デッドビート観測器を併用したディスクリプタシステムの

デッドビートレギュレーション†

南 出 成 康*・有 井 伸 喜*・植 竹 洋 一*

Deadbeat Regulation of Descriptor Systems by the Combined

Deadbeat Observer-Controller Compensation

Nariyasu MINAMIDE*, Nobuki ARII* and Youichi UETAKE*

Closed form solutions to the full order deadbeat observer and the deadbeat state regulator are derived for the multivariable descriptor system. With the deadbeat observer-controller implemented for state regulation, the deadbeat action of the overall system is attained.

Key Words: deadbeat observer, deadbeat regulator, descriptor systems, observer canonical form, controller canonical form

1. ま え が き

通常の状態空間で記述されたシステムに対するデッドビート制御については、これまでに十分な検討が加えられてきている¹⁾。本稿ではディスクリプタシステムのデッドビート制御について、ディスクリプタ標準形記述のもとで、デッドビート状態観測器の設計、デッドビートレギュレータの設計について考察を加える。レギュレータにデッドビート状態観測器を併用した場合、系全体としてのデッドビートな振舞いが期待される。これは状態観測器とレギュレータとが分離可能な事実²⁾に基づくものである。

2. 問 題 提 起

考察するシステムは、つぎの差分方程式

$$\begin{aligned} E_1 x_{i+1} &= A_1 x_i + B_1 u_i \\ y_i &= C x_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

で記述される多入出力ディスクリプタシステムとする。ここに、 $x_i \in R^n$, $y_i \in R^p$, $u_i \in R^m$ とする。以下では、つぎの仮定をおく。

仮定 1 : 系(2.1)は Rosenbrock の意味で可制御かつ可観測である³⁾。

仮定 2 : $|zE_1 - A_1| \neq 0$ ($|A|$ は行列式の値を示す)

† 第 31 回自動制御連合講演会で発表 (1988・10)

* 三重大学工学部 津市上浜町 1515

* Faculty of Engineering, Mie University, Tsu
(Received December 16, 1988)

(Revised March 27, 1989)

仮定 3 : B_1 および C は最大階数をもつ。

いま、(2.1)式両辺に $-\sigma E_1 x_i$ を加えると

$$E_1(x_{i+1} - \sigma x_i) = (A_1 - \sigma E_1)x_i + B_1 u_i$$

が得られる。仮定 2 より $|A_1 - zE_1| \neq 0$ なので適当な $\sigma \neq 0$ を選び $Q \triangleq A_1 - \sigma E_1$ が正則となるようにする。このとき上式は

$$E(x_{i+1} - \sigma x_i) = x_i - B u_i \quad (2.2)$$

$$y_i = C x_i \quad (E = Q^{-1}E_1, B = Q^{-1}B_1)$$

と書き直される。(2.1)式の系では、状態変数を記述するのに 3 個の行列 (E_1, A_1, B_1) を用いているが、(2.2)式の系では、2 個の行列 (E, B) を用いているだけである。この意味で、(2.2)の系をディスクリプタ標準形式と呼ぶ。このとき、つぎの補題が成立する。

[補題 2.1]³⁾ (2.2)の系について、つぎが成立する。

(1) (E, B) は可制御、かつ $\text{rank } B = m$ である。

(2) (C, E) は可観測、かつ $\text{rank } C = p$ である。

さて、以上の仮定および標準形記述のもとで、制御目的は入出力情報に基づいて、系(2.2)の x_i を有限時間で原点に到達させる制御機構を設計することである。

3. デッドビート観測器の設計

つぎの n 次差分系

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= \{\sigma I + (E + KC)^{-1}\} \xi_i \\ &\quad + (E + KC)^{-2} K y_i + (E + KC)^{-1} B u_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

