区間多目的線形計画問題に対する可能的有効端点判別法

乾 口 雅 弘*・久 米 靖 文*

A Discrimination Method of Possibly Efficient Extreme Points for Interval
Multiobjective Linear Programming Problems

Masahiro INUIGUCHI* and Yasufumi KUME*

This paper deals with a multiobjective linear programming problem with interval objective functions. A possibly efficient solution is an extension of the efficient solution to multiobjective linear programming problem. A discrimination method of possibly efficient extreme points is proposed.

Key Words: possibly efficient solution, necessarily efficient solution, interval multiobjective linear programming problem

1. はじめに

区間パラメータを含む目的関数を有する多目的線形計画問題に対して2種類の有効解が考えられることが, Bitran¹⁾により指摘されている。これらは, 後に述べるように, 必然的な有効解, 可能的な有効解と考えられる。Bitran¹⁾は, 必然的な有効解のみを取り上げ, 実行可能集合の各端点が必然的に有効であるか否かを調べる方法について議論している。しかし, 可能的有効解については議論していない。一般に, 必然的な有効解は常に存在するとは限らず, 問題によっては存在しない場合がある。このような場合, 可能的有効解が重要な役割を果たすと考えられる。

本報告では, すべての可能的有効解を求めるための基礎として, ある端点が可能的に有効であるか否かを調べる方法について述べる。

2. 準備

通常の多目的線形計画問題

$$\text{Max } \{C\mathbf{x} | \mathbf{x} \in F\} \quad (1)$$

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad (2)$$

に対する解として, 有効解が考えられている。ここで, $\mathbf{C}$ は $p \times n$ 行列, $\mathbf{A}$ は $m \times n$ 行列, $\mathbf{b} = (b_1, b_2,$

$\dots, b_m)^t$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ である。また, $\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{C}\mathbf{x}^*$ なる $\mathbf{x} \in F$ が存在しないような解 $\mathbf{x}^* \in F$ を有効解と呼び, 以後, 有効解の集合を $EF(\mathbf{C})$ と記す。ただし,
 $\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{C}\mathbf{x}^* \Leftrightarrow \mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{C}\mathbf{x}^*$ かつ $\mathbf{C}\mathbf{x} \neq \mathbf{C}\mathbf{x}^*$ (3)

である。

F が有界であるとき, すべての有効解は有効な F の端点の凸結合で表わされ, すべての有効端点を求める種々の方法^{2)~4)}が考えられている。また, Evans と Steuer³⁾により, 端点が無効であるための必要十分条件がつぎのように与えられている。

[補題1] $\mathbf{x}^0 = (x^{0B}, x^{0N})^t$ を基底逆行列 $\mathbf{B}^{-1}$ をもつ F の端点とする。このとき, $\mathbf{x}^0$ が(1)式の有効解であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^N - \mathbf{C}^B \bar{\mathbf{A}}^N) \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_i^N \boldsymbol{\mu} \leq 0, i \in D \triangleq \{i | x_i^{0B} = 0\} \\ \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)$$

なる $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-m})^t$ が存在しないことである。ただし, $\mathbf{x}^{0B} = (x_1^{0B}, x_2^{0B}, \dots, x_m^{0B})$, $\mathbf{x}^{0N} = (x_{m+1}^{0N}, x_{m+2}^{0N}, \dots, x_n^{0N})$ であり, x_i^{0B} は基底変数, x_i^{0N} は非基底変数である。 $\bar{\mathbf{A}}^N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^N$ で, $\bar{\mathbf{A}}_i^N$ は $\bar{\mathbf{A}}^N$ の i 番目の行であり, $\mathbf{A}^N$ は非基底変数に対応する列からなる $\mathbf{A}$ の小行列である。また, $\mathbf{C}^N$, $\mathbf{C}^B$ はそれぞれ, 非基底変数, 基底変数に対応する列からなる $\mathbf{C}$ の小行列である。ここで, 一般性を失うことなく, $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{A}^N)$, $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^B, \mathbf{C}^N)$, $\mathbf{x}^0 = (x^{0B}, x^{0N})^t$ とできることに注意されたい。

