ピボットングによる根軌跡の計算アルゴリズム

足立 紀彦*・西岡 勝博**・竹内 敬治**

A Pivoting Algorithm for Root-Loci

Norihiko ADACHI*, Katsuhiro NISHIOKA** and Keiji TAKEUCHI**

A numerical algorithm to obtain root-loci of linear time-invariant control systems is proposed. The algorithm is based on the homotopy method to solve general nonlinear equations. The complex plane is divided into small triangles. Each vertex of the triangles is obtained sequentially. The sequence of specially labelled triangles gives an approximation of the root-loci. The procedure to find triangles with a special set of labels is called pivoting. Two propositions are given to validate the algorithm. The first one guarantees that the algorithm never fails in the vicinity of branching points of root-loci if the size of the triangulation of the complex plane is taken sufficiently small. The second proposition gives the precision of the approximation. The precision depends mainly on the size of triangles. Finally, the efficiency of the method is shown by several examples.

Key Words: root locus method, computational method, homotopy method, pivoting algorithm

1. はじめに

一入力一出力系のための根軌跡法は線形時不変フィードバックシステムを設計するための確立された価値ある技法である。根軌跡法を利用するためには、ゲイン $k \in [0, K]$ に対する多項式方程式 $f(s, k) = 0$ の解の集合を見つけないといけない。ここで s は複素数、 k は実数である。この問題に対して、幾何学的手法や解析的手法^{1), 2)}が提案されてきた。しかしながら、これらのアプローチは根軌跡法を有効に利用するには、まだ十分ではない。パラメータの値を固定すれ

ば、この問題は一つの多項式のすべての根を求めることに帰着され、現存する代数方程式を解くいかなる方法をも用いることが可能である。しかし、このアプローチもまた時間がかかりすぎたり、分枝点の回りで困難が生じたりする。根軌跡問題に対しては、より効果的なアプローチが要求される。

微分方程式を用いたホモトピー法を導入することによって Pan & Chao³⁾は根軌跡を計算するのに有効な方法を提案した。Bien & Lee⁴⁾はベアストウ法を加味することによってこれを改良した。さらに Shu & Bien⁵⁾は時間遅れを含むシステムに適用した。Pan & Chao 法やこれと類似の方法は根軌跡の分枝点での困難さを完全に避けることはできない。本手法は複素平面の単体分割あるいは三角形分割と人工的なラベリングに基づいたものである。まず、関係する領域を小さな単体に分けそれらのおのおのの三角形の頂点に一つずつラベルを付ける。このとき、特別なラベルをもつ一連の単体の集合が連続的に得られる。この処理を“ピボットング”と呼ぶ。ラベリング規則を、この一連の順序づけられた集合が $f(s, k)$ の一つのホモトピーパスの近似となるように構成する。一般の非線形方程式の数多くのラベリング規則と三角形の分割が知られている。代数方程式に対して Kuhn^{6), 7)}は非常に単純でしかも有効なラベリング規則を提案し、多項式のすべての根を得るのに適用した。Adachi, Hara & Tokumaru⁸⁾は Kuhn の手法をいくつか修正して多変数根軌跡のためのロバストなピボットング法を提案した。しかしながら一入力一出力システムの根軌跡問題に対しては、より簡単なラベリング規則とピボットング処理が構成できるのである⁹⁾。本報告ではこのピボットング法についてその理論的基礎となるいくつかの結果を示す。

2. 根軌跡とラベリング⁹⁾

Fig. 1 に示すような線形フィードバック制御シス

* 新潟大学工学部 新潟市五十嵐2の町 8050

** 舞鶴工業高等専門学校 舞鶴市宇白屋 234

* Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata

** Maizuru College of Technology, Maizuru

(Received August 23, 1988)

(Revised December 23, 1988)

Fig. 1 Feedback control system

テムを考える。本システムにおいては、閉ループ伝達関数はつぎのように示される。

$$Y(s)/X(s) = G(s)/(1+G(s)H(s)) \quad (1)$$

開ループ伝達関数を次式で表わすことにする。

$$G(s)H(s) = kQ(s)/P(s) \quad (2)$$

ここで、 $s \in C$ (複素数)。 $P(s)$, $Q(s)$ は $s \in C$ に対して $n > r$ なる n 次と r 次の多項式である。開ループゲインは $k \in [0, \infty]$ であり、閉ループ極はつぎの特性方程式の根である。

$$f(s, k) \equiv P(s) + kQ(s) = 0 \quad (3)$$

ここで、根軌跡を求めることは (3) 式の根を k が零から無限大に変化するに従い複素平面上に追跡することである。根軌跡に対する一般的な性質はすでによく知られており、つぎのように要約される。

