知のように常微分方程式の初期点問題の解の存在証明⁴⁾に用いられ、その収束性が $1/k!$ で評価されることはよく知られている。ところが、最適制御の2点境界値問題の解法に用いる場合の収束性は初期点問題と異なりあまり考察されていない。筆者の知る限りでは本稿第4章2項の坂和氏の十分条件⁵⁾が最も一般的であると考えられる。しかしながらその条件は制御区間と系の係数の大きさにかなり厳しい制約

を課すものである。一方、不変埋め込み法³⁾にしても、非線形問題についてはその有効性が数値計算例で示されてはいるが、収束性の考察は不十分である³⁾。本稿では筆者の提案する計算法が、用いる計算式の線形部分が指数安定であるという条件下で、制御区間と系の係数の大きさにそれほど厳しい制約を課さずとも収束することを示す。これをいくつかの数値計算例題で実証する。

記号法

関数 $h^m(x, y)$ の x, y に関する偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x} h^m(x, y) = h_x^m$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h^m(x, y) = h_{xy}^m$$

のように表わす。 x が n 次元ベクトル $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ であるとき (T は転置記号を表わす)、関数 $g(x)$ の x に関する偏微分 g_x をつぎの n 次元行ベクトルとして定義する。

$$g_x = [g_{x1}, g_{x2}, \dots, g_{xn}]$$

もし $g(x)$ が n 次元ベクトルならば g_x は

$$g_x = \begin{bmatrix} g_{x1}^1, \dots, g_{xn}^1 \\ \vdots \\ g_{x1}^n, \dots, g_{xn}^n \end{bmatrix}$$

のように表現される。表現を簡単にするため $[g_x]^T$ を g_x^T で表わす。

2. 問題の設定

制御対象の状態方程式および初期条件が

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + g(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_i \quad (1)$$

で与えられ、最小にする評価関数 $J(u)$ が

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + q(x(t), u(t), t) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) \quad (2)$$

† 第27回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 63・8)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* The National Defense Academy, Yokosuka
(Received May 16, 1988)

(Revised November 12, 1988)

である最適制御問題を考える。ここに t は時間変数で、 t_0 は初期時刻、 t_f は終端時刻を表わす。 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ ($m \leq n$) は時刻 t における状態変数および制御量を表わし、 $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $m \times m$ の時変行列、また $g(x(t), u(t), t)$, $q(x(t), u(t), t)$ は任意の非線形項とする。以下表現を簡単にするため混乱の恐れがなければ x , u , $g(x, u, t)$, $q(x, u, t)$ で表わすことにする。

ここで以下を仮定する。

(A1) $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続である。

(A2) $g(x, u, t)$, $q(x, u, t)$ は R^n , R^m の任意の元 x , u を固定したときに区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、 x , u に関してリプシッツ連続である²⁾。

(A3) $g_x(x, u, t)$, $g_u(x, u, t)$, $q_x(x, u, t)$, $q_u(x, u, t)$ が存在し、 R^n , R^m の任意の元 x , u を固定したときに区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、(A2)と同様に x , u に関してリプシッツ連続である。

(A4) 任意の $t \in [t_0, t_f]$ に対し、 $R(t)$ は対称正定であり、 $Q(t)$ は対称準正定である。また $q(x, u, t)$ は準正值、 Q_f は対称準正定である。

3. 計算アルゴリズム

3.1 準備

まず $S(t) \in R^{n \times n}$ をリカッチ型行列微分方程式

$$\dot{S} = -SA - A^T S + SBR^{-1}B^T S - Q$$

$$S(t_f) = Q_f \quad (3)$$

の解とする。仮定(A1)と(A4)により、この方程式は対称な一意解をもつことが知られている^{6), 7)}。

さらに $h \in R^n$ として関数 H をつぎのように定義する。

$$H(x, u, h, t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + q(x, u, t) + (Sx + h)^T \cdot \{Ax + Bu + g(x, u, t)\} \quad (4)$$

