確率拡散方程式の無限次元パラメータの同定[†]

相 原 伸 一*

Identification of Infinite-Dimensional Parameter for Stochastic Diffusion Equations

Shin Ichi AIHARA*

The infinite dimensional parameter estimation for stochastic heat diffusion equation is considered using the method of sieves. The consistency property is also studied for a long run data.

Key Words: parameter estimation, inference for stochastic processes, stochastic heat diffusion equation

1. 緒 言

確率分布定数システムの無限次元パラメータの同定は、確率的制御問題¹⁾、大規模柔軟構造物²⁾などの数多くの物理現象に現れる重要な問題になっている。有限次元の未知パラメータの同定問題と異なって無限次元のパラメータベクトルを推定するアルゴリズムを直接計算機などで構成することは、不可能に近いと思われる。実用的な推定機構を構成する一つの方法は、無限次元パラメータベクトルを有限次元の部分空間に射影することである。そこで問題となることは、射影されたパラメータの推定値の一致性であり、それは観測データのサンプルサイズやデータの個数、それに加え射影された部分空間の次元数を限りなく増やしていくとき、その推定値が真値にある確率的意味で収束していくことを調べることである。

本論文では、グレナンダー³⁾が提唱したパラメータ空間を有限部分空間に射影する方法を使用して、熱拡散方程式の拡散係数を同定するアルゴリズムを、ある種の対数尤度関数に似たコスト関数より導出する。この手法はすでに集中定数システムの未知時間関数パラメータの同定⁴⁾さらに分布むだ時間の同定⁵⁾に適用されており、ここではこの手法を確率放物型システムの位置変数に依存したパラメータの同定に応用しようと

するものである。

2. 確率放物型システム

以下のような領域と関数空間を導入する。

$G \subset R^n$: 滑らかな境界 Γ をもつ開有界領域

$T =]0, t_f[$

$L^2(G)$: G 上で 2 乗可積分な関数の空間で、ノルムは $|\cdot|$, 内積は $(\cdot, \cdot)$ と表現する (ただし R^n のノルムも $|\cdot|$ と表現する)。

$H_0^1(G)$: オーダ 1 のソボレフ空間で境界 Γ でゼロになる関数の集まり。

$H^{-1}(G)$: $H_0^1(G)$ の双対空間。

さらに

$$V = H_0^1(G) \subset H = L^2(G) \subset V' = H^{-1}(G)$$

とおく (詳細は文献 6) を参照されたい)。

以上の準備のもとで、 V から V' への線形作用素 $A(a^0)$ を以下のように定義する。

$$\langle A(a^0)\phi_1, \phi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n \int_G a^0(x) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} dx \quad (2.1)$$

ここで

$$(C-1) \quad 0 < \alpha \leq a^0(x) \leq \beta, \quad \forall x \in G$$

$$(C-2) \quad a^0 \in C^2(G)$$

と仮定する。

さらに条件 (C-2) より、作用素 $A(a^0)$ はその値域を H に限定すれば、定義域 $D = H^2 \cap V$ をもつ非有界作用素としても定義でき、ここでは同じ記号 $A(a^0)$ を用いわざわざ区別しないことにする。

システム雑音は、 H 上で値をもつブラウン運動過程 w で表現されるとする。すなわち $\forall \phi, \psi \in H$ に関して

$$E\{ \langle w(t), \phi \rangle \langle w(t), \psi \rangle \} = (Q\phi, \psi)t$$

が成立し、 Q は $L_1(H; H)$ に属する ($L_1(\cdot; \cdot)$ はトレース族を表す)。考察するシステムは、以下のような確率的拡散方程式とする。

$$(u(t), \phi) + \int_0^t \langle A(a^0)u(s), \phi \rangle ds = (u_0, \phi) + \langle w(t), \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V \quad (2.2)$$

[†] 第 31 回自動制御連合講演会で発表 (1989・10)