- (1) 根軌跡は実軸に対して対称である。
- (2) 根軌跡は $k=0$ に対応する開ループ伝達関数の極から出発し、その伝達関数の零点で終るか、あるいは無限遠に行く。
- (3) 分枝の数は特性方程式の次数に等しい。
- (4) 根軌跡の $(n-r)$ 個の分枝は無限大に延びる。
- (5) 分枝は、しばしばお互いに交差する。そして交差する点を '特異点' または '分枝点' あるいは '分離点' と呼んでいる。

複素関数 $K(s)$ を次式のように定義する。

$$K(s) = -P(s)/Q(s) \quad (4)$$

関数 $K(s)$ は領域 $C - Q^{-1}(0)$ 上で解析的である。ここで、 $Q^{-1}(0) \equiv \{s: Q(s) = 0\}$ 。 $k \in R$ (実数) に対して根軌跡 Γ はつぎのように表現できる。

$$\Gamma = \{s \in C - Q^{-1}(0); \operatorname{Im}(K(s)) = 0\} \cup Q^{-1}(0). \quad (5)$$

ここで $\operatorname{Im}(K(s))$ は $K(s)$ の虚数部である。 $k \in [0, \infty]$ に対して、 $\Gamma^+ \subset \Gamma$ である根軌跡 Γ^+ は次式のように表現できる。

$$\Gamma^+ = \{s \in C - Q^{-1}(0); (\operatorname{Im}(K(s)) = 0) \cap (\operatorname{Re}(K(s)) \geq 0)\} \cup Q^{-1}(0). \quad (6)$$

ここで、 $\operatorname{Re}(K(s))$ は $K(s)$ の実数部である。 Γ^+ は n 個の分枝よりなる。 n 個の分枝の集合を見つけるために、まず、つぎのようなラベリング規則を定義する。

$$L(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } \operatorname{Im}(K(s)) \geq 0 \\ 2 & \text{if } \operatorname{Im}(K(s)) < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Fig. 2 Mapping from s-plane to K-plane

ここに、 $L(s)$ は $Q(s) \neq 0$ なる C の点 s に対して定義される。 $P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0) = \emptyset$ と仮定しよう。ここに、 $P^{-1}(0) \equiv \{s: P(s) = 0\}$ 。以上によりつぎに述べる性質が容易に得られる。

性質 1: Γ は n 個の連続曲線よりなる。分枝点の集合は孤立点の集合である。それゆえ、分枝点の数は任意のコンパクト集合内において有限である。

性質 2: もし任意の 2 点 $s_1 \in C$, $s_2 \in C$ に対して $L(s_1) = 1$ かつ $L(s_2) = 2$ ならば点 s_1 と s_2 を結ぶ線分は Γ と交わる。すなわち、 $\Phi = \{z \in C; z = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_2, \lambda \in [0, 1]\}$ ならば、 $\Phi \cap \Gamma \neq \emptyset$ である。

性質 3: z を $P(z) \neq 0$ かつ $Q(z) \neq 0$ である Γ 上の点であるとする。十分小さな値を $\varepsilon > 0$ に対して、 $z \in \Gamma$ の近傍を $U(z; \varepsilon) = \{s \in C; |s - z| < \varepsilon\}$ によって記述する。もしゲインの増加する方向に Γ を見ると、 Γ は $U(z; \varepsilon)$ を左側にラベル $L(s) = 1$, 右側に $L(s) = 2$ の二つの集合に分ける。

関数 $K(s)$ によって s -平面から K -平面への写像とラベリングの関数を Fig. 2 に示す。性質 1 は $K(s)$ を構成する多項式 $P(s)$ と $Q(s)$ の多項式の次数がおのおの有限次数であることから容易に得られる。同様に、性質 2 は中間値の定理から導くことができる。性質 3 は等角写像の性質から明らかである。

3. 三角形分割とピボッティング

根軌跡の問題は (6) 式の Γ^+ を追跡することにある。明らかに Γ^+ は方程式 $f(s, k) = 0$ のホモトピーパスである。

性質 1, 2, 3 から、もし $U(z_i; \varepsilon)$, $z_i \in \Gamma^+$, $i = 0, 1, 2, \dots$ を追跡すると、われわれは根軌跡の近似を順序よく得ることができる。したがって、与えられた $h > 0$ に対して複素平面 C の領域 Ω を Fig. 3 に示されるように三角形に分割する。おのおのの三角形の辺の長さは、 $h, h, \sqrt{2}h$ である。 C 上のこの三角形の分割を $T(h)$ によって記述する。ある三角形の頂点を v_1, v_2, v_3 と仮定する。そしておのおのの頂点に対し一つずつ正数のラベルを付ける。明らかに、おのおのの頂点のラベルは $i = 1, 2, 3$ に対して $L(v_i) = 1$ また

