周波数依存偏差に基づくサーボ・コントローラ的设计†

古 田 勝 久*・末 長 修**

A Design of Servo Controller Based on Frequency Dependent Error

Katsuhisa FURUTA* and Osamu SUENAGA**

Recently, the linear quadratic optimization problem which is considered the frequency dependent weight of phase lead or lag characteristics in the criterion function has been studied. The motivation for introducing the frequency dependent weight is the possibility of enhancing the robustness of the control system in critical frequency bands. In practical problems, however, the control system design minimizing the quadratic criterion function considered the frequency dependent weight of more general frequency characteristics, and the tracking to the reference signal in the presence of disturbance should be considered.

This paper considers to design a servo controller for the regulation of the frequency dependent error in the presence of disturbance. The limit of a way of choosing the frequency dependent weight considered is shown. The servo controller is designed by using the augmented system incorporating the derivations of the regulated frequency dependent error. The control law is determined by minimizing the quadratic criterion function consisted of the frequency dependent error and control input which is added another frequency dependent weight restricted to disturbance and reference signal.

The proposed algorithms of the servo controller give satisfactory results in simulations.

Key Words: servo controller, frequency dependent error

1. はじめに

線形制御系設計において、2次形式評価関数を最小にする最適レギュレータ問題は、制御系を漸近安定にする制御則が唯一決定されることから、現在では一般的な手法となっている。周知のように、状態フィードバックによる最適レギュレータ(LQ制御系)はロバスト安定であるのに対して、オブザーバやカルマン・フィルタを用いた閉ループ系(LQG制御系)はロバスト安定でない。近年、Doyleら¹⁾はLTR問題と呼ばれる、LQG制御系の閉ループ特性がLQ制御系のこれと同じ特性をもつための条件を求めた。また、Doyleら²⁾、Safonovら³⁾、Steinら⁴⁾は周波数領域で与えられる不確定性に対しても有効な制御系の解析・設計手法を提案した。このような閉ループ系の周波数特性を改善する手法は、他にも H^∞ 制御理論⁵⁾に基づく制御系設計を含め多くの提案がある。これらのロバスト制御系はパラメータあるいは外乱の変化に対しては有効であった。また、Andersonら⁶⁾は2次形式評価関数の被積分項である状態および制御入力それぞれの位相遅れもしくは進みの周波数特性を有する荷重を考慮した最適レギュレータ問題を提案し、応答特性の向上などその有用性を示した。しかし、彼らの荷重は1次遅れ進み系のみしか考慮しておらず、より一般的な周波数特性を有する荷重に対する2次形式評価関数を最小にする制御系設計、さらに外乱が存在する目標値追従問題を検討する必要があった。目標値の追従特性を考慮した制御系設計においては、偏差の2次形式評価関数が有効であったが、しかし良好な応答特性を状態と制御入力の重みだけを選んで得られない場合が多い。この場合には、2乗偏差だけでなく、それに周波数領域における荷重を付与したものを評価関数の被積分項におくことにより、応答特性が望ましい制御系の設計を容易に実現できる可能性が高くなる。また、このような評価関数を最小にする制御系は、閉ループ内に動的補償器を含むので、システムのパラメ

† 第16回制御理論シンポジウムで発表(1987・6)

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 静岡大学工学部 浜松市城北 3-5-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Faculty of Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu

(Received June 3, 1988)

(Revised January 10, 1989)

ータ変化などの周波数特性の乗法的に不確定特性に対する安定性を改善することも容易にできる。

本論文では、外乱が存在する目標値追従問題において、より一般的な周波数特性を有する荷重（周波数依存荷重）を負荷した周波数依存偏差の零化のためのサーボ・コントローラ設計法を提案する。特にこの周波数依存荷重としての選び方の限界を示した。サーボ・コントローラは、周波数依存偏差の時間微分値をも組み入れた拡大系により設計する。また、制御則は周波数依存偏差および外乱と目標値により制約されるもう一つの周波数依存荷重を負荷した制御入力からなる2次形式評価関数を最小にする手法により決定する。最後に、提案するサーボ・コントローラ設計アルゴリズムが、シミュレーションにより満足な結果を与えることを示す。

2. 問題設定

本論文では、以下に記述されるシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu + d \quad (1a)$$

$$y = Cx \quad (1b)$$

ただし、 x は n 次元状態ベクトル、 u は m 次元入力ベクトル、 y は p 次元出力ベクトル、 d は n 次元外乱ベクトルであり、 $p \leq m$ とする。 A, B, C は適当な次数の行列である。 $(A, B), (C, A)$ は可制御、可観測とする。

