温度補償型熱流計センサの測定誤差の対象材料依存性†

滝 谷 信 昭*

Dependence of Measurement Error with Temperature Compensating Type Heat Flux Transducers on Object Materials

Nobuaki TAKIYA*

This paper describes the error in the heat flux measurements with an expected transducer. In the heat flux measurements from a wall to environment with the usual heat flux transducer placed on the wall, the original heat flux q_0 and temperature θ_0 simultaneously change by placing the transducer. For the purpose of improvement on the measurement accuracy, the transducer with the function which compensates the temperature change is expected. In this transducer, it is the essential matter that the measurement error Δq depends on incompleteness of the temperature compensation $\Delta\theta$.

The relational formula $\Delta q/q_0 = -E(\Delta\theta/\theta_0)$ and this coefficient E are derived from the heat conduction equation and a certain integral formula of Bessel function. The analysis of E , as an example, is performed with a wall whose inner structure is composed of surface layer and inner layer. Then E depends on thermal conductivity and thickness of the surface layer λ_1 , d , thermal conductivity of the inner layer λ_0 , heat transfer coefficient of the wall surface α_0 , and size (radius) of the transducer R .

E is represented by three non-dimensional parameters $H = \lambda_0/(\alpha_0 R)$, λ_1/λ_0 , d/R in general case, by two parameters $(\lambda_1 d)/(\lambda_0 R)$, H in the case of $d \ll R$ and $\lambda_0 \ll \lambda_1$, and by one parameter $\lambda_1/(\alpha_0 R)$ in the case of $d \gg R$ or $\lambda_1 = \lambda_0$. E is found numerically in 0.05~10,000 on an approximate estimate. The required accuracy of temperature compensation is determined from E and the desired measurement accuracy, and numerical values of this are also described with typical wall materials and others.

Key Words: heat flux measurement, heat flux transducer, temperature compensation, heat conduction equation, Bessel function

1. ま え が き

周囲環境と異なる温度の物体表面(壁面)からは両者の温度差に応じた熱流(量は単位時間・単位面積当りのエネルギーである熱流密度 w/m^2 で表わされる)が生じている。この表面での熱流測定には、熱流による温度降下を検出するサーモパイルを内蔵した薄板状センサ¹⁾が用いられる。この測定はセンサを表面に設置(貼付)するだけでよく、高温物体からの熱損失を評価・管理し省エネルギー化を図るなどに、簡便な熱流計測法として利用されている。しかし、センサ設置部分の熱の伝達状態は設置前と一般には異なるから、センサで測定する熱流密度は本来のセンサ設置前熱流密度とは異なることになる。このような状態で使用されるセンサは、同一条件での時間的増減あるいは場所的差異を指示するなどには有効であるが、熱流密度の絶対値測定には不十分である。

センサ設置で熱伝達状態が変われば測定対象の温度変化を伴う。この温度変化を補償(もとの温度に戻す)すれば、センサ設置前後は同じ熱流密度状態となる。このようにして正しい熱流密度を求める熱流量測定法はすでに報告されている²⁾。したがって、このような補償のできるセンサ(温度補償型センサとする)を適切に設計・開発すれば、従来の管理計器のセンサに比べ、より正確な熱流密度測定が可能となり、熱流計測の精度向上を図ることができる。

本稿では温度補償型センサを想定する。このセンサの本質的問題点は、補償操作が不完全であれば熱流密度の測定誤差が生じることである。本稿では主にこの両者の関係を解析し、また所望の熱流密度測定精度を得るために要求される温度補償精度を示す。これによって種々の測定対象などの条件に対して、このセンサ

† 第32回応用物理学関係連合講演会で発表 (1985・3)

* 計量研究所 つくば市梅園 1-1-4

* National Research Laboratory of Metrology, Tsukuba

(Received March 31, 1989)