このとき、 $H_u(x, u, h, t) = 0$ の解が、 $u = \rho(x, h, t)$ と表わせるものとする。

ここで、

$$\zeta(x, h, t) = \rho(x, h, t) + R^{-1}B^T \{Sx + h\} \quad (5)$$

$$\tilde{A} = A - BR^{-1}B^T S \quad (6)$$

$$\tilde{g}(x, h, t) = g(x, \rho(x, h, t), t) - BR^{-1}B^T h + B\zeta(x, h, t) \quad (7)$$

$$\tilde{q}(x, h, t) = -q_x^T(x, \rho(x, h, t), t) \cdot \{Sx + h\}$$

$$-q_x^T(x, \rho(x, h, t), t) \quad (8)$$

$$\tilde{y}(x, h, t) = -Sg(x, \rho(x, h, t), t) + \tilde{q}(x, h, t) - SB\zeta(x, h, t) \quad (9)$$

とおく。

つぎに逐次近似法²⁾を用いる4種のアルゴリズムのためつぎの4種の微分方程式による漸化式を定義する：

$$\dot{x}_k^i = \tilde{A}x_k^i + \tilde{g}(x_{k-1}^i, h_k^i, t)$$

$$x_k^i(t_0) = x_i, \quad (10)$$

$$\dot{x}_k^i = \tilde{A}x_k^i + \tilde{g}(x_k^i, h_k^i, t)$$

$$x_k^i(t_0) = x_i, \quad (10)'$$

$$\dot{h}_k^i = -\tilde{A}^T h_k^i + \tilde{y}(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i, t)$$

$$h_k^i(t_f) = 0, \quad (11)$$

$$\dot{h}_k^i = -\tilde{A}^T h_k^i + \tilde{y}(x_{k-1}^i, h_k^i, t)$$

$$h_k^i(t_f) = 0. \quad (11)'$$

3.2 逐次近似法によるアルゴリズム

(10)~(11)'式を用いて、つぎのアルゴリズム AR₁₁, AR₁₀, AR₀₁, AR₀₀ のいずれかを第2章の問題の性質に応じて選択し、実行する。

アルゴリズム AR₁₁

Step 0: $j=0$ とおき、 u の推定値 u_0^j を与え(1)式を解き x を求める。この x を x_0^j とし、 $h_0^j=0$ とする。 $k=1$ とおく。

Step 1: x_{k-1}^j , h_{k-1}^j を用いて(11)式を解き h_k^j を求める。

Step 2: x_{k-1}^j と h_k^j を用いて(10)式を解き x_k^j を求める。

Step 3: $j=0$ かつ $k=1$ のとき $k=2$ として Step 2 に戻る。

$j \geq 1$ または $k \geq 2$ のとき

十分小さい $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して、

$$\|x_k^j - x_{k-1}^j\| \leq \delta_1$$

$$\|h_k^j - h_{k-1}^j\| \leq \delta_2$$

が成立すれば Step 4 を実行する。

そうでなければ $k=k+1$ として Step 2 に戻る。

Step 4: $u = \rho(x_k^j, h_k^j, t)$ として(1)式を解き x を求める。この x について十分小さい $\delta_3 > 0$ に対して、

$$\|x_0^j - x\| \leq \delta_3$$

が成立すれば

$$x_{opt} = x$$

$$u_{opt} = u$$

としてアルゴリズムの実行を終了する。

そうでなければ

$$j = j + 1$$

$$u_0^j = u, \quad h_0^j = h_k$$

$$x_0^j = x, \quad k = 1$$

として Step 1 に戻る.

アルゴリズム AR₁₀

AR₁₀ は AR₁₁ において (11) 式の代わりに (11)' 式を用いる. ただし Step 0 において h_0^i を与える必要はなく, Step 1 で h_{k-1}^i は用いない.

アルゴリズム AR₀₁

AR₀₁ は AR₁₁ において (10) 式の代わりに (10)' 式を用いる. ただし Step 2 で x_{k-1}^i は用いない.

アルゴリズム AR₀₀

AR₀₀ は AR₁₁ において (10), (11) 式の代わりにそれぞれ (10)', (11)' 式を用いる. ただし Step 0 において h_0^i を与える必要はなく, Step 1 で h_{k-1}^i は用いない. また Step 2 で x_{k-1}^i も用いない.

これらのアルゴリズムのいずれを選択するかは, 2章に示すように問題の難易度による. たとえば非線形性が非常に強く解くことが困難であると考えられる場合は x_k^i, h_k^i の微分方程式について両方が線形な式を用いる AR₁₁ を適用する. この場合, アルゴリズムの収束は最も減速される. 逆にそれほど困難が予想されない場合は AR₀₀ を適用する. この場合, アルゴリズムの収束は最も速くなる. ただし, 非線形項が逆に状態空間のある領域内ではシステムの安定性に寄与することもあり, この場合は AR₀₀ を用いるほうがよい場合もある.