の状態 ξ_i を用いて、 x_i の推定値

$$\hat{x}_i = \xi_i + (E + KC)^{-1} K y_i \quad (3.2)$$

を定義する。このとき、真の状態 x_i との誤差 $e_i = \hat{x}_i - x_i$ は、つぎの差分方程式に従う。

$$e_{i+1} = \{\sigma I + (E + KC)^{-1}\} e_i \quad (3.3)$$

いま、この特性多項式 $\varphi(z)$ が、つぎの条件

$$\varphi(z) = |zI - \{\sigma I + (E + KC)^{-1}\}| = z^n \quad (3.4)$$

を満足すれば、誤差 e_i は有限時間でゼロに収束する。

以下では、具体的に条件(3.4)を満足するゲイン行列

K の決定方法について検討を加える。

補題(2.1)より, (C, E) は可観測となるので適当な座標変換を用いると, (2.2)の系はつぎの可観測正準形で記述される。

$$\begin{aligned}\bar{E} &= TET^{-1} = \text{diag}[D_{\nu_1}, \dots, D_{\nu_p}] + E_0 C_0 \\ \bar{C} &= CT^{-1} = C_1 C_0\end{aligned}$$

ここに $\{\nu_i\}$ は可観測指数⁵⁾であり,

$$\sigma_i = \nu_1 + \dots + \nu_{i-1}, \quad \hat{\sigma}_i = \nu_1 + \dots + \nu_i$$

とすると,

$$\begin{aligned}E_0 &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1} & H_{p2} & \dots & H_{pp} \end{bmatrix} \in R^{n \times p} \\ H_{ij} &= [h_{\sigma_i+1,j} \ h_{\sigma_i+2,j}, \dots, h_{\hat{\sigma}_i,j}]' \in R^{\nu_i} \\ C_0 &= \text{diag}[c(\nu_1) \cdots c(\nu_p)], \quad c(\nu_i)' = [10 \cdots 0]' \in R^{\nu_i} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \times & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \times & & \times & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{\nu-1} \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix}\end{aligned}$$

である。いま, $\bar{K} = TK$ とおき, $\bar{K}C_1$ として

$$\bar{K}C_1 = -E_0 + \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_p]$$

$$k_i = [k_{\sigma_i+1,i}, \dots, k_{\hat{\sigma}_i,i}]' \in R^{\nu_i}$$

と定めると

$$(\bar{E} + \bar{K}\bar{C})^{-1} = \text{diag}[K_1^{-1}, \dots, K_p^{-1}] \quad (3.5)$$

$$K_i = k_i c(\nu_i) + D_{\nu_i}$$

となるので

$$|(z-\sigma)I - (E + KC)^{-1}| = \prod_{i=1}^p |(z-\sigma)I - K_i^{-1}|$$

が得られる。これより, つぎの単入出力系の場合に対する設計問題に帰着された。

$$K_0 = k \cdot c(\nu) + D_{\nu} \in R^{\nu \times \nu}, \quad k = [k_1 \cdots k_p]'$$

とすると,

$$\begin{aligned}|(z-\sigma)I - K_0^{-1}| &= (z-\sigma)^{\nu} + \frac{k_{\nu-1}}{k_{\nu}}(z-\sigma)^{\nu-1} + \dots \\ &\quad + 1/k_{\nu} z^{\nu}\end{aligned} \quad (3.6)$$

が恒等的に成立するような $\{k_i\}$ を決定せよ。

この問題は, (3.6)式両辺で z の代わりに $z+\sigma$ を考えると, 容易に解くことができ, 二項係数により

$$\begin{aligned}k_i &= \{\nu C_i\} \sigma^{i-\nu} \quad (i=1, 2, \dots, \nu-1) \\ k_{\nu} &= \sigma^{-\nu}\end{aligned} \quad (3.7)$$

を得る。ここで, $|A_1 - \sigma E_1| \neq 0$ とする $\sigma \neq 0$ を選んでおくと, $|K_0| = k_{\nu} = \sigma^{-\nu} \neq 0$ となり, K_0 は正則となる。同様に, (3.5)式における K_i ($i=1, \dots, p$) に対し, k_i を(3.7)式のように定めると $|E + KC| = |K_1^{-1}| \cdots |K_p^{-1}| \neq 0$ となる。