の適用可能性（望まれる測定精度および温度補償技術にも依存するが）を検討できる。

2. 温度変化と熱流密度変化の関係

内部温度が外部より高い均質な物体内部（および表面）では、Fig. 1(a)のように表面に直交した一様な熱流がある。温度分布は表面に平行な等温面をもつ。この表面にセンサを設置すると、センサの熱的特性に応じて一般にはFig. 1(b)または(d)のように熱流および温度が変化し、センサは変化（誤差）を含んだ熱流を測定することになる。温度補償機能をもつセンサを適切に設計して、表面温度をセンサ設置前温度と同じであるFig. 1(c)の状態に補償できれば、熱流はセンサ設置前後で同じ状態となり、正確な熱流密度測定ができる。

しかし、センサに温度補償機能を備えても、補償機能・操作の不完全さなどにより現実には微小温度変化は残り、熱流密度の測定誤差が生じる。センサ設置前の本来の表面温度および熱流密度を θ_0 , q_0 , センサを設置し温度補償操作をした後に残る温度および熱流密度の変化量を Δq , $\Delta \theta$ として

$$\frac{\Delta q}{q_0} = -E \frac{\Delta \theta}{\theta_0} \quad (2.1)$$

とおく。係数 E （温度補償係数とする）によって、熱流密度測定精度 ($\Delta q/q_0$) は温度補償精度 ($\Delta \theta/\theta_0$) と関係付けられる。係数 E を計算すれば温度補償型センサの適用可能性が検討できる。この検討では係数 E が測定対象の材質・構造に大きく依存することが本質的問題点となる。このため、本稿では係数 E の測定対象依存性の解析手法とその関係式を示す。

表現簡略化のため周囲環境温度は 0 とする。周囲環境温度が θ_c の場合は (2.1) 式を含め以降の式で現われるすべての温度 θ を $\theta - \theta_c$ で置き換えればよい。

なお、熱流は本質的にはベクトル量であるが、表面設置のセンサは表面との直行成分の熱流密度を測定するものであるから¹⁾、本稿の各式で示す熱流密度もこ

の成分を意味し、表面との平行成分の扱いは省略する。

3. センサ設置条件と計算対象の構造

3.1 センサ設置条件

本来はセンサ設置部は表面に対して凸部 (Fig. 1) となり、厚さなどのセンサ (凸部) 因子も測定誤差要因となる。センサは、それ自身がつも誤差要因の実効的除去に配慮して、適切に設計することが肝要である。

温度補償手法²⁾はセンサ熱抵抗（熱伝達係数の逆次元）可変法、センサ内熱流密度均質化温度可変法およびセンサ温度均質可変法を想定する。おのおのは、仮称であり、本稿で行うセンサ設置条件の3種の表面条件への置き換えに対応するように想定された手法である。

なお、本稿では測定誤差の測定対象依存性の解析が目的であり、センサ (凸部) 因子および設計・温度補償手法の不完全さにかかわる解析は別課題として省略する。したがって以下では、実効的にセンサ設置条件を表面条件で置き換えることができる温度補償手法を有する適切に設計されたセンサを想定して、このセンサの本質的問題点である測定対象依存性を解析する。

4章では、センサ設置条件を階段状熱伝達係数変化となる表面条件に置き換える。この条件で、グリーン関数を用いて単層表面の温度分布を積分方程式（温度分布は逐次近似による数値計算をして得られる）で表わし、さらに温度分布を平均値で置き換えて、熱伝達係数と熱流密度の関係の計算値を示した報告³⁾はある。

本稿では、ベッセル関数の積分公式に現われる階段特性を利用すれば、熱伝導方程式の解（温度分布）は積分式（非積分方程式など）で簡明に表わせることを示す。この解を基に温度変化と熱流密度変化おのおのおよび相互の関係式を r （簡略化のためセンサを円形とし、表面と平行な半径方向座標）および z （表面と直行する座標）依存性を含めて示す。 r 依存性によりセンサ内での熱流密度検出位置¹⁾、 z 依存性により温度補償をするための温度計設置位置、の影響を検討することができる。 r , z 依存性がどの程度遠方まであるかを計算すれば、対象の大きさの影響も検討できる。