Fig. 3 Triangulation of s -plane and directed arc of graph V

は $L(v_i)=2$ である。もし、ある三角形において、ラベル 1 をもつ頂点およびラベル 2 をもつ頂点が存在するとき、その三角形を“特別ラベル付三角形”と名づける。性質 2 から、ある“特別ラベル付三角形”の二つの辺は Γ と交差することは明らかである。さらにそこで、 $T(h)$ の特別ラベル付三角形を節とする有向グラフを定義する。一つの弧は、もし二つの節がラベル 1 と 2 の付いた辺で隣接しているとき、これらの節を結ぶことになる。もし左側にラベル 1 の頂点をもち右側にラベル 2 の頂点をもつ辺に弧が交わるならば、この弧は Fig. 3 に見られるように節から出る。この辺を $ed.(1,2)$ と記す。同様に、ある節には必ずその節に入る弧がただ一つ存在する。この弧と交わる辺を $ed.(2,1)$ と記す。これらの辺は、“特別ラベル付三角形”の頂点のラベルを時計回りに探索することにより得られる。グラフ V の一つの成分は (i) 有限個の節をもつか、(ii) 無限個の節をもつか、である。(i) の場合は上に述べたことよりその成分はループである。(ii) の場合はその成分に対応する根軌跡 (負のゲインも含めて) の分枝は複素面上の無限遠点から無限遠点に至る。おのこの $j \in N_n, N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、開ループ伝達関数の極の十分近くに特別ラベル付三角形 $\tau^{0j} (\tau^{0j} \neq \tau^{0i}, (i \neq j))$ が存在することが次節の命題によって保証される。したがって、三角形分割の大きさ h を十分小さくすれば V は $\tau^{0j}, i \in N_n$ を含む n 個の成分 $V_1, V_2, \dots, V_n$ よりなることがわかる。ある V_i に対して τ^{d+1j} を V_j の τ^{0j} より始まる $d+1$ 番目の節とする。 τ^{dj} から τ^{d+1j} を決定する操作をピボッティングと呼んでいる。Fig. 3 の辺 ω_j^d は τ^{dj} から出る有向弧に対応しているので、性質 2 から、もし V_j に対する ω_j^d が見つければ、根軌跡の近似点が $\sqrt{2}h$ の精度以下で順番に得られる。このことは、 ω_j^d が $Q(s)$ の零点より十分離れている限り、おのこの $d(d=0, 1, \dots)$ と任意の点 $\tilde{z}^{dj} \in \omega_j^d$ に対して、近傍 $U(\tilde{z}^j; \sqrt{2}h)$ が Γ^+ 上の点をかならず含んでいることによる。 $j=1, 2, \dots, n$ に対して点列 $\{\tilde{z}^{dj}\}_{d=0}^{\infty}$

は Γ^+ の近似の分枝を構成する。

4. 命 題

本章においては、pivoting によって根軌跡の近似が得られることの理論的基礎となる命題を示す。まず、 C 上の点が分枝点あるいは開ループ伝達関数の極または零点であるときそれらを“特異点”と総称する。特異点の数は有限個である。たとえば特異点の数を s 個としてそれらを $p_1, p_2, \dots, p_s \in C$ とする。各 p_i の適当な近傍 D_i をとり $\Gamma_{\text{sin}}^+ = \Gamma^+ \cap \left(\bigcup_{i=1}^s D_i \right)$, $\Gamma^+ = \Gamma_{\text{sin}}^+ \cup \Gamma_{\text{con}}^+$, $\Gamma_{\text{sin}}^+ \cap \Gamma_{\text{con}}^+ = \emptyset$ によって Γ_{sin}^+ , Γ_{con}^+ を定義する。 Γ_{sin}^+ は特異点に近い部分、 Γ_{con}^+ は特異点とそれに近い部分を除いた残りの部分を示す。命題 1 は Γ_{sin}^+ の部分に対して、ピボット操作によって根軌跡の近似が得られることを示し、命題 2 は Γ_{con}^+ の部分に対する近似の精度を与える。