また、外乱 d と目標値 r は、 D を微分演算子 ($D = d/dt$) とするとき、それぞれ次式を満足するものとする。

$$w_d(D)d = 0 \quad (2a)$$

$$w_r(D)r = 0 \quad (2b)$$

ただし、 $w_d(D), w_r(D)$ はモノックな D の多項式である。

ここで、 $w_d(s)$ と $w_r(s)$ の最小公倍多項式 $w(s)$ を

$$\begin{aligned} w(s) &= \text{l.c.m.}(w_d(s), w_r(s)) \\ &= s^q + \delta_{q-1}s^{q-1} + \dots + \delta_0 \\ &= \prod_{i=1}^q (s - s_i) \end{aligned} \quad (3)$$

と定義する。

つぎに、偏差 $e (= y - r)$ に負荷する周波数依存荷重 $h(D)$ は

$$h(D) = \frac{n(D)}{d(D)} \quad (4)$$

と定義される有理関数とする。ただし、多項式 $n(D)$ 、 $d(D)$ は互いに既約とし、 $d(D)$ はモノックとする。

さらに、周波数依存偏差 $z(t)$ を

$$\begin{aligned} z &= h(D)e \\ &= h(D)(y - r) \end{aligned} \quad (5)$$

と定義する。 $z(t)$ の周波数特性 $Z(j\omega)$ は、次式により、 $y(t), r(t)$ の周波数特性と関連づけられる。

$$Z(j\omega) = H(j\omega)(Y(j\omega) - R(j\omega)) \quad (4')$$

制御系の目的は、外乱の存在のもとで $z(t)$ を零化することにより、 $e(t)$ が所望の零化の過程をとるようにすることである。このような制御系設計のため、周波数依存荷重 $h(D)$ について、以下の条件が満足されていると仮定する。

1) $n(s)$ が

$$n(s) = \sum_{i=0}^{\sigma} b_i s^i \quad (6)$$

と表わされ、 σ が次式により定義されるとき、 $\sigma \leq \bar{\sigma}$ が満足する。

$$\bar{\sigma} = \min \{j | CA^{j-1}B \neq 0\} \quad (7)$$

また、 $n(s)$ は $w(s)$ と既約である。

2) $d(s)w(s)$ は

$$d(s)w(s) = s^q + \beta_{q-1}s^{q-1} + \dots + \beta_0 \quad (8)$$

と表わされる。

3) $w(s)$ の右半平面に存在するすべての零点 s_i に対して

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - s_i I & B \\ C^* & B^* \end{bmatrix} = n + p \leq n + m \quad (9)$$

となる関係が満足する。ただし

$$C^* = Cn(A) \quad (10a)$$

$$B^* = \begin{cases} 0 & (\sigma < \bar{\sigma}) \\ b_s CA^{\sigma-1}B & (\sigma = \bar{\sigma}) \end{cases} \quad (10b)$$

である。

4) すべての複素数 s_j に対して

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - s_j I \\ C^* \end{bmatrix} = n \quad (11)$$

となる関係が満足する。

3. 出力零化問題

前章の条件のもとで、以下の定理を得る。

《定理》 (2a) 式によってモデル化された外乱の存在のもとで、(5) 式によって与えられる周波数依存偏差を零化するための目標値追従問題は、次式に示す拡大系における出力零化問題に変換される。

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a w(D)u \quad (12a)$$

$$z = C_a x_a \quad (12b)$$

ただし

$$\begin{aligned} x_a^T &= [w(D)x^T, z^{(q-1)T}, \dots, z^T] \\ A_a &= \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C^* & -\beta_{q-1}I & -\beta_{q-2}I & \dots & -\beta_0 I \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_a^T = [B^T, B^{*T}, 0, \dots, 0]$$

$$C_a = [0, \dots, 0, I]$$

である。なお、 T は転置、 I は単位行列を表わす。

ここで、前章の条件4)が満足されるなら、 (C_a, A_a) は可観測となる。 (A_a, B_a) の可制御性については自明である。

(証明) (1a)式の両辺に $w(D)$ を掛けると、(2a)式より外乱 d が消去され

$$w(D)\dot{x} = Aw(D)x + Bw(D)u \quad (13)$$

となる。同様に、(5)式に $d(D)w(D)$ を掛けると目標値 r が消去され、さらに(1b)、(4)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} d(D)w(D)z &= n(D)w(D)y \\ &= Cn(D)w(D)x \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式の右辺は、(6)式より

$$\begin{aligned} Cn(D)w(D)x &= C \left(\sum_{i=0}^{\sigma} b_i D^i \right) w(D)x \\ &= C \sum_{i=0}^{\sigma} b_i w(D)x^{(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