また、センサ設置条件を階段状熱流密度変化および階段状温度変化となる表面条件で置き換えた場合の解析については5章で述べる。階段状熱伝達係数変化による解析と合せて比較し、異なる表面条件（すなわち異なる温度補償手法）でも測定対象依存性には本質的差異がないことを例示する。

3.2 計算対象の構造

温度補償型センサの適用可否は6質の数値例で示

Fig. 1 Changes of temperature and heat flux by placing a transducer: (b)~(d), initial state: (a)

Fig. 2 Sketch of calculated wall model

すように対象材質に大きく依存し、その熱伝導率が高い(金属)場合は相対的に高精度の温度補償が要求される。しかし、表面部分のみ熱伝導率が高い(内部は断熱材など)場合は温度補償も比較的容易となる。すなわち、対象の内部構造にも大きく依存する。これを示すためも含めて、本稿では表面材と内部材の二層構造の対象を基本モデルとして解析する。計算の簡略化のため、対象は十分大きくかつ各層は均質とする。より多重層でも、あるいは内部の有限位置で適当な条件を与えても、同様の解析手法で計算できるが、上述の構造物を用い、解析手法の記述を重点にする。

Fig. 2 で示すように、表面材および内部材の熱伝導率を λ_1, λ_0 とし表面材の厚さを d とする。この表面の一部(半径 R)のみがセンサ設置によって他の部分と異なる表面条件に変わるとする。表面材および内部材の温度分布 θ_1, θ_2 および熱流密度分布 q_1, q_2 の表示式は、座標の原点 $(0, 0)$ を表面の半径 R の中心とし、付録に別記した。これらの分布は、半径 R の大きさによって半径方向座標 r に、また表面からの距離 z (内部を $z < 0$ とする)に、依存する。

4. 階段状熱伝達係数となる表面条件の場合

4.1 温度分布および熱流密度分布

対象表面の熱伝達係数を α_0 とする。これは、表面温度 θ_0 と周囲環境温度(2章で述べたように 0 とする)の差と、表面熱流密度 q_0 とを関係付ける係数であり、

$$q_0 = \alpha_0 \theta_0 \quad (4.1)$$

と表わされる。センサ設置によって、表面の半径 R の径内の熱伝達係数が $\Delta\alpha$ (Fig. 2 では $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$) だけ変化したとする。単位階段関数 $I(x)$ を

$$I(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases} \quad (4.2)$$

と定義すれば、変化後の表面熱伝達係数 $\alpha(r)$ は

$$\alpha(r) = \alpha_0 + \Delta\alpha I(r/R) \quad (4.3)$$

と表わせる。表面の温度分布 $\theta_1(r, 0)$ と熱流密度分布 $q_1(r, 0)$ の関係は、(4.1)式に換わって、

$$q_1(r, 0) = \alpha(r) \theta_1(r, 0) \quad (4.4)$$

となる。この式を満足するよう、付録で未定とした積分重み関数 $cB(\beta)$ を定めれば、温度分布は求まる。ここでは階段特性を示すつぎの積分公式⁴⁾を利用する。

$$\int_0^\infty J_1(\beta) J_0(\beta r/R) d\beta = I(r/R) \quad (4.5)$$

J_n は n 次ベッセル関数であり、この公式を適用することが解析の要点である。 c と $B(\beta)$ は次式となる。

$$c = \Delta\alpha/\alpha_0 \quad (4.6)$$

$$B(\beta) = \frac{J_1(\beta)}{1 + H\beta h(\beta)} \quad (4.7)$$

ここで、 H および (A.9), (A.11) 式を用いた $h(\beta)$ は、

$$H = \frac{\lambda_0}{\alpha_0 R} \quad (4.8)$$

$$h(\beta) = G(\beta, 0)/F(\beta, 0) = \frac{1 + (\lambda_1/\lambda_0) \tanh(\beta d/R)}{1 + (\lambda_0/\lambda_1) \tanh(\beta d/R)} \quad (4.9)$$