これらのアルゴリズムの実行によって得られた解の最適性については, その極限解を x_∞, h_∞ とするとき (10)~(11)' 式によって

$$\dot{x}_\infty = \tilde{A}x_\infty + \tilde{g}(x_\infty, h_\infty, t)$$

$$x_\infty(t_0) = x_i, \quad (10)''$$

$$\dot{h}_\infty = -\tilde{A}^T h_\infty + \tilde{g}(x_\infty, h_\infty, t)$$

$$h_\infty(t_f) = 0, \quad (11)''$$

が成り立ち, $\lambda_\infty = Sx_\infty + h_\infty$ と置き, (3), (10)'', (11)'' 式などを用いることにより, $x_\infty, u_\infty = \rho(x_\infty, h_\infty, t), \lambda_\infty$ に関して周知の最適性の必要条件式¹⁾が得られる. すなわち x_∞, h_∞ は最適解の候補 $u_\infty = \rho(x_\infty, h_\infty, t)$ を構成する.

4. 計算アルゴリズムの収束性

この章では, 3章で述べたアルゴリズムの収束性を検討する. ただし, (10), (11), (10)', (11)' 式の解は数値積分ではなく厳密解によるものとする. 逐次近似法で数値積分を実行するため, 誤差の累積は避けられない. 3章で述べたアルゴリズムの Step 4 はこのための工夫であり, この誤差をリセットするための目的でアルゴリズムのループを2重にしてある. 外側の繰返し回数を j で表わし, 内側の繰返し回数を k で表わ

している. ここでは, j を固定した場合の収束性すなわち Step 1~Step 3 のループの収束性について論じる.

4.1 関数空間上の写像 T

ここでつぎの仮定をおく.

(A7) $\rho(x, h, t)$ は R^n の任意の元 x, h を固定したときの区間 $[t_0, t_f]$ 上, t に関して連続であり, x, h に関してリプシッツ連続²⁾である.

仮定 (A2), (A3), (A7) により $\tilde{g}(x, h, t)$ は R^n の任意の元 x, h を固定したときに区間 $[t_0, t_f]$ 上, t に関して連続であり, x, h に関してリプシッツ連続である. すなわち,

$$\exists L_g > 0, \forall t \in [t_0, t_f], \forall x, x', h, h' \in R^n$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{g}(x, h, t) - \tilde{g}(x', h', t)\| \\ & \leq L_g \{\|x - x'\| + \|h - h'\|\} \end{aligned} \quad (12)$$

である. またこれらのことから (10), (10)' 式の解が一意に存在することが知られている. さらに $\tilde{g}(x, h, t)$ についても x, h が有界であればまったく同様なことが成り立ち, (11), (11)' 式の解が一意に存在する. ここで $\tilde{g}$ に関するリプシッツ定数を L_g で表わすことにする.

微分方程式の初期値に関する解の一意性の定理⁴⁾から, (10), (10)', (11), (11)' 式により, 関数 x_{k-1}^i, h_{k-1}^i に関数 x_k^i, h_k^i を一意に対応させる写像が

$$T(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) = (x_k^i, h_k^i)$$

が得られる. T は関数空間 $L_1 \times L_1$ 上の写像と見なす. L_1 は完備空間⁵⁾でありその直接空間 $L_1 \times L_1$ も完備空間である. また厳密には T が $L_1 \times L_1$ から $L_1 \times L_1$ 自身への写像であること, すなわち x_{k-1}^i, h_{k-1}^i が関数空間 L_1 の元であるときに, x_k^i, h_k^i もまたその元であることを確認しなければならないが, その条件や理由は山本や坂和の文献など^{6), 8)}に詳細に記述されているから, 本論文ではこれを省き, その方法を筆者らの場合に適用させていただく. またこれと同様に以下の議論では3章のアルゴリズムの実行によって得られる関数列 $\{x_k^i\}, \{h_k^i\}$ は有界であるとする.