* 東京理科大学工学部 東京都新宿区神楽坂 1-3

* Faculty of Engineering, The Science University of Tokyo, Shinjuku-ku, Tokyo
(Received January 17, 1989)
(Revised April 11, 1989)

《定理 1》^{7),8)} 条件 (C-1), (C-2) および

(C-3) $u_0 \in L^2(Q; H)$

のもとで, (2.2) 式は以下のような一意な解をもつ.

$$u \in L^2(Q; C(T; H) \cap L^2(T; V)) \quad (2.3)$$

《定理 2》^{9),10)} 条件 (C-1) と (C-2) のもとで, $-A$ は以下のような強連続な縮小半群を生成する.

$$\frac{dT_t}{dt} = -A T_t, \quad T_0 = I$$

$$\|T_t \phi\|^2 \leq C e^{-\alpha t} \|\phi\|^2, \quad \exists C > 0, \quad \phi \in H$$

自己相関作用素を

$$A(t, s) = E\{u(t) \otimes u(s)\} \quad (2.4)$$

と定義する, ただし

$$\phi \otimes \phi = \phi(\phi, \cdot)$$

である.

e_i を H の直交基底とすれば, 作用素 Q は $Q = \sum_{i=1}^{\infty} q_i e_i \otimes e_i$ と書け, (2.2) 式より

$$\begin{aligned} E\{u(t)(u(s), \phi)\} &= T_t E\{u_0(u_0, T_s^* \phi)\} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge s} T_{t-\tau} e_i(e_i, T_{s-\tau}^* \phi) q_i d\tau \\ &= T_t E\{u_0 \otimes u_0\} T_s^* \phi + \int_0^{t \wedge s} T_{t-\tau} Q T_{s-\tau}^* \phi d\tau \end{aligned}$$

となり, 結局

$$A(t, s) = T_t E\{u_0 \otimes u_0\} T_s^* + \int_0^{t \wedge s} T_{t-\tau} Q T_{s-\tau}^* d\tau \quad (2.5)$$

が得られる.

同定はシステムが定常状態に到達後行うことにする. 現時点 t でシステムが定常状態になったことを, 数式で示せば, 初期条件 u_0 を

$$\int_{-\infty}^0 T_{-\tau} dw(\tau) \quad (2.6)$$

と選び, (2.5) 式の自己相関関数を計算すると,

$$A(t-s) = A(t, s) = \int_{-\infty}^{t \wedge s} T_{t-\tau} Q T_{s-\tau}^* d\tau \quad (2.7)$$

となるので, $A(t-s)$ が有界な関数として定義できることを, 示せばよい.

《定理 3》¹¹⁾ 条件 (C-1) および (C-2) のもとで,

$$\int_0^{\infty} \|A(\tau)\|_{L_2(V; V)}^2 d\tau < \infty \quad (2.8)$$

が成り立つ. $L_2(\cdot, \cdot)$ はヒルベルト・シュミット族を表わす.

半群 T_t の性質より容易に証明できる. 詳しくは文献 11) を参照されたい.

3. パラメータ同定手法

同定に際しては, 観測データとして, $\{u(t, x); t \in$

$T, \forall x \in G\}$ が得られるとする (時間および空間 x に関する増分も含む). これは現実的にはかなりの理想状態と考えられるが, この場合でも得られる一貫性は意味の弱いものになり, 数学的にどのような関係が得られるかを吟味する意味でこのような理想の場合を想定した. もっと現実的な観測データの場合は文献 11) を参照されたい. さらに文献 11) で得られている一貫性は, 本論文で得られたものより, かなり意味が弱くなっていることに注意されたい.