である。(4.7)式の $B(\beta)$ はつぎの手順で定めた。① (A.1), (A.4) 式から θ_1 , (A.6), (A.10) 式から q_1 の式を求める。② θ_1, q_1 の各式で $z=0$ として (4.3) 式とともに (4.4) 式に代入する。③ (4.1), (4.8), (4.9) 式を用い、 $cB(\beta)$ に関して整理し、(4.5), (4.6) 式を適用する。

なお、ここでは温度補償操作で $\Delta\theta$ を微小量にすること(したがって $\Delta\alpha$ も微小量)を前提にして、 $\Delta\alpha$ の 2 次微小量 $(\Delta\alpha)^2$ 以下は無視できるとした。

4.2 表面の温度変化および熱流密度変化

表現簡略化のためにつぎの関数を導入する。

$$U(r) = \int_0^\infty B(\beta) J_0(\beta r/R) d\beta \quad (4.10)$$

この式を用いれば、表面 ($z=0$) の温度変化および熱流密度変化は

$$\frac{\Delta\theta_1(r, 0)}{\theta_0} = -\frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} U(r) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q_1(r, 0)}{q_0} &= \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0} \{I(r/R) - U(r)\} \\ &= -\left\{ \frac{I(r/R)}{U(r)} - 1 \right\} \frac{\Delta\theta_1(r, 0)}{\theta_0} \\ &= -E_s(r) \frac{\Delta\theta_1(r, 0)}{\theta_0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。ここで

$$E_s(r) = \frac{I(r/R)}{U(r)} - 1 \quad (4.13)$$

である。(4.11)式は (A.4) 式で $z=0$ とし、(4.6), (4.10) 式を用いて導いた。(4.12)式は、(4.1), (4.5) ~ (4.9) 式を用いて、 $z=0$ とした (A.10) 式を整理し、(4.10), (4.11) 式を用いて導いた。

付言すると、積分は積分変数 β を微小量ずつ換えた値の総和と同等であるから、コンピュータを用いれば、(4.10)式および以降に現われる積分に関する式は単純和（非逐次近似）で容易に計算できる。

4.3 温度補償係数の式

(4.12)式は温度補償係数 E を導入した(2.1)式と同じ表現式であり、(4.13)式の $E_s(r)$ は表面での（ r 依存性も含めた）温度補償係数に相当する。簡明化のため、この節以降では表面中心（ $r=z=0$ ）の(2.1)式相当の係数を温度補償係数 E とする。

(1) 二層の場合

(4.13)式で $r=0$ とし、(4.2)、(4.7)、(4.10)式を用いれば、次式を得る。なお、 $J_0(0)=1$ である。

$$E = \left[\int_0^\infty \frac{J_1(\beta)}{1 + H\beta h(\beta)} d\beta \right]^{-1} - 1 \quad (4.14)$$

係数 E は H と $h(\beta)$ の関数となる。(4.9)式から $h(\beta)$ は λ_1/λ_0 と d/R の関数である。すなわち係数 E は 3 個（ H 、 λ_1/λ_0 、 d/R あるいはこれらを組合せた別の 3 個）の無次元パラメータによって表わされる。

パラメータを H 、 λ_1/λ_0 および d/R として、 $H=1$ の場合の計算値例を Fig. 3 に示す。また、パラメータを H 、 λ_1/λ_0 および

$$L = \frac{d}{R} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (4.15)$$

として、 $H=0.1$ の場合の計算値例を Fig. 4 に示す。

Fig. 3, Fig. 4 とともに、 λ_0 が一定であれば、 λ_1 が大きいほど係数 E は大きくなることを示している。

(2) 簡略化できる場合

(2-a) 単層の場合

測定対象が単層（ $\lambda_0=\lambda_1$ ）の場合には(4.9)式は $h(\beta)=1$ となり、(4.14)式から次式を得る。

Fig. 3 Dependence of E on λ_1/λ_0 and d/R with $H=1$

Fig. 4 Dependence of E on λ_1/λ_0 and L with $H=0.1$

Fig. 5 Dependence of E/H on H with $\lambda_1=\lambda_0$

$$E = \left[\int_0^\infty \frac{J_1(\beta)}{1 + H\beta} d\beta \right]^{-1} - 1 \quad (4.16)$$