ここで、(13)式の i 階時間微分は

$$w(D)x^{(i)} = A^i w(D)x + \sum_{j=1}^i A^{i-j} B w(D)u^{(i-j)} \quad (16)$$

であるから、(15)式の右辺は

$$\begin{aligned} C \sum_{i=0}^{\sigma} b_i w(D)x^{(i)} &= C \sum_{i=0}^{\sigma} b_i \left\{ A^i w(D)x + \sum_{j=1}^i A^{i-j} B w(D)u^{(i-j)} \right\} \\ &= C \sum_{i=0}^{\sigma} b_i A^i w(D)x \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\sigma} b_i \left\{ \sum_{j=1}^i C A^{i-j} B w(D)u^{(i-j)} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。

よって、(6)、(7)、(10)式より、(15)式の右辺は

$$= C^* w(D)x + B^* w(D)u \quad (18)$$

となる。

以上より、(12)式は(13)式および(14)式の左辺に(8)式を代入した次式

$$\begin{aligned} d(D)w(D)z &= (D^q + \beta_{q-1}D^{q-1} + \dots + \beta_0)z \\ &= z^{(q)} + \beta_{q-1}z^{(q-1)} + \dots + \beta_0 z \end{aligned} \quad (19)$$

と(18)式から得られる。

Q. E. D.

いま、前章の条件3)が満足されるなら、 $z(t)$ は零化されることが知られている⁷⁾。

$z(t)$ をゼロとするコントローラの設計法については、次章で述べる。

4. 2次形式評価関数およびサーボ系設計

(12)式に示された拡大系において、2次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (\|z\|_R^2 + \|w(D)u\|_R^2) dt \quad (20)$$

を最小にする最適制御則

$$w(D)u = -R^{-1}B_a^T P x_a \quad (21)$$

は、(1)式で与えられるシステムのロバスト・サーボ系となる。なお、ロバスト・サーボ系の定義は Davison^{7),8)}の定義による。ただし、 P はRiccati方程式

$$A_a^T P + P A_a + C_a^T Q C_a - P B_a R^{-1} B_a^T P = 0 \quad (22)$$

の正定対称解である。

x_a の定義から、(21)式は

$$\begin{aligned} w(D)u &= [F_0, F_1, \dots, F_i, \dots, F_q] x_a \\ &= F_0 w(D)x + F_1 z^{(q-1)} + \dots + F_q z \end{aligned} \quad (23)$$

となる。ただし、 F_i は以下のように定義する。

$$[F_0, F_1, \dots, F_i, \dots, F_q] = -R^{-1}B_a^T P \quad (24)$$

制御則 u は、(23)式の両辺を $w(D)$ で割り、書き直した

$$u = F_0 x + F_1 \varepsilon^{(q-1)} + F_2 \varepsilon^{(q-2)} + \dots + F_q \varepsilon \quad (25)$$

により得られる。ただし、 ε を

$$w(D)\varepsilon = z \quad (26)$$

と定義する。

(25)式より、サーボ・コントローラはオブザーバを用いずに構成され、いま $q-1 \leq \bar{q}$ なる関係が満足されるならば、制御系はFig. 1となる。満足されない場合は、 $\varepsilon^{(q)}$ より微分器を用いて $\varepsilon^{(q-1)}$ までを求め、制御則を実現し、制御系を構成すればよい。

また、 x_a は(12)式における出力 z と入力 $w(D)u$ からオブザーバにより推定可能である。このときの制御系は、Fig. 2となる。

Fig. 1より、制御系は状態フィードバックと閉ループ内に挿入された動的補償器より構成される。したがって、動的補償器により、システムのパラメータ変化などの周波数特性の乗法的不確定性に対する安定性の改善が計られ、また(20)式で与えられる2次形式評価関数からも自明であるように、たとえば、偏差 e の低周波数帯域に荷重を大きく負荷するような周波数依存荷重 $h(D)$ を設定すれば、 e の低周波数成分が最小となり、応答性の改善も期待できる。しかし、動的補償器は(24)式で与えられる係数 F_i ($i=1, \dots, q$)を含むため、設計段階で任意に決定することはできない。よって、望ましい安定性、応答特性が得られる $h(D)$ の決定方法は現在のところ試行錯誤的である。

Fig. 1 Structure of proposed servo controller

Fig. 2 Structure of proposed servo controller using observer

5. 数 値 例

本論文で提案した設計法の有用性を示すため、周波数依存荷重を種々変化させた場合の数値例を示し、周波数依存荷重を考慮しない場合と比較する。

システムは

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + d \quad (27a)$$

$$y = [1 \ 0]x \quad (27b)$$

とする。

また、外乱 d は以下のようにモデル化されると仮定する。

$$Dd = 0 \quad (28a)$$

目標値 r をステップ入力すると次式を得る。

$$Dr = 0 \quad (28b)$$

よって

$$w(D) = D \quad (29)$$

である。

まず、周波数依存荷重を

$$h(D) = \frac{D+5}{D+2} \quad (30)$$

とした場合の周波数依存偏差の零化問題を示す。

このとき、拡大系はつぎのように与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Du \quad (31a)$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} \quad (31b)$$