以上の考察により, デッドビート応答を与えるゲイン行列 K の導出が得られた。

4. デッドビートレギュレータ

つぎの状態フィードバック制御

$$u_i = -Fx_i + v_i \quad (v_i: \text{外部入力})$$

を用いて, (2.2)の系の閉ループ系の特性多項式 $\phi(z)$ がつぎの条件

$$\phi(z) = |(z-\sigma)E - I + BF| = \text{const } z^q \quad (4.1)$$

を満足するように, フィードバックゲイン F を決定する方法について考察する。(2.2)式は非因果的なシステムも含む表現であるが, 以下に示される設計法に従って, 状態フィードバックゲイン F を決定すると,

$$q = \text{rank}[E] \quad (4.2)$$

が成立し, したがって入力 v_i (この場合 $v_i = 0$ であるが) の未来値に依存しない閉ループ系が構成される⁴⁾。

仮定より (E, B) は可制御であるので, 適当な座標変換により, つぎの可制御正準形に変換される。

$$\bar{E} = SES^{-1} = \text{diag}[D'_{\mu_1}, \dots, D'_{\mu_m}] + B_0 E_0$$

$$\bar{B} = SB = B_0 B_1$$

ここに, $\{\mu_i\}$ は可制御指数⁵⁾であり

$$\rho_i = \mu_1 + \dots + \mu_{i-1}, \quad \hat{\rho}_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$$

とすると

$$\begin{aligned}E_0 &= \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{m1} & \dots & E_{mm} \end{bmatrix} \in R^{m \times n} \\ E'_{ij} &= [e_{i, \rho_j+1}, \dots, e_{i, \hat{\rho}_j}]' \in R^{\mu_j} \quad (j=1, \dots, m)\end{aligned}$$

である。また, B'_0, B'_1 は C_0, C_1 と同様に定義される。いま, $\bar{F} = F \cdot S^{-1} = B_1^{-1} F_0$ とすると次式を得る。

$$\begin{aligned}\phi(z) &= |(z-\sigma)E - I + BF| \\ &= \tilde{z}^{-n} |\tilde{z}I - D_0 - B_0(E_0 + \tilde{z}F_0)| \\ &= |I - (E_0 + \tilde{z}F_0)(\tilde{z}I - D_0)^{-1}B_0| \\ &= |[e_{ij}(z)]_{i,j=1,2,\dots,m}]|\end{aligned} \quad (4.3)$$

ここに, $\tilde{z} = (z-\sigma)^{-1}$ であり

$$\begin{aligned}D_0 &= \text{diag}[D'_{\mu_1} \cdots D'_{\mu_m}], \\ F_0 &= [F_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,m} \\ e_{ij}(z) &= \delta_{ij} - (E_{ij} + \tilde{z}F_{ij})[\tilde{z}^{-1}, \dots, \tilde{z}^{-\mu_j}]' \\ &= -e_{i, \rho_j}(z-\sigma)^{\mu_j} - \sum_{k=1}^{\mu_j-1} (e_{i, \rho_j+k} + f_{i, \rho_j+k+1}) \\ &\quad \cdot (z-\sigma)^k + (\delta_{ij} - f_{i, \rho_j+1})\end{aligned} \quad (4.4)$$

である。また, δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり, F_{ij} の要素は E_{ij} と同様に定義される。

以下では, つぎの行列

$$E_{\rho} = [e_{i, \rho_j}]_{i,j=1,2,\dots,m}$$

のランクにより, フィードバックゲイン行列 F_0 の選び方を決定する。まず, 可観測正準形 $\bar{E}$ と行列 E_{ρ} の定義よりつぎの補題が成立することに注意する。