【命題 1】 z を Γ^+ のある分枝点、すなわち $\text{Im}(K(s))=0$ の p 重根であるとする。 z_0 を z のもっとも近い格子点であるとする。 $D_m(z_0; h)$ をその四隅が $z_0 \pm mh \pm jmh$, ($j^2 = -1$) である正方形であるとする。ただし m は正の整数である。 $\partial D_m(z_0; h)$ は $D_m(z_0; h)$ の境界であり、反時計方向に向きづけられているものとする。

$$m > 2p/\pi + 1/2 \quad (8)$$

となる正の整数とする。このとき十分小さな h をとると、 $\partial D_m(z_0; h)$ 上の $T(h)$ の辺で反時計回りに (1, 2) または (2, 1) とラベルがついたものがそれぞれ p 個存在する (証明は付録 2 参照)。

定義によって、 Γ_{con}^+ はお互いに交わらない有限個の連続な曲線の集合である。したがって h を十分小さくすれば $T(h)$ の任意の三角形は Γ_{con}^+ と交わりとしても Γ_{con}^+ のただ一つの曲線と交わることは明らかである。このときつぎの命題が成立する。

【命題 2】 v_1, v_2, v_3 を $T(h)$ のある特別ラベル付三角形 τ^{dj} の頂点とする。 $L(v_i)=i (i=1, 2), L(v_3)=2$ とする。 Γ_{con}^+ 上の点 $z^d \in [v_1, v_2]$, $z^{d+1} \in [v_1, v_3]$ ($[v_i, v_j]$ は端点を v_i, v_j とする辺) が存在し、 τ^{dj} は z^d, z^{d+1} を通る Γ_{con}^+ の一つの曲線とのみ交わっているとする。この曲線の z^d, z^{d+1} を端点とする部分を $\Gamma_{\text{con}}^+[z^d, z^{d+1}]$ とする。このとき任意の $z \in \Gamma_{\text{con}}^+[z^d, z^{d+1}]$ に対して十分小さな h をとると $|z - v_i| < \sqrt{10}/2 \cdot h, i=1, 2, 3$ が成立する (Fig. 4 参照)。

(証明) $K(z^d)=k^d, K(z)=k, K(z^{d+1})=k^{d+1}$ となると $k^d < k < k^{d+1}$ である。したがって

$$\arg \{ (K(z) - K(z^d)) / (K(z) - K(z^{d+1})) \}$$

Fig. 4 Approximation of Γ^+_{con} by triangles

$$= \arg \{(k - k^d)/(k - k^{d+1})\} = \pi \quad (9)$$

ただし $\arg$ は偏角を示す。そこで、 $K(s)$ をつぎのように表現する

$$K(s) = a_0 \left\{ \prod_{j=1}^n (s - \bar{z}_j) \right\} / \left\{ \prod_{i=1}^r (s - \bar{z}_{0i}) \right\} + k \quad (10)$$

$\bar{z}_j, j \in N_n$ はゲイン k のときの特性方程式の根、 $\bar{z}_{0i}$ ($i=1, \dots, r$) は開ループ伝達関数の零点である。 $\bar{z}_1 = z, n \geq 2, r \geq 1$ である。このとき、

$$\begin{aligned} & \arg \{(K(z) - K(z^d))/(K(z) - K(z^{d+1}))\} \\ &= \arg \{(k - K(z^d))/(k - K(z^{d+1}))\} \\ &= \arg \left(\frac{\prod (z^d - \bar{z}_j) / \prod (z^d - \bar{z}_{0i})}{\prod (z^{d+1} - \bar{z}_j) / \prod (z^{d+1} - \bar{z}_{0i})} \right) \\ &= \arg \left(\frac{z^d - z}{z^{d+1} - z} \right) + \sum_{j=2}^n \arg \left(\frac{z^d - \bar{z}_j}{z^{d+1} - \bar{z}_j} \right) \\ & \quad + \sum_{i=1}^r \arg \left(\frac{z^{d+1} - \bar{z}_{0i}}{z^d - \bar{z}_{0i}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$|v_i - v_j| \leq \sqrt{2}h$ ($i, j=1, 2, 3$) なので $|z^d - z^{d+1}| \leq \sqrt{2}h$ ここで h はつぎの不等式を満足するように十分小さく選ばれているものとする。

$$\begin{aligned} h \leq \min_{\substack{2 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq r}} & \left\{ \frac{|z^d - \bar{z}_j|}{2(n-1)\sqrt{2}}, \frac{|z^{d+1} - \bar{z}_j|}{2(n-1)\sqrt{2}}, \frac{|z^d - \bar{z}_{0i}|}{2r\sqrt{2}}, \right. \\ & \left. \frac{|z^{d+1} - \bar{z}_{0i}|}{2r\sqrt{2}} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