本報告で扱う区間多目的線形計画問題は,

$$\text{Max } \{\Phi \mathbf{x} | \mathbf{x} \in F\} \quad (5)$$

と表わされる。ただし, Φ は各成分が有界な閉区間 $[l_{ij}, u_{ij}]$ で表わされた $p \times n$ 行列である。以下, 各成分 c_{ij} が $c_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$ となる $p \times n$ 行列 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{C} \in \Phi$ と記す。また, l_{ij} を各成分とする $p \times n$ 行列を $\mathbf{L}$, u_{ij} を各成分とする $p \times n$ 行列を $\mathbf{U}$ とする。 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^B, \mathbf{C}^N)$ と分割できるように, $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^B, \mathbf{U}^N)$, $\mathbf{L} = (\mathbf{L}^B, \mathbf{L}^N)$ とできる。

Bitran¹⁾は, 係数が区間で表わされていることから, (5)式の有効解の集合として, $\bigcap_{\mathbf{C} \in \Phi} EF(\mathbf{C})$ と $\bigcup_{\mathbf{C} \in \Phi} EF$

* 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町 4-804
* College of Engineering, University of Osaka
Prefecture, Sakai
(Received February 2, 1989)
(Revised April 13, 1989)

(C) が考えられることを指摘している。 $\bigcap_{C \in \Phi} EF(C)$ の各要素は、すべての $C \in \Phi$ に対して有効な解であり、各区間を係数のとりうる範囲と考えると、必然的に有効な解と考えられる。この意味において、このような解を必然的有效解と呼ぶことにする。また、 $\bigcup_{C \in \Phi} EF(C)$ の各要素は少なくとも一つの $C \in \Phi$ に対して有効な解であり、可能的有効解と呼ぶことにする。Bitran¹⁾ は、各端点が必然的に有効であるか否かを調べる方法を提案しているが、可能的有効解については触れていない。本報告では、各端点が可能的に有効であるか否かを調べる方法について議論する。 F が有界であるとき、任意の可能的有効解は可能的に有効な端点の凸結合で表わされるので、上述の方法を議論することは、すべての可能的有効解を求めるためにも重要である。

3. 可能的有効端点判別法

補題 1 より、 F の端点 $x^0 = (x^{0B}, x^{0N})^t$ が可能的に有効であるか否かを調べるためには、(4)式を満たす μ が存在しないような $C \in \Phi$ が存在するか否かを調べればよい。(4)式では、 C^N が小さいほど条件が強くなるので、 C^N は L^N と設定すればよい。また、 $i \in D$ なる i について、 $C_{\cdot i}^B$ は $L_{\cdot i}^B$ とすればよい。ただし、行列 S の i 番目の列を $S_{\cdot i}$ と記す。したがって、残りの $i \in E \triangleq \{i | x_i^{0B} > 0\}$ について、(4)式を満たす μ が存在しないような、 $L_{\cdot i}^B \leq C_{\cdot i}^B \leq U_{\cdot i}^B$ なる $C_{\cdot i}^B$ の組合せの存在を調べればよい。しかし、 $L_{\cdot i}^B \leq C_{\cdot i}^B \leq U_{\cdot i}^B$ なる $C_{\cdot i}^B$ 、 $i \in E$ の組合せは無限に存在するので、これらすべてについての有無を調べることは現実的ではない。そこで、つぎの補題を用いる。