係数 E は 1 個の無次元パラメータ H のみの関数となる。 E/H の計算値を Fig. 5 に示す。 $E/H=1$ となる。 $\delta(H)$ をこの曲線の縦軸値 -1 とすれば、つぎの式で表わすことができる。

$$E = \{1 + \delta(H)\} H \equiv H \quad (4.17)$$

$$: \delta(H) = 0 \sim 0.17 \sim 0$$

(2-b) 表面材が薄く $\lambda_1 \gg \lambda_0$ の場合

Fig. 4 の曲線で、 $\lambda_1/\lambda_0 > 5$ かつ横軸 L の値が $\circ$ 印（ $d=R$ の点）の L の値の約 $1/5$ 以下の部分は左端の曲線に収束している。(4.15)式からこの部分は表面材が薄い部分（ $d/R < 0.2$ ）である。この例で示されるように $\lambda_1 \gg \lambda_0$ かつ $d \ll R$ での係数 E は、パラメータを L にとればある H に対して Fig. 4 の左端曲線のような単一曲線となる。この曲線は次式で表わされる。導入過程は省略するが、その要点は $x \ll 1$ での双曲線関数の近似式 $\tanh(x) \doteq x$ を(4.9)式に用いて(4.14)式の実効的計算値が得られる部分に相当する。

$$E = \left[\int_0^\infty \frac{J_1(\beta)}{1 + H\beta(1 + L\beta)} d\beta \right]^{-1} - 1 \quad (4.18)$$

E は、2 個の無次元パラメータ H 、 L で表わされる。(4.15)式により、表面材に関しては熱伝導率と厚さの積にのみ依存する。(4.18)式による係数 E の計算値を横軸を H として Fig. 6 に示す。 L が大きいほど E は大となる。 $L=0$ （ $d=0$ ）の曲線は単層の曲線であり、Fig. 5 と同じ（縦軸 E/H を E に換えた）曲線である。

(2-c) 表面材が十分厚い場合

Fig. 3, 4 の各曲線右側の横軸平行部は表面材が十

Fig. 6 Dependence of E on H and L with $d \ll R$ and $\lambda_1 \gg \lambda_0$.

分厚い ($d \gg R$) 部分で、厚さに依存しないことを示している。この部分の係数 E は 1 個の無次元パラメータ

$$H' = \lambda_1 / (\alpha_0 R) \quad (4.19)$$

で表わされる。係数 E は (4.16) 式の H を H' に換えて得られる。すなわち横軸平行部分は表面材の単層と同等である。これらは $x \gg 1$ での双曲線関数の近似式 $\tanh(x) \approx 1$ を (4.9) 式に用いて導かれる。

見方を換えれば、二層を単層並に扱うことの適不適 (その差異) を Fig. 3, 4 から見積ることができる。

4.4 表面での半径方向依存性

この節では表面の温度変化および熱流密度変化の半径方向依存性を、単層を例に計算値を示す。 $\lambda_0 = \lambda_1$ とし、(4.7), (4.9) 式を用いれば、(4.10) 式は

$$U(r) = \int_0^\infty \frac{J_1(\beta) J_0(\beta r/R)}{1 + H\beta} d\beta \quad (4.20)$$

となる。これを (4.11), (4.12) 式に代入すれば、表面の温度分布および熱流密度分布を得る。計算値を $\Delta\alpha/\alpha_0$ との比で Fig. 7 に示す。熱流密度変化 (測定誤差

Fig. 7 Dependence of temperature and heat flux on r with $\lambda_1 = \lambda_0$.