したがって

$$\begin{aligned} |z^d - \bar{z}_j| &\geq 2(n-1)\sqrt{2}h \geq \sqrt{2}h \geq |z^d - z^{d+1}| > 0 \\ |z^{d+1} - \bar{z}_{0j}| &\geq 2r\sqrt{2}h \geq \sqrt{2}h \geq |z^d - z^{d+1}| > 0 \end{aligned}$$

補題 2 (付録 1 参照) より

$$\sum_{j=2}^n \arg \left(\frac{z^d - \bar{z}_j}{z^{d+1} - \bar{z}_j} \right) \leq \frac{\pi}{2} \frac{(n-1)\sqrt{2}h}{2(n-1)\sqrt{2}h} = \frac{\pi}{4} \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^r \arg \left(\frac{z^d - \bar{z}_{0i}}{z^{d+1} - \bar{z}_{0i}} \right) \leq \frac{\pi}{2} \frac{r\sqrt{2}h}{2r\sqrt{2}h} = \frac{\pi}{4} \quad (14)$$

したがって $\arg \{(z^d - z)/(z^{d+1} - z)\} \geq \pi/2$, すなわち z は Fig. 4 の図より斜線部の領域に含まれなければならない。このとき

$$\max |v_i - z| < (\sqrt{10}/2)h \quad (15)$$

命題 1 からつぎのようなことがいえる。 $j=1, 2, \dots$,

Step 0. $\bar{z}_j$, $j \in N_n$ の回りの τ^{0j} に対応する v_1 , v_2 , v_3 を見つける. $\bar{z}^{-1j} := \bar{z}_j$, $j \in N_n$, $d := 0$ かつ $j := 1$

Step 1. 次式から Γ^+ 上の近似点 $\bar{z}^{dj}$ を求める.

$$\bar{z}^{dj} = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2, \quad (17)$$

ここで $\lambda = \text{Im}(K(v_1)) / \{\text{Im}(K(v_1)) - \text{Im}(K(v_2))\}$

Step 2. 点 $\bar{z}^{dj}$ での近似ゲイン $\tilde{k}^{dj}$ の値を計算する.

$$\tilde{k}^{dj} = \text{Re}(K(\bar{z}^{dj})) \quad (18)$$

Step 3. If $\tilde{k}^{dj} > k_{\max}$ ならば Step 7 へ

If $\tilde{k}^{dj} < 0$ ならば Step 7 へ

If $|Q(\bar{z}^{dj})| < \varepsilon_0$ ならば Step 7 へ

If $\bar{z}^{dj}$ が Ω を越えると Step 7 へ

Step 4. $\bar{z}^{dj}$ と $\bar{z}^{d-1j}$ を直線で結ぶ

Step 5. τ^{d+1j} を ed. (v_1, v_2) をもつ τ^{dj} と異なる三角形とする. new v_3 を v_1 と v_2 から異なる τ^{d+1j} の頂点とする.

If $L(\text{new } v_3) = 1$, $v_1 := \text{new } v_3$

If $L(\text{new } v_3) = 2$, $v_2 := \text{new } v_3$

Step 6. $d := d+1$, Step 1 へ戻る.

Step 7. If $j = n$, STOP

そうでなければ, $j := j+1$, $d := 0$ Step 1 へ戻る.

なお, Step 2 における近似値 $\tilde{k}$ は直線補間により得ることができる. しかし, 辺上のより正確な $\tilde{k}$ の値は, ニュートン法または他の方法により求められる. しかしながら, 根軌跡法においては一般に $\tilde{k}$ の精度は重要でない.

6. 数 値 例

本章において, Pivoting 法の有効性を示すために, 数種類の計算例を示す. 開ループ伝達関数を $G(s)H(s)$ のように定義する. 計算は 16 bit の NEC-PC-9801 VM マイクロコンピュータにより, BASIC-インタプリタを用いて行った. 以下の図においては $\times$ は開ループの極, $\circ$ は零点を示す.

計算例 1: 開ループ伝達関数は

$$G(s)H(s) = -\frac{k(s+1.04)(s-0.187)}{s(s+1)(s+4)(s^2+7)} \quad (20)$$

この例においては, 根軌跡の分枝はお互いに非常に接近している. そのため h の選択には注意が必要である. Fig. 6(a) に計算した根軌跡を示す. この問題では $P(s)$ の零点は $0, -1, -4, \pm\sqrt{-7}$ であり $Q(s)$ の零点は $0.187, -1.04$ である. パラメータは $h = 0.125$, $\varepsilon_0 = 10^{-10}$, $k_{\max} = 100$, $\Omega = [-5, 3] \times [-3, 3]$. ピボッティング総数は 208, cpu-time は 43 s である.