【補題 2】 行列 S , T について、つぎの I, II のいずれかが成立するが、同時に成立することはない。ただし、 S は空ではない。

I $Sy \geq 0, Ty \geq 0$ に解 y が存在する。

II $z_1 S + z_2 T = 0, z_1 > 0, z_2 \geq 0$ に解 (z_1, z_2) が存在する。

この補題は Tucker の二者択一の定理⁵⁾ の特殊な場合であるので、証明は省略する。

(4)式に補題 2 を適用すると、(4)式を満たす μ が存在しないことは、

$$\begin{cases} \lambda_1(C^N - C^B \bar{A}^N) - \sum_{i \in D} \bar{A}_{\cdot i}^N \lambda_{2i} + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_{2i} \geq 0, i \in D \end{cases} \quad (6)$$

を満たす $\lambda_1, \lambda_{2i} (i \in D), \lambda_3$ が存在することである。ただし、 $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1p})$, $\lambda_3 = (\lambda_{31}, \lambda_{32}, \dots, \lambda_{3n-m})$ である。一般性を失うことなく、 $\lambda_1 > 0$ を $\lambda_1 \geq 1 \triangleq (1, 1, \dots, 1)$ に置き換えることができる。また、 λ_3 はスラ

ック変数の役割をしているので、(6)式は、

$$\begin{cases} \lambda_1 C^N - \lambda_1 C^B \bar{A}^N - \sum_{i \in D} \bar{A}_{\cdot i}^N \lambda_{2i} \leq 0 \\ \lambda_1 \geq 1, \lambda_{2i} \geq 0, i \in D \end{cases} \quad (7)$$

となる。

ここで、再び F の端点 x^0 が可能的に有効であるか否かを調べることを考えると、(7)式を満たす $\lambda_1, \lambda_{2i} (i \in D)$ が存在する $C \in \Phi$ が存在することを調べればよい。 $\lambda_1 \geq 1, L_{\cdot i}^B \leq C_{\cdot i}^B \leq U_{\cdot i}^B, \forall C \in \Phi$ であることに注意すると、 $\lambda_1 L^B \leq \lambda_1 C^B \leq \lambda_1 U^B, \forall C \in \Phi$ が成立する。また、 $\lambda_1 L^B \leq \eta \leq \lambda_1 U^B$ なる任意の $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ に対して、 $\eta = \lambda_1 C^B$ となる C^B が必ず存在するので、 $C^N, C_{\cdot i}^B (i \in D)$ に対する最適な設定方法を考慮すると、結局、

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^p \lambda_{1k} (l_{ki}^N - \sum_{j \in D} l_{kj}^B \bar{a}_{ij}^N) \\ - \sum_{i \in E} \eta_i \bar{a}_{ij}^N - \sum_{i \in D} \lambda_{2i} \bar{a}_{ij}^N \leq 0, j=1, 2, \dots, m \\ \sum_{k=1}^p \lambda_{1k} l_{ki}^B \leq \eta_i \leq \sum_{k=1}^p \lambda_{1k} u_{ki}^B, i \in E \\ \lambda_{1k} \geq 1, k=1, 2, \dots, p, \lambda_{2i} \geq 0, i \in D \end{cases} \quad (8)$$

なる解 $\lambda_{1k} (k=1, 2, \dots, p), \lambda_{2i} (i \in D)$ の有無を調べればよい。ここで、 $l_{ki}^N, l_{kj}^B, u_{ki}^B$ はそれぞれ、 L^N, L^B, U^B の (k, i) 成分であり、 $\bar{a}_{ij}^N$ は $\bar{A}^N$ の (i, j) 成分である。また、 λ_{2i} に上限が存在しないので、 $\bar{a}_{ij}^N > 0$ なる j に対して、最初の制約条件を省くことができる。(8)式は線形不等式制約であるので、シンプレックス法を用いて、解の有無を調べることができる。

4. 数 値 例

3章で述べた方法の妥当性を示すため、つぎのパラメータをもつ区間多目的線形計画問題(5)式を考える。

$$\Phi = \begin{pmatrix} [5, 6] & [6, 7] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2, 4] & [1, 2] & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 33 \\ 36 \\ 14 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t \quad (11)$$

