L-N-L 型非線形システムの一同定法†

横 山 誠*・渡 辺 敦*

A Method of Identifying L-N-L Type Nonlinear Systems

Makoto YOKOYAMA* and Atsushi WATANABE*

A practical and relatively simple method of identifying L-N-L type nonlinear systems is presented. A simulated L-N-L system is identified to illustrate the validity of the algorithm.

Key Words: identification, L-N-L type nonlinear system

1. はじめに

非線形システムの一つのクラスとして、二つの線形要素の間に非線形静的要素を挟み込んだ、L-N-L 型モデルを考えることができる (Fig. 1)。このモデルによる同定、すなわち、入出力観測値から前後二つの線形要素のインパルス応答と、間の非線形関数のべき級数展開形を求める方法は、Korenberg を初めとする周波数領域におけるもの^{1)~3)}や、Billings らによる時間領域におけるもの^{4), 5)}など、いくつか報告されている。これらの手法は、被同定システムの特定の次数の Wiener 核の一部分を計算し、その値に基づいて同定するという原理に従っているため、同定不可能なシステムが存在したり、あるいはアルゴリズムが複雑なために実用的でなかったりする⁶⁾。そこで本稿では、同定不可能なシステムが原理的に存在せず、かつ簡便な方法として、線形要素のインパルス応答を任意の 1 次独立な関数系で展開し、特定の次数の Wiener 核の一部ではなく全体の値に基づいて、それらの展開係数を最小 2 乗法によって決定する方法を提案する。最

後に、本方法の数値計算例を示す。

2. 準 備

Fig. 1 に示す L-N-L 型非線形システムに関して以下のことがわかっている¹⁾。

$g_1(t)$, $g_2(t)$ をおのおのの線形要素のインパルス応答とし、非線形要素は N 次多項式

$$v = \sum_{i=1}^N a_i u^i \quad (1)$$

で記述できるものとする。このとき、平均値零、パワーレベル Q の白色正規性信号に対する n 次 Wiener 核は、

$$k_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^{[(N-n)/2]} \frac{(n+2j)! Q^j a_{n+2j}}{n! j! 2^j} \times \left[\int_0^\infty g_1^2(\tau) d\tau \right]^j \int_0^\infty g_2(\tau) g_1(t_1 - \tau) \cdots g_1(t_n - \tau) d\tau \quad (2)$$

ここで、 $[X]$ は X 以下の最大整数を表す。

となる。このように、Wiener 核が線形要素のインパルス応答の簡単な畳み込み積分で表わされることが、このシステムの特徴である。従来提案されている L-N-L 型非線形システムの同定は、原理的にすべて (2) 式に基づいており、本稿においてもこれを用いる。

3. 線形要素の推定

任意の二組の 1 次独立な関数列、 $\{\psi_i(t)\}$, $\{\phi_i(t)\}$, $i=1, 2, \dots$ を用いて線形要素のインパルス応答を次のように展開し、

$$g_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \psi_i(t) \quad (3)$$

$$g_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \phi_i(t) \quad (4)$$

展開係数 $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ を未知パラメータとするパラメータ推定問題とする。(2)式で $n=2$ とした 2 次の Wiener 核

$$k_2(t_1, t_2) = A \int_0^\infty g_2(\tau) g_1(t_1 - \tau) \times g_1(t_2 - \tau) d\tau \quad (5)$$

Fig. 1 L-N-L System

† 第 10 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1987・12)

* 東京都立大学工学部 東京都世田谷区深沢 2-1-1

* Faculty of Technology, Tokyo Metropolitan University, Setagaya-ku, Tokyo

(Received October 14, 1988)

(Revised February 3, 1989)

ここで,

$$A = \sum_{j=0}^{[(N-2)/2]} \frac{(2+2j)! Q^j a_{2+2j}}{2! j! 2^j} \left[\int_0^\infty g_i^2(\tau) d\tau \right]'$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} k_2(t_1, t_2) &= A \int_0^\infty \sum_{i=1}^\infty \beta_i \phi_i(\tau) \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \phi_i(t_1 - \tau) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \phi_j(t_2 - \tau) d\tau \\ &= A \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \alpha_i \alpha_j \beta_l \int_0^\infty \phi_i(\tau) \\ &\quad \times \phi_i(t_1 - \tau) \phi_j(t_2 - \tau) d\tau \\ &= A \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \alpha_i \alpha_j \beta_l \\ &\quad \times f_{ijl}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ただし,

$$\begin{aligned} f_{ijl}(t_1, t_2) &= \rho \int_0^\infty \phi_i(\tau) \{\phi_i(t_1 - \tau) \phi_j(t_2 - \tau) \\ &\quad + \phi_j(t_1 - \tau) \phi_i(t_2 - \tau)\} d\tau \\ \rho &= \begin{cases} 1 & \text{for } i \neq j \\ 1/2 & \text{for } i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

すなわち, 2次の Wiener 核は, 1次独立な 1次元関数列 $\{\phi_i(t)\}$, $\{\phi_j(t)\}$ の畳み込み積分によって作られる 1次元対称関数列 $\{f_{ijl}(t_1, t_2)\}$ の線形結合として表わされたことになる。2次の Wiener 核は, 白色正規性信号を入力として, その入出力観測値から容易に測定することができるので, これはすでに測定されたものとし, さらに 2次元対称関数列 $\{f_{ijl}(t_1, t_2)\}$ が互いに 1次独立とすると, (6)式中の展開係数の積 $\{A\alpha_i\alpha_j\beta_l\}$ を, 以下のように最小 2乗法によって決定することができる。