計算例 2: 開ループ伝達関数は

Fig. 6 (a) Root loci of example 1, (b) Root loci of example 2, (c) Root loci of example 3, (d) Root loci of example 4

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s^2+2s+19)} \quad (21)$$

この例は Pann & Chao³⁾ から取ったものである. 計算した根軌跡を Fig. 6(b) に示す. この問題では, $f(s, k) = s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 40s + 19 + k$. $dK/ds = 0$ から, $s = -1, -1 \pm \sqrt{-3}$ が分枝点である. $P(s)$ の零点は $-1, -1 \pm \sqrt{-18}$. パラメータは $h = 0.125$, $\varepsilon_0 = 10^{-10}$, $k_{\max} = 10^{10}$, $\Omega = [-5, 3] \times [-5, 5]$. ピボッティング総数は 243, cpu-time は 34 s である.

計算例 3: 開ループ伝達関数は

$$G(s)H(s) = \frac{ks^2}{(s^2+1.2s+4.36)(s+0.5)} \quad (22)$$

根軌跡を Fig. 6(c) に示す. この例は 2 次遅れ系のサーボシステムの例として取り上げた. この問題に対しては, $P(s) = 0$ は $-0.5, -0.6 \pm \sqrt{-2}$ の零点をもち $Q(s)$ の零点は $0, 0$ である. 零点と極とが非常に接近しており格子サイズ h の選択には注意を要する. パラメータは $h = 0.0625$, $\varepsilon_0 = 10^{-10}$, $k_{\max} = 10^{10}$, $\Omega = [-5, 1] \times [-3, 3]$, cpu-time は 37 s である.

計算例 4: 開ループ伝達関数は

$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+3)(s^2+2s+1)(s^2+4s+5)(s^2+6s+10)} \quad (23)$$

根軌跡を Fig. 6(d) に示す. 出発点は $-1, -1 \pm$

$\sqrt{-1}$, $-2 \pm \sqrt{-1}$, -3 , $-3 \pm \sqrt{-1}$. $dK/ds \equiv -8(s+2)^7 - 12(s+2)^3$ であるので, 5 個の分離点をもつ. 特に, $s = -2$ は高次の特異点である. パラメータは $h = 1/16$, $\varepsilon_0 = 10^{-10}$, $k_{\max} = 10^{10}$, $\Omega = [-4, 0] \times [-2, 2]$. ピボティング総数は 304, cpu-time は 69 s である.

7. おわりに

根軌跡を計算する一手法を提案した. 本手法は簡単なホトピー法に基づき, 根軌跡を近似する. この方法はつぎのような特徴をもっている.

(1) 単純性: ラベリング法は他の知られている方法に比べ非常に簡単である.

(2) 効率性: 計算量は主に格子サイズに依存している. 根軌跡法のグラフィックの目的のためには根軌跡の概略がわかればよく精度はそれほど問題とならない.

(3) 正確性: 根軌跡は任意の与えられた精度で計算できしかもそれは主に格子サイズ h によって決定される.

(4) ロバスト性: これは Pivoting 法の性質から得られている. 三角形分割の大きさが十分小さければ本アルゴリズムは失敗することはない. また計算の主要部分は関数の正負の判定にあり, 計算誤差などによる影響は少ない.

なお, 本手法は命題 1 および 2 が成立するための格子サイズ h の評価, 初期値の選び方などについての修正で時間遅れを含む線形システムに適用可能となる.

参 考 文 献

- 1) V. Krishnan: Semi-Analytic Approach to Root Locus, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-11-1**, 102/108 (1966)
- 2) S.M. Shinnars: Modern Control System Theory and Application, Addison Wesley 7011 (1972)
- 3) C.T. Pan and K.S. Chao: A Computer-Aided Root-Locus Method, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-23-5**, 856/860 (1978)
- 4) Z. Bien and J. Lee: A Note on a Computer-Aided Root-Locus Method, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-3**, 246/247 (1986)
- 5) I.H. Suh and Z. Bien: A Root-Locus Technique for Linear Systems with Delay, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-27-1**, 205/208 (1982)
- 6) H.W. Kuhn: Finding Roots of Polynomials by Pivoting, in Fixed Points Algorithm and Application, Ed. S. Karamardian, Academic Press (1977)
- 7) H.W. Kuhn: A New Proof of the Fundamental Theorem of Algebra, in Mathematical Programming Study 1, Ed. M. Balinski, 148/153, North Holland (1974)
- 8) N. Adachi, T. Hara and H. Tokumaru: An Algorithm for Computing Multivariable Root Loci by Pivoting, Int. J. Contr., **41-1**, 39/72 (1985)
- 9) 西岡, 竹内, 足立, 得丸: 簡単な Pivoting による根軌跡の計算法, システムと制御, **31-3**, 227/229 (1987)