2次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (10\|z\|^2 + \|Du\|^2) dt \quad (32)$$

を最小にする制御則 Du はつぎのように与えられる。

$$Du = -[0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} 15.76 & 7.377 & 3.967 & 9.215 \\ 7.377 & 4.189 & 1.399 & 3.162 \\ 3.967 & 1.399 & 1.528 & 4.033 \\ 9.215 & 3.162 & 4.033 & 12.49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} \quad (33)$$

すなわち

$$u = F_1 x + F_2 \varepsilon^{(1)} + F_3 \varepsilon \quad (34)$$

$$D\varepsilon = z \quad (35)$$

ただし

$$\begin{aligned} [F_1, F_2, F_3] \\ = -[7.377, -4.189, -1.399, -3.162] \end{aligned}$$

である。

この制御則による系のステップ応答波形を Fig. 3 に示す。

また、周波数依存荷重を

Fig. 3 Step responses of proposed servo system ($Q=10, R=1$)

$$h(D) = \frac{D+2}{D+5} \quad (36)$$

とした場合の応答波形も Fig. 3 に併記する。

ただし、この場合の拡大系は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Du \quad (37a)$$

$$z = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} \quad (37b)$$

となり、(32)式で与えられる 2 次形式評価関数を最小にする制御則 Du は

$$Du = [-3.267 \ -2.790 \ -0.6258 \ -3.162] \begin{bmatrix} Dx \\ z^{(1)} \\ z \end{bmatrix} \quad (38)$$

と与えられる。

最後に、周波数依存荷重を考慮しない場合の応答波形についても Fig. 3 に併記する。

ただし、この場合の拡大系は

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} Dx \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dx \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} Du \quad (39a)$$

$$e = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} Dx \\ e \end{bmatrix} \quad (39b)$$

となり、2 次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (10\|e\|^2 + \|Du\|^2) dt \quad (40)$$

を最小にする制御則 Du は

$$Du = [-5.735 \ -3.387 \ -3.162] \begin{bmatrix} Dx \\ e \end{bmatrix} \quad (41)$$

と与えられる。

Fig. 3 より、周波数依存荷重の変化により、応答波形は種々の過程をとることがわかる。前述のように、偏差 e の低周波数帯域に荷重を大きく負荷する、前者の周波数荷重を選んだ場合、応答の速応性が改善される。後者の場合は応答は遅くなるものの、十分な安定余有（ゲイン余有無限大、位相余有約 68° ）が得られた。なお、前者の場合はゲイン余有約 24 dB、位相余

有約 57° であった。

なお、応答特性は拡大系(12)において極配置を適用した制御則によれば改善される⁹⁾。

6. む す び

本論文では、外乱の動特性が周波数特性により与えられている目標値追従問題において、2 次形式評価関数に周波数依存荷重を考慮した最適サーボ系設計法を提案した。

本設計法により得られる拡大系は、考慮する荷重が高次の周波数特性となるほど、高次系になるという問題が存在するものの、提案した設計法は応答特性、安定余有の改善などに有用であることを数値例により示した。

参 考 文 献

- 1) J. C. Doyle and G. Stein: Robustness with Observers, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24-4**, 607/611 (1979)
- 2) J. C. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 4/16 (1981)
- 3) M. G. Safonov, A. J. Laub and G. L. Hartmann: Feedback Properties of Multivariable Systems: The Role and Use of the Return Difference Matrix, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 47/65 (1981)
- 4) G. Stein and M. Athans: The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32-2**, 105/114 (1987)
- 5) たとえば B. A. Francis: Lecture Notes in Control and Information Sciences 88: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag (1987)
- 6) B. D. O. Anderson, J. A. Gibson and H. R. Sirisena: Phase Lag and Lead Weighting in Linear-Quadratic Control, Optimal Control Applications & Methods, **6**, 249/263 (1985)
- 7) E. J. Davison and A. Goldenberg: Robust Control of a General Servomechanism Problem, Automatica, **11**, 461/471 (1975)
- 8) E. J. Davison: The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Multivariable Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-21-1**, 25/34 (1976)
- 9) 古田, 末長: 周波数特性と極配置を考慮したサーボ系設計, 第 16 回制御理論シンポジウム資料, 105/110 (1987)