4.2 坂和らの十分条件

坂和らと同様の論法⁵⁾でアルゴリズム AR₁₀ の収束性の十分条件を求める. ただし, この収束性は坂和らのものと異なり, 局所収束性ではない, すなわち以下の議論では $\|x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\|$ などを特に微小量であると仮定する必要はなく, 最適解の近傍でなくとも成り立つ. これは非線形項にリプシッツ連続性の制約を課したためである. まず,

$$\eta_k(t) = \|x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\| \quad (13)$$

$$\xi_k(t) = \|h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t)\| \quad (14)$$

とおく。(10)式から

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_k(t) &\leq \| \dot{x}_k^i(t) - \dot{x}_{k-1}^i(t) \| \\ &\leq \| \tilde{A} \| \cdot \| x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t) \| \\ &\quad + L_\theta \cdot \| x_{k-1}^i(t) - x_{k-2}^i(t) \| \\ &\quad + L_\theta \cdot \| h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t) \| \\ &\leq c\eta_k(t) + c\eta_{k-1}(t) + c\varepsilon_k(t) \\ \eta_k(t_0) &= 0\end{aligned}\quad (15)$$

また(11)式から

$$\begin{aligned}-\dot{\varepsilon}_k(t) &\leq \| \dot{h}_k^i(t) - \dot{h}_{k-1}^i(t) \| \\ &\leq \| \tilde{A} \| \cdot \| h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t) \| \\ &\quad + L_y \cdot \| h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t) \| \\ &\quad + L_y \cdot \| x_{k-1}^i(t) - x_{k-2}^i(t) \| \\ &\leq c\eta_{k-1}(t) + c\varepsilon_k(t) \\ \varepsilon_k(t_f) &= 0\end{aligned}\quad (16)$$

ここで、 $c = \max\{\|\tilde{A}\|, L_\theta, \|\tilde{A}\| + L_y\}$

まず η_k について(15)式から Gronwall⁵⁾の補題により

$$\eta_k(t) \leq \int_{t_0}^t e^{c(t-p)} \{c\eta_{k-1}(p) + c\varepsilon_k(p)\} dp \quad (17)$$

を得る。

同様に ε_k に関して

$$\varepsilon_k(t) \leq \int_t^{t_f} c e^{c(r-t)} \eta_{k-1}(r) dr \quad (18)$$

を得る。

(17), (18)式から

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \leq \int_{t_0}^{t_f} M(c, t) \eta_{k-1}(t) dt \quad (19)$$

ただし、

$$M(c, t) = \frac{1}{2} e^{c(t_f-t_0)} (e^{-c(t-t_0)} + e^{c(t-t_0)}) - e^{c(t-t_0)} \quad (20)$$

また ε_k についても、

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_k(t) dt &\leq \int_{t_0}^{t_f} c e^{-c t} \left[\int_t^{t_f} e^{c r} \eta_{k-1}(r) dr \right] dt \\ &\leq \int_{t_0}^{t_f} (e^{c(r-t_0)} - 1) \eta_{k-1}(r) dr\end{aligned}\quad (21)$$

ここで

$$\max\{M(c, t)\} < 1 \quad (22)$$

となるためには

$$e^{c(t_f-t_0)} < 2 \quad (23)$$

が成り立つことが必要十分である。すなわち坂和らの収束条件⁵⁾が導かれた。この条件式が成り立てば、 L_1 ノルム

$$\|x\|_1 = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t)\| dt$$

に関して(19)式から

$$\begin{aligned}\|x_k^i - x_{k-1}^i\|_1 &= \int_{t_0}^{t_f} \|x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\| dt \\ &< \|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i\|_1\end{aligned}\quad (24)$$

また(21)式から

$$\begin{aligned}\|h_k^i - h_{k-1}^i\|_1 &= \int_{t_0}^{t_f} (e^{c(r-t_0)} - 1) \cdot \eta_{k-1}(r) dr \\ &< \|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i\|_1\end{aligned}\quad (25)$$

したがって、直積空間 $L_1 \times L_1$ のノルムを二つのノルムの最大値で定義するとき、

$$\begin{aligned}\|T(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - T(x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| &= \|(x_k^i - x_{k-1}^i, h_k^i - h_{k-1}^i)\| \\ &= \max\{\|x_k^i - x_{k-1}^i\|_1, \|h_k^i - h_{k-1}^i\|_1\} \\ &< \|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i\|_1 \\ &\leq \max\{\|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i\|_1, \|h_{k-1}^i - h_{k-2}^i\|_1\} \\ &= \|(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - (x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| \quad (26)\end{aligned}$$