《 付 録 》

1. 命題の証明

本論の命題の証明のために以下の二つの補題を必要とする.

【補題 1】 ある $z \in C$ に対して関数 $K(s)$ をつぎのように定義する.

$$K(s) = a_0(s-z)^p + k \quad (\text{A.1})$$

a_0 , k は実数, p は正整数 ($p \geq 2$). z_0 を z に最も近い $T(h)$ の一つの格子点とする. $D_m(z_0; h)$, $\partial D_m(z_0; h)$ を命題と同じく定義する. m は $m > p/\pi + 1/2$ となる正整数とする. このとき $\partial D_m(z_0; h)$ 上に $T(h)$ の辺で反時計向きに (1, 2) とラベルが付いた辺が p 個, (2, 1) とラベルの付いた辺が p 個存在する (Fig. 7 参照).

(証明) $\partial D_m(z_0; h)$ は $T(h)$ の $8m$ 個の頂点をもつ. 明らかに $8m \geq 2p$, $m \geq p/4$ となることが必要であるが, 補題の条件が満足されていれば $m > p/\pi > p/4$ となることに注意する. この $8m$ 個の頂点を反時計方向に順に $v_1, v_2, \dots, v_{8m}$ とする. $\theta_i = \arg \{(v_i - z_0)/(v_{i+1} - z_0)\}$ とする.

ただし $\arg(s)$ は s の偏角を示し, $-\pi < \arg(s) \leq \pi$ とする. また, $v_{8m+1} = v_1$ と考える. $\partial D_m(z_0; h)$ 上の点 s に対して $\arg(s-z) = \rho$ とする. $\text{Im}(K(s)) = 0$ のとき $\sin(p\rho) = 0$ となるので $\partial D_m(z_0; h)$ 上に $\text{Im}(K(s_j)) = 0$ となる $2p$ 個の点 s_j ($j=1, \dots, 2p$) が存在し $\arg \{(s_j - z)/(s_{j+1} - z)\} = \pi/p$, $j=1, \dots, 2p$ (ただし $s_{2p+1} = s_1$) とする. したがって $\partial D_m(z_0; h)$ 上に反時計方向にラベル (1, 2) あるいは (2, 1) となるそれぞれ p 個の辺が存在するための十分条件は, 線分 $s_j s_{j+1}$ ($j=1, \dots, 2p$) の長さの最小値を ℓ としたとき

Fig. 7 Rectangular region around a singular point

ℓ が h より大きいことである。ただし s_j, s_{j+1} は四角形 $\partial D_m(z_0; h)$ の同一の辺上にあるとする。 ℓ は Fig. 7 の ℓ_0 より大きい。 $\ell \geq \ell_0 > h$ より $\alpha < \tan \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \ell_0 &= 2(m-1/2)h \cdot \tan(\pi/2p) \\ &> 2(m-1/2)h \cdot \pi/2p > h \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

したがって, $(2m-1) > 2p/\pi$ より $m > 1/2 + p/\pi$ であればよい。

[補題2]⁸⁾ s, s', z をつぎの条件を満足する複素数とする

$$|s-z| \geq a > b \geq |s'-s| > 0$$

a, b は正の実数である。このとき

$$\left| \arg \left(\frac{s-z}{s'-z} \right) \right| = \left| \arg \left(\frac{s'-z}{s-z} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} \quad (\text{A.3})$$

である。

2. 命題1の証明

z をある分枝点とする。 $k \geq 0$ をその点でのゲインとする。 z は $K(s) - k = 0$ の p 重根である ($p \geq 2$)。したがって

$$K(s) = a_0(s-z)^p \frac{W(s)}{Q(s)} + k \quad (\text{B.1})$$

と表わすことができる。 $W(s), Q(s)$ はそれぞれ $(n-p)$ 次, r 次の多項式である。

$$W(s) = \prod_{j=p+1}^n (s - \bar{z}_j) = \prod_{j=p+1}^n (\bar{z} - \bar{z}_j) \left(\frac{s - \bar{z}_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$Q(s) = \prod_{i=1}^r (s - \bar{z}_{0i}) = \prod_{i=1}^r (\bar{z} - \bar{z}_{0i}) \left(\frac{s - \bar{z}_{0i}}{\bar{z} - \bar{z}_{0i}} \right) \quad (\text{B.3})$$