ブラウン運動の分散作用素 Q がトレース族に属しているために, $u(t)$ 過程の尤度関数が定義されるかどうかはまだよくわかっていない. そこで対数尤度関数のかわりに, 以下のようなコストを考える.

$$\begin{aligned} L(a) &= - \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(a(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^{-1} du(t) \right) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i,j=1}^n \left(a(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-1} \right)^* a(x) \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \right) dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2(\cdot) / \partial x_i^2 \quad (3.2a)$$

であり, さらに文献 12) より

$$(-\Delta)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1/\lambda_k) \phi_k \otimes \phi_k \quad (3.2b)$$

と表現される. ただし ϕ_k は H の特別な直交基底で

$$-\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad \phi_k \in V \quad (3.2c)$$

を満足し,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-1} \right)^* = \sum_{k=1}^{\infty} (1/\lambda_k) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi_k \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_k \quad (3.2b)$$

なる関係が成立する. (3.1) 式は形式的には, $Q = I$ のときの尤度関数であるが, (3.1) 式が尤度であることはまだ厳密な証明はなされていない.

さらに $\{\phi_i\}$ を H^1 で値を取る H の直交基底とする. 無限次元パラメータ $a(x)$ を,

$$a^k(x) = \sum_{i=1}^k a_i \phi_i(x) \quad (3.3)$$

と近似する. この近似を用いて (3.1) 式のコストを

$$\begin{aligned} L(a^k) &= - \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(a^k \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} (-\Delta)^{-1} du(t) \right) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \sum_{i,j=1}^n \left(a^k \frac{\partial u(t)}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-1} \right)^* a^k \frac{\partial u(t)}{\partial x_j} \right) dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

と近似する. a^0 (真値) の推定値は (3.4) 式を $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ に関して最大にするように決定するとしよう.

その推定値は

$$\hat{a}_k^{(t_f)} = \sum_{i=1}^k \hat{a}_i(t_f) \phi_i(x) \quad (3.5)$$

と表現され、 $\hat{a}_i(t_f)$ は $\hat{a}(t_f) = \{\hat{a}_1(t_f), \hat{a}_2(t_f), \dots, \hat{a}_k\}'$ と定義すれば

$$F^{(t_f)} \hat{a}^{(t_f)} = g^{(t_f)} \quad (3.6)$$

を満足する。ここで $F^{(t_f)}$ と $g^{(t_f)}$ の各要素はそれぞれ

$$f_{ij}^{(t_f)} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) dt \quad (3.7)$$

$$g_j^{(t_f)} = -\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} du(t) \right) \quad (3.8)$$

となる。

まだマトリクス $F^{(t_f)}$ の正値性はわからないが、(3.6)式を数値的に解く方法は数多くあるので、ここでは(3.6)式を実現する方法の議論は行わないことにし、つぎに重要な推定値の一致性を検証する。

4. 推定値の一致性

行列 $F^{(t_f)}$ の可逆性は保証されていないので、以後は(3.6)式の解 $\hat{a}(t_f)$ が存在したと仮定して議論をすすめる。

推定値(3.5)の一致性を検証するために、基礎方程式(3.5)を以下のように変形する。まず(3.8)式より、

$$\begin{aligned} g_j^{(t_f)} &= \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* a_0 \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} dw(t) \right) \\ &= \sum_{q=1}^k f_{jq}^{(t_f)} a_q^0 + \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \\ &\quad \left. \times \left(a_0^0(x) - \sum_{q=1}^k a_q^0 \phi_q(x) \right) \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) dt \\ &\quad - \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum_{p=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} dw(t) \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで

$$a_q^0 = (a^0, \phi_p) \quad (4.2)$$

である。(4.1)式の右辺第2, 3項を $h_j^{(t_f)}$ とおけば、(3.6)式は

$$F^{(t_f)} (\hat{a}(t_f) - a^0(k)) = h^{(t_f)} \quad (4.3)$$

となり、ただし

$$a^0(k) = \{a_1^0, a_2^0, \dots, a_k^0\}' \quad (4.4)$$

であり $h_j^{(t_f)}$ は $h^{(t_f)}$ の j コンポーネントである。

《補助定理1》 以下のような i と j に依存しない定数 $C_1 > 0$ が存在する。

$$E \{ |f_{ij}^{(t_f)} - E \{ f_{ij}^{(t_f)} \}|^2 \} \leq C_1 / t_f \quad (4.5)$$