よって T は縮小写像²⁾である。これより不動点定理²⁾(バナハの縮小写像の原理)を用いて、 j を固定した場合の関数列 $\{x_k^i\} \{h_k^i\}$ の収束性が得られる。しかしながらこの条件は厳しすぎる。なぜならこの条件式(23)が成立するためには $c > 0$ が十分小さいかまたは時間区間 $[t_0, t_f]$ が十分短いことが必要である。この議論は $\tilde{A}$ などの性質を考えない一般的なものであり、特定の環境に限定すればより緩い条件が求められるはずである。たとえば $\tilde{A}$ は線形最適フィードバックの係数行列になっている⁷⁾ので $\tilde{A}$ などの性質を考慮してもっと緩い条件を求められる。

4.3 緩い条件

まずアルゴリズム AR₁₁ の収束性の条件を求める。

(10), (11)式から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{x_k^i - x_{k-1}^i\} &= \tilde{A} \{x_k^i - x_{k-1}^i\} + \tilde{g}(x_{k-1}^i, h_k^i) \\ &\quad - \tilde{g}(x_{k-2}^i, h_{k-1}^i) \\ x_k^i(t_0) - x_{k-1}^i(t_0) &= 0\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{h_k^i - h_{k-1}^i\} &= -\tilde{A}^T \{h_k^i - h_{k-1}^i\} \\ &\quad + \tilde{y}(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - \tilde{y}(x_{k-2}^i, h_{k-2}^i) \\ h_k^i(t_f) - h_{k-1}^i(t_f) &= 0\end{aligned}\quad (28)$$

ここでつぎの仮定をする：

(A8) 行列微分方程式

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \tilde{A} \Phi(t, t_0)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I_{n \times n}$$

の解が存在し、

$$\exists M_0 > 0 \quad \forall t, r \in [t_0, t_f], t \geq r;$$

$$\|\Phi(t, r)\| \leq M_0 e^{-c(t-r)}.$$

つぎに微分方程式(27), (28)をそれと等価な積分方程式に書き換えると、つぎの2式を得る¹⁾：

$$\begin{aligned} & \{x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\} \\ &= \int_{t_0}^t \Phi(t, r) \{\bar{g}(x_{k-1}^i, h_k^i) - \bar{g}(x_{k-2}^i, h_{k-1}^i)\} dr \end{aligned} \quad (29)$$

同様に $\{h_k^i - h_{k-1}^i\}$ についても、

$$\begin{aligned} & \{h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t)\} = \\ & - \int_{t_0}^t \Phi^T(r, t) \{\bar{y}(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - \bar{y}(x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\} dr \end{aligned} \quad (30)$$

簡単のため

$$\eta_k(t) = \|x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\|$$

$$\xi_k(t) = \|h_k^i(t) - h_{k-1}^i(t)\|$$

と表わし、 $M = \max\{M_0 L_y, M_0 L_g\}$ とすると

$$\eta_k(t) \leq \int_{t_0}^t M e^{-c(t-r)} \{\eta_{k-1}(r) + \xi_k(r)\} dr \quad (31)$$

$$\xi_k(t) \leq \int_{t_0}^t M e^{-c(t-r)} \{\eta_{k-1}(r) + \xi_{k-1}(r)\} dr \quad (32)$$

(31) 式から

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \{1 - e^{-c(t-t_0)}\} \{\eta_{k-1}(t) + \xi_k(t)\} dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \{\eta_{k-1}(t) + \xi_k(t)\} dt \end{aligned} \quad (33)$$

(32) 式から

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \xi_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \{1 - e^{-c(t-t_0)}\} \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \end{aligned} \quad (34)$$

(33), (34) 式から

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} \{M/c + M^2/c^2\} \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \end{aligned} \quad (35)$$

よって

$$\begin{aligned} & \|x_k^i - x_{k-1}^i\|_1 + \|h_k^i - h_{k-1}^i\|_1 \\ & \leq \{2M/c + M^2/c^2\} \\ & \quad \cdot \{\|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i\|_1 + \|h_{k-1}^i - h_{k-2}^i\|_1\} \end{aligned} \quad (36)$$

したがって、直接空間 $L_1 \times L_1$ のノルムを各ノルムの和で定義するとき、

$$\begin{aligned} & \|T(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - T(x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| \\ & = \|x_k^i - x_{k-1}^i\|_1 + \|h_k^i - h_{k-1}^i\|_1 \\ & \leq \{2M/c + M^2/c^2\} \\ & \quad \cdot \|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i - (x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| \end{aligned} \quad (37)$$