〔補題 4.1〕

$$\text{rank}\{E\} = \text{rank}\{E_p\} + n - m$$

〔補題 4.2〕 いま、行列 E_p のランクは r であるとし、 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ 行および $(j_1, \dots, j_r)$ 列よりなる E_p の小行列式の値 $E_p(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_r) \neq 0$ とする。ここで $(1, 2, \dots, m)$ より $(i_1, \dots, i_r)$ (同様に、 $(j_1, \dots, j_r)$) を除いて得られる行 (同様に、列) を小さい順に $(i_1, i_2, \dots, i_{m-r})$ (同様に、 $(j_1, \dots, j_{m-r})$) とし、添字の集合 $\bar{I}$ を $\bar{I} = \{(i_s, j_s) | s=1, 2, \dots, m-r\}$ とおく。そして行列 F_0 の要素を次式のように定める。

(i) $(i, j) \in \bar{I}$ のとき

$$f_{i, \rho_j+k+1} = -e_{i, \rho_j+k} + e_{i, \rho_j} \{ \mu_j C_k \} \sigma^{\mu_j-k} \quad (k=1, 2, \dots, \mu_j-1) \quad (4.5a)$$

$$f_{i, \rho_j+1} = \delta_{ij} + e_{i, \rho_j} \sigma^{\mu_j}$$

(ii) $(i, j) \in \bar{I}$ のとき

$$f_{i, \rho_j+k+1} = -e_{i, \rho_j+k} + e_{i, \rho_j} \{ \mu_j C_k \} \sigma^{\mu_j-k} - \{ \mu_j-1 C_k \} \sigma^{\mu_j-k-1} \quad (k=1, 2, \dots, \mu_j-1) \quad (4.5b)$$

$$f_{i, \rho_j+1} = \delta_{ij} + e_{i, \rho_j} \sigma^{\mu_j} - \sigma^{\mu_j-1}$$

このとき、

$$1) \quad \phi(z) = \pm z^{n-(m-r)} \cdot E_p(i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r) \quad (4.6)$$

$$2) \quad \deg \{ \phi(z) \} = \text{rank} \{ E \} \quad (4.7)$$

が成り立つ。

(証明) 行列 F_0 の要素を (4.5) 式のように定めると、(4.4) 式の $e_{ij}(z)$ は次式で与えられることに注意する。

$$e_{ij}(z) = \begin{cases} (-e_{i\rho_j})z^{\mu_j} & (i, j) \in \bar{I} \\ (-e_{i\rho_j})z^{\mu_j} + z^{\mu_j-1} & (i, j) \in \bar{I} \end{cases} \quad (4.8)$$

(4.8) 式の関係を (4.3) に用いると

$$\phi(z) = (\pm 1) \times$$

$$\begin{vmatrix} e_{i_1 j_1}(z) \cdots e_{i_1 j_r}(z) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{i_r j_1}(z) \cdots e_{i_r j_r}(z) & & 0 \\ 0 & & z^{\mu_{j_1}-1} & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & z^{\mu_{j_{m-r}}-1} & \end{vmatrix}$$

が得られる。したがって

$$\phi(z) = \pm E_p(i_1 \dots i_r; j_1 \dots j_r) z^{n-m+r}$$

が得られ、補題 4.1 より (4.7) 式を得る。

5. あとがき

以上、ディスクリプタシステムに対するデッドビート状態観測器のオブザーバゲインの決定法、デッドビートレギュレーションのためのフィードバックゲインの決定法について述べた。最後に、観測と制御の分離性²⁾より、レギュレータ系にデッドビート観測器を併用すれば、入出力情報に基づくデッドビート制御系が構成されることを指摘しておく。

参考文献

- 1) 今井弘之：デッドビート制御，計測と制御，**22**-7，606/613 (1983)
- 2) 川路，檜橋：ディスクリプタシステムに対するオブザーバの設計，計測自動制御学会論文集，**24**-2，141/148 (1988)
- 3) D. Cobb: Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29**-12, 1076/1082 (1984)
- 4) D. Cobb: Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Control, **33**-6, 1135/1146 (1981)
- 5) 古田，佐野：基礎システム理論，コロナ社 (1978)