$n > p \geq 2, r \geq 1$ である。 $\bar{z}_j$ ($j = p+1, \dots, n$) はゲイン k のときの z と異なる特性根である。また $\bar{z}_{0i} \in N_r$ は開ループ伝達関数の零点である。 $\bar{z} \neq \bar{z}_j$ ($j = p+1, \dots, n$), $\bar{z} \neq \bar{z}_{0i}$ ($i = 1, \dots, r$) である。 $\partial D_m(z_0; h)$ 上で $\text{Im}(K(s)) = 0$ となる点 s を求める。

$$\arg \{(s - \bar{z})^p W(s)/Q(s)\} = \theta, \arg(s - \bar{z}) = \rho$$

とおくと

$$\theta = p\rho + \arg W(s) - \arg Q(s) \quad (\text{B.4})$$

$\arg(\bar{z} - \bar{z}_j), \arg(\bar{z} - \bar{z}_{0i})$ は s に関係しない。したがって適当な定数 θ_1, θ_2 を用いて

$$\arg W(s) = \sum_{j=p+1}^n \arg \left(\frac{s - \bar{z}_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} \right) + \theta_1 \quad (\text{B.5})$$

$$\arg Q(s) = \sum_{i=1}^r \arg \left(\frac{s - \bar{z}_{0i}}{\bar{z} - \bar{z}_{0i}} \right) + \theta_2 \quad (\text{B.6})$$

と表わすことができる。

$$\mu = \min_{\substack{p+1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq r}} \left\{ \frac{|\bar{z} - \bar{z}_j|}{\sqrt{2}(n-p)}, \frac{|\bar{z} - \bar{z}_{0i}|}{\sqrt{2}r} \right\} \quad (\text{B.7})$$

と定義すると $\mu > 0$ である。 $\mu > R > 0$ なる正数 R に対して m, h を

$$4(m + (1/2))h < R \quad (\text{B.8})$$

なるように選ぶ。定義によって

$$|\bar{z} - \bar{z}_j| > \sqrt{2}(n-p)R > \sqrt{2}(m + 1/2)h \geq |s - \bar{z}| > 0$$

$$|\bar{z} - \bar{z}_{0i}| > \sqrt{2}rR > \sqrt{2}(m + 1/2)h \geq |s - \bar{z}| > 0$$

補題2によって

$$\begin{aligned} \sum_{j=p+1}^n \left| \arg \left(\frac{s - \bar{z}_j}{\bar{z} - \bar{z}_j} \right) \right| &< \sum_{j=p+1}^n \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}(m + \frac{1}{2})h}{\sqrt{2}(n-p)R} \right) \\ &< \frac{\pi}{2} \frac{(m + \frac{1}{2})h}{R} < \frac{\pi}{8} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \left| \arg \left(\frac{s - \bar{z}_{0i}}{\bar{z} - \bar{z}_{0i}} \right) \right| &< \sum_{i=1}^r \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}(m + \frac{1}{2})h}{\sqrt{2}rR} \right) \\ &< \frac{\pi}{2} \frac{(m + \frac{1}{2})h}{R} < \frac{\pi}{8} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

したがって $\theta = p\rho + \delta + \theta$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$ は定数, δ は上の不等式より

$$|\delta| \leq \pi \frac{(m + \frac{1}{2})h}{R} < \frac{\pi}{4} \quad (\text{B.11})$$

このとき $\partial D_m(z_0; h)$ 上に $\arg(s_j - \bar{z}/s_{j+1} - \bar{z}) > (\pi - 2|\delta|)/p$ かつ $\text{Im}(K(s)) = 0$ となる点 $s_1, \dots, s_{2p}, (s_{2p+1} = s_1)$ が存在する。さらに $(\pi - 2|\delta|)/p > \pi/(2p)$ なので補題1と同じく

$$m > 2p/\pi + 1/2 \quad (\text{B.12})$$

となるように m を選べば $\partial D_m(z_0; h)$ 上に反時計方向に (1, 2), (2, 1) のラベルをもつ辺がそれぞれ p 個必ず存在する (注: (B.12) を満足する m をきめて, h を十分小さくとれば $R > 0$ なので (B.8) を満足することができる)。