ここで $\{2M/c + M^2/c^2\} < 1$ が成り立つためには

$$c > (1 + \sqrt{2}) \cdot M \quad (38)$$

が必要十分条件として得られる。

この条件が成り立つとき T は縮小写像となるから、アルゴリズム AR₁₁ は収束する。再び収束性の十分条件が得られた。この条件は制御区間や(10), (11)式の係数の大きさに4.2節のような厳しい制約がないという意味で緩い条件である。

つぎにアルゴリズム AR₀₁ の収束性については、積分方程式(29)式の代わりに

$$\begin{aligned} & \{x_k^i(t) - x_{k-1}^i(t)\} \\ &= \int_{t_0}^t \Phi(t, r) \{\bar{g}(x_k^i, h_k^i) - \bar{g}(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i)\} dr \end{aligned} \quad (39)$$

を用いる。(39)式から(33)式の評価式の代わりに、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \{\eta_k(t) + \xi_k(t)\} dt \end{aligned} \quad (40)$$

が得られる。 $c > M$ を仮定すれば、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/(c-M) \xi_k(t) dt \end{aligned} \quad (41)$$

が成り立つ。

(34), (41)式から、評価式(35)の代わりに、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} \{M^2/(c^2 - Mc)\} \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \end{aligned} \quad (42)$$

が成り立つ。

(41), (42)式から評価式(37)の代わりに、

$$\begin{aligned} & \|T(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i) - T(x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| \\ & \leq \{M/c + M^2/(c^2 - Mc)\} \\ & \quad \cdot \|x_{k-1}^i - x_{k-2}^i - (x_{k-2}^i, h_{k-2}^i)\| \end{aligned} \quad (43)$$

が得られる。ここで、

$$\{M/c + M^2/(c^2 - Mc)\} < 1$$

が成り立つためには、

$$c > 2 \cdot M \quad (44)$$

が必要十分である。

(44)式に相当する条件式がそれぞれ

$$c > 3 \cdot M \quad (45)$$

$$c > (3 + \sqrt{5})/2 \cdot M \quad (46)$$

与えられる。

以上の結果を整理すると、

〔収束の十分条件〕

第2章で定式化される非線形最適制御問題についてアルゴリズム AR₀₀~AR₁₁はこれによって生成される関数列 $\{x_i\}$, $\{h_i\}$ が有界であり, つぎの条件が満たされるとき収束する:

(1) 線形フィードバック係数 $\tilde{A} = A - BR^{-1}B^T S$ について⁷⁾, これが構成する閉ループの微分方程式系

$$\frac{d}{dt}x(t) = \{A - BR^{-1}B^T S\}^T x(t) \\ x(t_0) = x_i \quad (47)$$

が指数安定⁶⁾であり;

(2) その安定性を表わす式

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)x_i\| \\ \leq \|x_i\| M_0 e^{-c(t-t_0)} \quad (48)$$

の定数 M_0 , c および (10), (11) 式の非線形項のリプシッツ定数 L_g , L_y に関して

$$\text{AR}_{11} \text{ については:} \\ c > (1 + \sqrt{2}) \cdot \max\{M_0 L_g, M_0 L_y\} \quad (38)^+$$

$$\text{AR}_{01} \text{ については:} \\ c > 2 \cdot \max\{M_0 L_g, M_0 L_y\} \quad (44)^+$$

$$\text{AR}_{10} \text{ については:} \\ c > 3 \cdot \max\{M_0 L_g, M_0 L_y\} \quad (45)^+$$

$$\text{AR}_{00} \text{ については:} \\ c > (3 + \sqrt{5})/2 \cdot \max\{M_0 L_g, M_0 L_y\} \quad (46)^+$$

が成立する.

4.4 局所条件

4.3節で筆者らの提案するアルゴリズムの収束条件について定量的な考察を行った. 非線形システムに関して4.4節のような局所的でない議論を, しかも定量的に行おうとすれば, 非線形項にリプシッツ連続性などの制約を課すことはやむをえないことである.

しかし, 実際の問題では, このようなリプシッツ連続性が成り立つとは限らず, (38)式などの不等式が成り立つことを確認することは容易でない場合がある. このような場合, 議論が局所的な収束性に後退するが, アルゴリズムの実行過程での x , h が, ある x_s , h_s の近傍

$$\{(x, h) | \|x_s - x\| \leq \varepsilon_1, \|h_s - h\| \leq \varepsilon_2\}$$

に含まれることを仮定する. この近傍内の非線形項の x , h に関する微分係数が有界で, かつ x , h に関して連続であれば, 局所的なリプシッツ条件が成り立つ⁴⁾.