(証明) (3.7)式より容易に

$$\begin{aligned} E \{ |f_{ij}^{(t_f)} - E \{ f_{ij}^{(t_f)} \}|^2 \} \\ = \frac{1}{t_f^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} E \{ X_{ij}(t) X_{ij}(s) \} dt ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

が得られる。ただし

$$\begin{aligned} X_{ij}(t) &= \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) \\ &\quad - E \left\{ \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

である。さらに

$$\begin{aligned} E \{ X_{ij}(s) X_{ij}(t) \} \\ = E \left\{ \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) \right. \\ \times \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(s)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(s)}{\partial x_m} \right) \Big\} \\ - E \left\{ \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) \right. \\ \times E \left\{ \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(s)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(s)}{\partial x_m} \right) \right\} \Big\} \end{aligned}$$

となり、さらに $u(t)$ がガウス過程であることより、 $E \{ [u(t) \otimes u(s), u(t) \otimes u(s)] \} = 2[\Lambda(t, s), \Lambda(t, s)]$ となるので

$$\begin{aligned} E \{ X_{ij}(t) X_{ij}(s) \} \\ = 2 \sum_{p,m=1}^n \sum_{q,r=1}^n E \left\{ \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, E \left\{ \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(s)}{\partial x_r} \right\} \right) \right. \\ \left. \times \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial u(s)}{\partial x_m} \right) \right\} \\ = 2 \sum_{p,m=1}^n \sum_{q,r=1}^n \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_r} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial \Lambda(t, s)}{\partial x_r} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \phi_j \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\phi_i \frac{\partial A(t, s)}{\partial x_q} \right)^* \right)$$

ここで $[\cdot, \cdot, \cdot]$ はヒルベルト・シュミット作用素の内積を表す。(3.2d)式より

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \xi \right|^2 \leq \sum_{p, m=1}^n \sum_{k, r=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \lambda_r} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_p}, \frac{\partial \phi_r}{\partial x_p} \right) \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_m}, \xi \right) \left(\frac{\partial \phi_r}{\partial x_m}, \xi \right)$$

((3.2c)式より)

$$= \sum_{p, m=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_m}, \xi \right)^2$$

(グリーンの公式より),

$$= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\phi_k, \frac{\partial \xi}{\partial x_m} \right)^2$$

((3.2b)式より)

$$= \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_m}, (-\Delta)^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x_m} \right)$$

(文献12) p. 192より)

$$= \sum_{m=0}^n \left| \frac{\partial \xi}{\partial x_m} \right|_{H^{-1}}^2$$

(文献13) p. 85より)

$$\leq C |\xi|^2 \quad (4.10a)$$

となり, さらに ϕ_i は H の直交基底より

$$|\phi_i|^2 = 1 \quad (4.10b)$$

が得られるので, 結局

$$E \{ X_{ij}(t) X_{ij}(s) \} \leq C |A(t, s)|_{L_2(V'; V)}^2 \quad (4.11)$$

という関係が得られる。ゆえに

$$\begin{aligned} E \{ |f_{ij}^{t_f} - E \{ f_{ij}^{t_f} \}|^2 \} &\leq \frac{C}{t_f^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} |A(t, s)|_{L_2(V'; V)}^2 dt ds \\ &\leq \frac{C}{t_f} \left(\int_0^{t_f} |A(\tau)|_{L_2(V'; V)}^2 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{-t_f}^0 |A(\tau)|_{L_2(V'; V)}^2 d\tau \right) \\ &\leq \frac{C}{t_f} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |A(\tau)|_{L_2(V'; V)}^2 d\tau \right) \\ &\leq C/t_f \end{aligned} \quad (4.12)$$