まず, 二つの線形要素のインパルス応答の展開に用いる 1次独立な関数の個数とともに p とすると, これらから作られる 2次元対称関数 ((7)式) の個数 M は, $M = p \times p \times C_2 = p^2(p+1)/2$ となり, これら M 個の関数およびその展開係数を順に,

$$\begin{aligned} \eta_1 f'_1(t_1, t_2) &\triangleq A\alpha_1\alpha_1\beta_1 f_{111}(t_1, t_2) \\ \eta_2 f'_2(t_1, t_2) &\triangleq A\alpha_1\alpha_1\beta_2 f_{112}(t_1, t_2) \\ &\vdots \\ \eta_M f'_M(t_1, t_2) &\triangleq A\alpha_p\alpha_p\beta_p f_{ppp}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

とおくと, (6)式は,

$$k_2(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^M \eta_i f'_i(t_1, t_2) \quad (8)$$

となる。よって, 2次核の展開係数は正規方程式

$$\begin{bmatrix} \langle f'_1 f'_1 \rangle & \cdots & \langle f'_1 f'_M \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f'_M f'_1 \rangle & \cdots & \langle f'_M f'_M \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle k_2 f'_1 \rangle \\ \langle k_2 f'_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle k_2 f'_M \rangle \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし,

$$\langle k \cdot f \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty k(t_1, t_2) f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

の解として得られる。このようにして得られた係数列 $\{\eta_i\}$ から, インパルス応答の展開係数列の相互間の比は,

$$\alpha_m/\alpha_n = A\alpha_m\alpha_i\beta_j/A\alpha_n\alpha_i\beta_j \quad (10)$$

$$\beta_m/\beta_n = A\alpha_i\alpha_j\beta_m/A\alpha_i\alpha_j\beta_n \quad (11)$$

で算出することができる。また, 入出力の観測値だけから展開係数を一意に定めることはできないため, 展開係数列の相互間の比が定まった後, なんらかの規準化を施しておく必要がある⁷⁾。

以上の手順によって二つの線形要素のインパルス応答が推定されたとすると, 非線形要素の推定は, べき級数係数 $\{a_i\}$ をパラメータとする線形推定問題に帰着されるので, 種々の手法によって容易に推定することができる^{2), 4)}。

[注意事項]

1) 2次の Wiener 核が存在すると仮定して議論したが, 非線形要素が奇関数の場合にはこれは存在しないので, 3次の Wiener 核を用いる必要がある。この場合も, 3次の Wiener 核が, (7)式で生成された 2次元対称関数列に対応した 3次元対称関数の線形結合として表現されるので, 2次核を用いた場合とまったく同様に線形要素を同定することができる。

2) (7)式で生成された対称関数列 $\{f'_i(t_1, t_2)\}$ を互いに 1次独立な関数列と仮定していたが, 1次元関数列 $\{\phi_i(t)\}$, $\{\phi_j(t)\}$ の選び方によっては 1次従属なものを生成する可能性がある。このような場合には, 1次従属な関数を他の関数の線形結合として表現した後, 最小 2乗法を適用することが考えられる。

3) $\{\eta_i\}$ が推定された後, $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ の相互間の比を定める計算方法はいくとおりもあり, 理論的にはいずれの方法によってもその値が変わらないはずであるから, それらの値のばらつきを同定精度の一つの目安とすることができる。

4) 1次独立な関数列 $\{\phi_i(t)\}$, $\{\phi_j(t)\}$ は, Wiener 核の減衰性や振動性を参考に選定すると良い。

3. 数値計算例

線形要素のインパルス応答が Fig. 4 に実線で示されるシステムを対象にシミュレーションを行い, 本方法の有用性を検証した。非線形要素は 2 次のべき項をもつものとし, このときの 2 次の Wiener 核を Fig. 2 に示す。この Wiener 核の減衰性や振動性を参考に, Fig. 3 に示される 4 個の 1 次独立な関数を用いた。このようにして同定されたインパルス応答が

Fig. 2 Second order Wiener kernel

Fig. 3 Linearly independent functions

Fig. 4 Impulse responses of linear elements of L-N-L system

Fig. 4 に波線で示されており、良好な結果が得られている。

4. おわりに

L-N-L 型非線形システムの線形要素の一定定法を示したが、本方法は、特定の次数の Wiener 核すべての値に基づいているため、原理的に同定不可能なシステムは存在しない。これまで報告されている方法の中でも、アルゴリズムを変更することによって同定不可能なシステムを同定可能にできるものもあるが、入出力値の観測雑音などの影響を考えると、そのようなシステムに対する同定誤差は大きくなるおそれがある。

参考文献

- 1) M.J. Korenberg: Identification of Biological Cascades of Linear and Static Nonlinear Systems, Proc. Midwest Symp. Circuit Theory, 18.2, 1/9 (1973), など
- 2) 磯部, 佐藤: ウィーナーの方法によるある種の非線形系の同定法について, 電子通信学会論文誌, **J-64-A-12**, 1026/1033 (1981)
- 3) H. Spekreijse and D. Reits: Sequential analysis of a Sandwich System, Ann New York Acad Sci, **388**, 72/97 (1982)
- 4) S.A. Billings and S.Y. Fakhouri: Identification of a Class of Nonlinear Systems Using Correlation Analysis, Proc. IEE, **7**, 691/697 (1978)
- 5) H.W. Chen, et al.: Characterization of Nonlinear Systems by Discrete Volterra Functional Series, Proc. Fifteenth NIBB Conf. on Information Processing in Neuron Network, 63/84 (1985)
- 6) M.J. Korenberg: The Identification of Nonlinear Biological Systems: LNL Cascade Models, Biological Cybernetics, **55**, 125/134 (1986)
- 7) B. Stephen and L.O. Chua: Uniqueness of a Basic Nonlinear Structure, IEEE Trans. Circuits and Systems, **CAS-30-7**, 648/651 (1983)