5. 数値計算例

筆者らの方法の有効性をいくつかの数値例を用いて検討する. 比較のためここで用いた例題を文献9)や文献10)の方法を用いて解いたが, これらの方法と比

較して, 本法ははかなりかけ離れた初期解を選択しても収束したこと, アルゴリズムが著しく簡潔であることなどにその有用性がある¹¹⁾.

[例題 1] まず状態方程式および評価関数が

$$\dot{x} = -3x + u + 0.5 \sin(x)$$

$$x(0) = 1$$

$$J = \int_0^{5.0} \{x^2 + u^2\} / 2 dt$$

である問題を考える. x , u はスカラーとする. アルゴリズム AR₁₀ のための漸化式は

$$A = -3.0, B = 1, g = 0.5 \sin(x)$$

$$Q = 1, R = 1, \rho(x, h) = -Sx - h$$

$$\tilde{g} = 0.5 \sin(x) - h$$

$$\tilde{y} = -0.5 \sin(x) S$$

$$-0.5 \cos(x) \{Sx + h\}$$

として

$$\dot{x}_k^i = \{-3.0 - S\} x_k^i \\ + 0.5 \sin(x_{k-1}^i) - h_k^i; x_k^i(0) = 1$$

$$\dot{h}_k^i = \{3.0 + S\} h_k^i \\ - 0.5 \cos(x_{k-1}^i) \{Sx_{k-1}^i + h_k^i\} \\ - 0.5 \sin(x_{k-1}^i) S; h_k^i(5) = 0$$

である. ここで局所収束性を調べるため, $|x_k^i| \leq 1$, $|h_k^i| \leq 1$ を仮定する.

まず4.2節の十分条件については, $c \geq 3.0$ であり, $(t_f - t_0) = 5$ である. その十分条件

$$e^{c(t_f - t_0)} < 2$$

は明らかに成立しない. この条件では局所収束の判定はできない.

しかし, 4.3節の十分条件は(3)式による線形フィードバック係数 S を数値積分で求めると

$$0.16 \geq S \geq 0$$

(47)式は

$$\dot{x} = (-3.0 - S)x, x(0) = 1$$

となるから

$$\|\Phi(t, r)\| \leq e^{-3.0(t-r)}$$

よって $c \geq 3.0$, $M_0 = 1$

ここで $\sin(x)$ および $\cos(x)$ が x に関してリプシッツ連続であることは, 平均値の定理からすぐわかる. そのリプシッツ定数は1である. これから $|\sin(x)|$, $|\cos(x)| \leq 1$ を用いれば, 局所的に $L_g, L_y \leq 1.0$ となることがわかる. したがって4.3節の十分条件が成り立つ. 解が $|x|, |h| \leq 1$ をみたせば少なくとも局所収束するはずである. 実際アルゴリズム AR₁₀ を実行すると繰返し4回で収束し $J = 9.53 \times 10^{-2}$ を得た. 初期近似として u_0 は -100 から $+100$ までの任意の値で収束した. 初期近似 $u_0 = \pm 100$ に対する J_0 は $2.76 \times$

10^{-4} であり, かなりかけ離れた初期解から収束している. これは局所収束であるとは考えにくい. さらに注目すべきことに, この問題は非線形項が $6.0 \sin(x)$ であっても収束した. この場合 4.3 節の十分条件からも明らかに外れている. そこで上記のように詳しく条件を調べなくても, (10) 式の線形部分が指数安定であればこのアルゴリズムを適用することができるのではないかと考え, このアルゴリズムと式の扱い方が似ている文献 9) の例題についてこのアルゴリズムを検討してみた. どの例題も線形部分については指数安定でありこのアルゴリズムを用いて解くことができた. 以下にその例を 2, 3 述べる.

〔例題 2〕 Van Der Pol の方程式

$$\dot{x}_1 = -x^2 + (1 - x_1^2)x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 3$$

と 2 次形式の評価関数

$$J = \int_0^{10} \{x_1^2 + x_2^2 + u^2\} dt$$

の最小化問題.