が導出できる。

《補助定理2》 以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow \infty} f_{ij}^{t_f} &= \sum_{p, m=1}^n t_f \left\{ \phi_i \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \phi_j \frac{\partial}{\partial x_m} A(0) \right)^* \right\} \\ &= \sum_{p, m=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \\ &\quad \left. \phi_i \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial x_m} A(0) \right)^* \right] \text{ a. s. } \quad (4.13) \end{aligned}$$

(証明) 定理3と u 過程のガウス性より容易に (4.13)式は導出できる。詳細は文献11)と14) p. 69を参照されたい。

《補助定理3》 j と t_f に無関係な $C_3 > 0$ が存在する。

$$E \{ |h_j^{t_f}|^2 \} \leq C_3 \left(\frac{1}{t_f} + |I_j(k)|^2 \right) \quad (4.14)$$

ただし $I_j(k)$ は以下の (4.16)式で与えられ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j(k)|^2 = 0 \quad (4.15)$$

を満たす。

(証明) まず

$$\begin{aligned} I_j(k) &= \frac{1}{t_f} E \left\{ \int_0^{t_f} \sum_{p, m=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* (a^0(x) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sum_{q=1}^k a_q^0 \phi_q(x) \right) \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) dt \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

とおく。シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j(k)|^2 &\leq \left\{ \frac{C}{t_f} E \left\{ \int_0^{t_f} |u(t)|^2 dt \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \left| a^0 - \sum_{q=1}^k a_q^0 \phi_q \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

となり, さらに補助定理2の証明で用いた $u(t)$ が定常エルゴード性をもつ (文献14) p. 69) ことより

$$\leq \tilde{C} |A(0)|_{L_2(V'; V)}^2 \left| a^0 - \sum_{q=1}^k a_q^0 \phi_q \right|^2 \quad (4.17)$$

が得られ, 結局 (4.15)式が得られる。

一方 (4.1)式より

$$\begin{aligned} E \{ |h_j^{t_f}|^2 \} &\leq 3E \left\{ \frac{1}{t_f^2} \int_0^{t_f} \int_0^{t_f} \left\{ \sum_{p, m=1}^n \left(\phi_i \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \sum_{q=k+1}^{\infty} a_q^0 \phi_q \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) - I_j(k) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sum_{p, m=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \sum_{q=k+1}^{\infty} a_q^0 \phi_q \frac{\partial u(t)}{\partial x_m} \right) - I_j(k) \right\} ds dt \right\} \\ &\quad + 3E \left\{ \frac{1}{t_f^2} \int_0^{t_f} \sum_{p=1}^n \left(\phi_j \times \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} dw(t) \right) \right\}^2 + 3 |I_j(k)|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られる。補助定理1の結果を導くのと同様の方法を用いれば,

$$(4.18) \text{式の右辺第一項} \leq C/t_f \quad (4.19)$$

となる。さらに

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \left| \frac{1}{t_f^2} \int_0^{t_f} \sum_{p=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} dw(t) \right) \right|^2 \right\} \\
&= E \left\{ \frac{1}{t_f^2} \int_0^{t_f} \sum_{p,m=1}^n \left(\phi_j \frac{\partial u}{\partial x_p}, \frac{\partial}{\partial x_p} (-\Delta)^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} Q \right)^* \phi_j \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dt \right\} \\
&\leq \frac{C}{t_f} |A(0)|_{L_1(V', V)} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

が得られ、この定理の結論が得られる。

《定理 4》 もし $k \rightarrow \infty$ および $t_f \rightarrow \infty$ でかつ $k/t_f \rightarrow 0$ を満足すると、推定値 $\hat{a}_k^{t_f}$ は以下の意味の一致性を満たす。

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \sum_{p,m=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} (-\Delta)^{-1} \right)^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\left(\hat{a}_k^{t_f} - a^0 \right) \frac{\partial A(0)}{\partial x_m} \right)^* \right) \right|_{L_2(H; H)} \\
&= 0 \text{ in probability} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