明らかに、 $x_3 \sim x_6$ はスラック変数の役割をしているので、実行可能集合 F を Fig. 1 のように描ける。

M_i を i 番目の目的関数のパラメータにより定まる勾配の集合とする。目的関数の線形性により、 M_i は Fig. 1 に示すようになる。このとき、 $M_1 \cup M_2$ 内のすべてのベクトルと鋭角あるいは直角をなす方向に進めば、すべてのパラメータについて、両方の目的を同時に改善あるいは、他方を改悪することなく一方の目

Fig. 1 The feasible set F , the gradient sets M_1 and M_2 and the cone G

的を改善することができる。このようなベクトルの集合を G とすると、 G は Fig. 1 に示すような錐となる。

Fig. 1 の端点 P について考える。図に示すように、

$$(\overrightarrow{OP} + G) \cap F \neq \emptyset \quad (12)$$

であるので、点 P から点 Q へ進むことにより、すべてのパラメータについて、両方の目的を同時に改善することができる。したがって、点 P は可能的に有効でないことがわかる。3 章で述べた方法を適用すると、点 P に対応する基底逆行列 B^{-1} および $\bar{A}^N$ は、

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 11 & -13 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}^N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 11 & -13 \end{pmatrix} \quad (13)$$

となり、 x_3, x_4 が非基底変数となる。したがって、

$$\begin{cases} 3\eta_1 - 2\eta_2 \leq 0 \\ -3\eta_1 + \eta_2 \leq 0 \\ 5\lambda_{11} + 2\lambda_{12} \leq \eta_1 \leq 6\lambda_{11} + 4\lambda_{12} \\ 6\lambda_{11} + \lambda_{12} \leq \eta_2 \leq 7\lambda_{11} + 2\lambda_{12} \\ \lambda_{11} \geq 1, \lambda_{12} \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

なる解 $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \eta_1, \eta_2)$ の有無を調べればよい。シンプレックス法を用いて調べると、解が存在しないことがわかる。

つぎに、Fig. 1 の点 Q について考えると、

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

とすると、Fig. 1 に示すように、点 Q は C について有効となるので、可能的有効解であることがわかる。

3 章で述べた方法を適用すると、

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_2 \leq 0 \\ -3\eta_1 + 2\eta_2 \leq 0 \\ 5\lambda_{11} + 2\lambda_{12} \leq \eta_1 \leq 6\lambda_{11} + 4\lambda_{12} \\ 6\lambda_{11} + \lambda_{12} \leq \eta_2 \leq 7\lambda_{11} + 2\lambda_{12} \\ \lambda_{11} \geq 1, \lambda_{12} \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

なる解 $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \eta_1, \eta_2)$ の有無を調べればよい。この場合、たとえば、解 $(1, 1, 7, 7)$ が存在し、可能的有効解であることがわかる。

5. おわりに

区間パラメータを含む目的関数をもつ区間多目的線形計画問題に対して、ある端点が可能的に有効であるか否かを調べる方法について述べた。Bitran¹⁾が示したように、必然的に有効であるか否かを調べるためには、間接列挙法を用いなければならないが、本報告で明らかにしたように、可能的に有効であるか否かを調べるためには、シンプレックス法のみを用いればよい。また、すべての可能的有効端点を求めるためには、すべての端点についてこの方法を適用すればよいが、多くの計算時間を要する。より計算時間の短い方法の考案が今後の課題である。

参考文献

- 1) G.R. Bitran: Linear Multiple Objective Problems with Interval Coefficients, Management Sci., 26-7, 694/706 (1980)
- 2) M. Zeleny: Linear Multiobjective Programming, Springer-Verlag (1974)
- 3) J.P. Evans and R.E. Steuer: A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs, Math. Programming, 5, 54/72 (1973)
- 4) H. Isermann: The Enumeration of the Set of All Efficient Solutions for Linear Multiple Objective Programs, Operational Res. Quart., 28-3, 711/725 (1977)
- 5) O.L. Mangasarian (関根智明訳): 非線形計画法, 29, 培風館 (1972)