これも 4.2 節の条件が成立しないことは明らかである. しかし, (10) 式の線形部分が安定であるから本アルゴリズムが収束することが期待できる. 実際アルゴリズム AR₁₀ を実行すると, 評価関数値 $J=21.5$ を得た. 最初の推定解 u_0 として -100.0 から $+100.0$ までの任意の定数を与えた. その範囲のどの値でも収束した. 文献 9) の方法である LQRE の実行結果も一致する. この問題は文献 1) にならって文献 9) のものより, 制御区間を長くするなど, より解きにくいものにした.

〔例題 3〕 状態方程式

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1.4 - 0.14x_2^2)x_2 + 4u$$

$$x_1(0) = -5$$

$$x_2(0) = -5$$

と 2 次形式の評価関数

$$J = \int_0^{2.5} \{x_1^2 + u^2\} dt$$

の最小化問題.

これも 4.2 節の条件が成立しないことは明らかである. アルゴリズム AR₁₀ を実行すると, 評価関数値 $J=29.45$ を得た. 最初の推定解 u_0 として -100.0 から $+100.0$ までの任意の定数を与えた. その範囲のどの値でも収束した. LQRE の実行結果も一致する.

〔例題 4〕

$$\dot{x} = -0.2x - 10 \tanh(u)$$

$$x(0) = 5.0$$

と評価関数

$$J = \int_0^{1.0} \{10x^2 + u^2\} / 2 dt + 10x^2(1.0)$$

の最小化問題. 文献 9) では制御区間が $[0, 0.5]$ となっているが, ここでは本方法の有効性を示すため $[0, 1.0]$ とした. 最初の推定解 u_0 として -100.0 から $+100.0$ までの任意の定数を与えた. その範囲のどの初期値でも収束した. この問題は Jacobson が文献 10) で非線形性が強く解きにくい問題として, DDP の有効性を示すために用いているが, 本法を適用した結果を見る限りではそれほど難しいものとは考えられない.

以上の数値計算の結果は筆者らの提案する 3 章のような繰返しアルゴリズムが従来の勾配法のような試行的なパラメータの選択も必要なく, 準ニュートン法に見られるような煩雑な式を用いなくても, 初期近似の選択に煩わされることなく容易に解を求められるという十分有効な方法になりうることを示している. しかも, これらのかなりかけ離れた初期近似の与え方から考えて, 4 章で与えた十分条件が必ずしも満たされているとは考えられない. むしろこの結果は, 筆者らの提案するアルゴリズムが 4 章で示した収束の十分条件から外れる場合でも収束しうる実例を示している.

5. おわりに

本論文においては, 拘束のない非線形最適制御問題の数値解法に関して, 逐次近似法と不変埋め込み法を応用した 1 次アルゴリズムを提案した. そして, その収束性に関して不動点定理を用いて考察を行い,

(1) 収束性の一般的な十分条件として, 坂和と同一の条件⁵⁾が導かれた.

(2) 係数の大きさや制御区間の長さに絶対的な制約がないという意味で (1) よりも緩い定量的な条件を導いた. しかしこの十分条件から外れた場合も解が収束することは筆者らの経験したことであるが, この考察は今後の課題である.

最後に本研究について有益なご意見をいただいた慶応義塾大学理工学部数理科学科 菊池紀夫教授および防衛大学校数学物理学教室 打越敬祐講師に深謝いたします.

参考文献

- 1) 嘉納秀明: システムの最適理論と最適化, コロナ社 (1987)

- 2) シュヴァルツ：解析学，1-7，83/85，東京図書（1972）
- 3) 日野幹雄：境界値問題の解法，101/191，朝倉書店（1981）
- 4) ポントリャーギン：常微分方程式，141/165，共立出版（1984）
- 5) 坂和愛幸：最適化と最適制御，森北出版（1980）
- 6) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，248/414，計測自動制御学会（1978）
- 7) Donald M. Wiberg：Theory and Problems of State Space and Linear Systems，109/114，McGraw-Hill（1971）
- 8) 山本，杉浦：非線形制御系の可制御性，計測自動制御学会論文集，9-1，71/76（1973）
- 9) N. B. Nedeljkovic：New Algorithms for Unconstrained Non-Linear Optimal Control Problems，IEEE Trans. Automatic Control，AC-26-4，868/884（1981）
- 10) D. H. Jacobson：New Second-Order and First-Order Algorithms for Determining Optimal Control，Journal of Optimization Theory and Applications，2，No. 6，411/440（1968）
- 11) 師玉，山浦，太田：不動点定理による最適制御問題の数値解法の簡易化，電気学会全国大会論文集，1430，1904/1905（1988）