(証明) 補助定理 3 より

$$\begin{aligned}
E \{ |F^{(t_f)}(\hat{a}_k^{t_f} - a^0(k))|^2 \} &= \sum_{j=1}^k E \{ |h_j^{(t_f)}|^2 \} \\
&\leq C \left(\frac{k}{t_f} + \sum_{j=1}^{\infty} |I_j(k)|^2 \right) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

が得られる。さらに補助定理 2 より (4.22) 式の極限をとり、 $k/t_f \rightarrow 0$ を考慮すれば、(4.22) 式左辺はゼロに収束することが証明できる。さらに補助定理 2 より $F^{(t_f)}$ の各要素が確率 1 で (4.13) 式右辺に収束することより、(4.22) 式が 2 乗平均の意味で得られ、それより確率収束が証明される。

定理 4 において証明されたパラメータの一致性は単に近似したパラメータ空間の次元 k を増やすだけではなく、 $k/t_f \rightarrow 0$ という条件が必要であり、直感的に類推されるように単に次元を増やせばよいのではないことに注意されたい。

さて (4.12) 式の直感的な意味は、以下のようになる。 $A(0)$ は状態量の定常 2 次モーメントであり、作用素 $(-\Delta)^{-1}$ で二階偏微分をうち消していると考えられるので、(4.21) 式左辺の重みは、状態量の定常 2 次モーメントの二階偏微分のようなものになっている。未知係数が熱拡散係数であるので、このような重みがあるのは、当然であろう。この重みの正定性は、次章のような特別な場合証明することができる。

5. 例 題

$G =]0, 1[\subset R^1$ の場合を考えてみよう。(4.21) 式は

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\hat{a}_k^{t_f} - a^0 \right) \frac{\partial A(0)}{\partial x} \right)^* \right|_{L_2(H; H)} \\
&= 0 \text{ in probability} \quad (5.1)
\end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\hat{a}_k^{t_f} - a^0 \right) \frac{\partial A(0)}{\partial x} \right)^* \\
&= \int_0^1 \left(\hat{a}_k^{t_f}(y) - a^0(y) \right) \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} (\cdot) dy \quad (5.2)
\end{aligned}$$

となり、ここで $A(x, y)$ は $A(0)$ の核関数である。(5.1) 式は

$$\lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \hat{a}_k^{t_f}(x) = a^0(x) \text{ in probability, a. e. in } \tilde{G} \quad (5.3)$$

となり、ただし

$$\tilde{G} = \left\{ x \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} dy > 0 \right. \right\} \subseteq G =]0, 1[\quad (5.4)$$

である。

さらに $\tilde{C}$ と G の明確な一致を検証すればよいのであるが、それには $(\partial^2 A(x, y) / \partial x \partial y)^2$ の正値性を調べなくてはならない。非負性は容易にわかるが、正値性は非常に難しく $A(x, y)$ が未知パラメータを含んでいるために一般的な解析は困難である。そこでこの例題では以下のような場合を考える。

文献 15) より $A(a^0)$ は以下のように固有関数表現で表わすことができる。

$$\langle A(a^0) e_i, \phi \rangle = \lambda_i \langle e_i, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V \quad (5.5a)$$

$$0 < \alpha \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \quad (5.5b)$$

ただし e_i は H の直交基底であり D で値をとり、 e_i および λ_i は $a^0(x)$ に依存する。

(C-4) システム雑音 w は以下のように書ける。

$$w(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) e_i(x) \quad (5.6)$$

ただし e_i は (5.5) 式を満足する直交基底とし、 $w_i(t)$ は相互独立で分散 $q_i > 0$ をもち $\sum_{i=1}^{\infty} q_i < \infty$ を満足する。

この条件はシステムのすべての次元に、独立なシステム雑音が混入していることを表わしている。

条件 (C-4) より共分散作用素 Q は

$$Q = \int_0^1 \sum q_i e_i(x) e_i(y) (\cdot) dy \quad (5.7)$$

となる。

条件 (C-4) のもとで $A(x, y)$ を計算してみよう。半群の性質より、容易に

$$A(0) = \int_{-\infty}^0 T_{-s} Q T_s^* ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{2\lambda_i} e_i \otimes e_i \quad (5.8)$$

が得られ、 A の核関数は

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{2\lambda_i} e_i(x) e_i(y) \quad (5.9)$$

となる。さらに $a^0(x) \geq \alpha > 0$ より $(\partial^2 A(x, y)/\partial x \partial y)$ の正値性の代わりに、以下の正値性を調べれば十分であろう。

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} a^0(y) \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x \partial y} dy$$

(5.9)式を用い、(5.5a)式より容易に

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i^2}{4\lambda_i} \left| \frac{\partial e_i(x)}{\partial x} \right|^2 \quad (5.10)$$

が得られる。ここで $\partial e_i/\partial x = 0$ となるような集合 $\dot{G} \subseteq G$ が存在したとしよう。すると

$$A(a^0 e_i) = 0, \quad \text{a. e. } \dot{G} \quad (5.11)$$

となり、これは(5.5b)式の固有値がすべて正値であることに矛盾し、このような集合 $\dot{G}$ が存在しないことになる。すなわち

$$\lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \hat{a}_k^{(t_f)}(x) = a^0(x) \quad \text{in probability, a. e. in } G \quad (5.12)$$

が証明される。

この場合、(3.6)式の $F^{(t_f)}$ の可逆性も証明できたことになり推定アルゴリズムも容易に

$$\hat{a}^{(t_f)}(x) = (F^{(t_f)})^{-1} g^{(t_f)} \quad (5.13)$$

と導出できる。ただし $(-A)^{-1}$ は差分あるいは有限要素法などで数値的に実現するのが一番簡単な方法であろう。

6. 結 言

定理4と同様の結果は、未知係数が $a_{ij}(x)$ のときも同じ結果が得られる。5章の結果はもっと一般の場合にも容易に拡張可能と思われるが、計算が複雑になり現時点では完全な結果は得られていない。

それより重要なことは、どのように Q を同定するかという問題である。それには H 上で $Q=I$ の場合(位置 x に関する白色性を含む場合に相当する)に全

議論を拡張すればよいのかであるが、その場合の定理1もいまだよくわからない部分があり、以後の課題である。

参 考 文 献

- 1) A. V. Balakrishnan: Identification and Stochastic Control of a Class of Distributed Parameter Systems with Boundary Noise, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 107 (1975)
- 2) R. F. Curtain and P. Kotelenez: Stochastic Model for Uncertain Flexible Systems, Automatica, **23**, 657/661 (1987)
- 3) U. Grenander: Abstract Inference, John Wiley (1981)
- 4) H. Nguyen and T. D. Pham: Identification of Non-stationary Model by the Method of Sieves, SIAM J. on Control and Optimization, **20**, 603/611 (1982)
- 5) A. Bagchi: Identification for a Hereditary System with Distributed Delay, System & Control Letters, **5**, 339/345 (1985)
- 6) R. A. Adams: Sobolev Spaces. Academic Press (1975)
- 7) A. Bensoussan: Filtrage Optimal des System Lineaires, Dunod (1971)
- 8) E. Pardoux: Equations aux Derivees Partielles Stochastiques Non Lineaires Monotone, Thesis, Universite Paris XI (1975)
- 9) S. Mizohata: The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press (1973)
- 10) H. Tanabe: Equations of Evolutions, Pitman (1979)
- 11) S. I. Aihara and Y. Sunahara: Identification of an Infinite Dimensional Parameter for Stochastic Diffusion Equations, SIAM J. on Control and Optimization, **26**, 1062/1075 (1988)
- 12) J. L. Lions: Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires, Dunod (1969)
- 13) J. L. Lions and E. Magenes: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, 1, Springer-Verlag (1972)
- 14) E. Wong: Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems, McGraw-Hill (1971)
- 15) J. W. Jerome: On the L_2 n -width of Certain Classes of Functions of Several Variables, J. Math. Anal. Appl., **20**, 110/123 (1967)