に相当する) は中心ほど小さく、熱流密度検出位置¹⁾ は中心に近いことが望ましいこと (その程度) が示されている。 $r=R$ の境界で不連続・符号逆転が生じる。これは表面全体からの総熱流量保存に対応して、境界内 ($r < R$) で熱流密度の増減があれば境界外では逆方向の変化となることを示している。温度変化は中心ほど大きく、温度変化検出位置は中心が望ましいこと (その程度) が示されている。

4.5 中心軸上での z 方向依存性

この節では対象内部の温度変化の z 座標依存性を、単層・中心軸上を例にして述べる。 $\lambda_0 = \lambda_1$ とし、(A.9), (4.7), (4.9) 式を用い、 $r=0$ とした (A.4) 式は

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1(0, z) &= -\theta_0 c \int_0^\infty \frac{J_1(\beta) \exp(\beta z/R)}{1 + H\beta} d\beta \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる。ここでは表面近傍 ($|z| \ll R$) で、表面中心値 $\Delta\theta_1(0, 0)$ との比をとって簡略化する。(4.21) 式から $z=0$ での勾配を求め、 $r=0$ とした (4.5) 式, (4.16), (4.17) 式を使えば、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_1(0, z)}{\Delta\theta_1(0, 0)} &\approx 1 + z \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{\Delta\theta_1(0, z)}{\Delta\theta_1(0, 0)} \right) \right]_{z=0} \\ &= 1 + \{1 + \delta(H)\} (z/R) \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる。温度変化量は内部 ($z < 0$) ほど減少する。例示は単層であるが、このように、 z 依存性を求めれば温度補償用温度計を内部に設置する場合の位置依存性を見積れる。温度変化の少ない位置での変化量検出は温度補償の感度を悪化させる。

5. 異なる表面条件間の比較

この章ではセンサ設置条件を階段状熱流密度条件 (前章まで用いた記号に下付添字 q を付けて区別する) および階段状温度条件 (下付添字 r で区別する) で置き換えた場合の温度補償係数などを簡単に述べる。

初めに、階段状熱流密度条件での表面熱流密度変化を Δq_q とすれば、その表面条件は次式で表わされる。

$$q_{1q}(r, 0) = q_0 + \Delta q_q I(r/R) \quad (5.1)$$

この条件での積分重み関数 $cB(\beta)$ は (A.6), (A.10) 式から $q_{1q}(r, 0)$ を求めて (5.1) 式に代入し (4.1), (4.9), (4.5) 式を利用して定める。要点は (4.5) 式の積分公式を利用することである。表面材の温度変化は定めた $cB(\beta)$ と (A.4) 式から次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_{1q}(r, z)}{\theta_0} &= -\frac{\Delta q_q}{q_0} \int_0^\infty \frac{J_1(\beta) J_0(\beta r/R) F(\beta, z)}{H\beta h(\beta) F(\beta, 0)} d\beta \end{aligned} \quad (5.2)$$

この式は (2.1) 式と同等の表現式であり、この条件

での温度補償係数は直ちに求まる。単層の場合のみ例示する。\$r=z=0\$ とし、\$\lambda_1=\lambda_0\$ とした(4.9)式および \$J_1(\beta)/\beta\$ の積分公式⁴⁾を利用すれば次式を得る。

$$E_Q = H \left[\int_0^\infty \{J_1(\beta)/\beta\} d\beta \right]^{-1} \\ = H \quad (5.3)$$

つぎに、階段状温度条件での表面温度変化を \$\Delta\theta_T\$ とすれば、その表面条件は次式で表わされる。

$$\theta_{1T}(r, 0) = \theta_0 + \Delta\theta_T I(r/R) \quad (5.4)$$

この条件での積分重み関数 \$cB(\beta)\$ は (A.1), (A.4) 式で \$\theta_{1T}(r, 0)\$ を求めて (5.4) 式に代入し (4.5) 式を利用して定める。表面材の熱流密度変化は、この \$cB(\beta)\$ と (4.1), (4.8) 式を用いて (A.10) 式を整理すれば、

$$\frac{\Delta q_{1T}(r, z)}{q_0} \\ = -\frac{\Delta\theta_T}{\theta_0} \int_0^\infty \frac{J_1(\beta) J_0(\beta r/R) G(\beta, z) H \beta}{F(\beta, 0)} d\beta \quad (5.5)$$

となる。この式も (2.1) 式と同等の表現式であり、階段状温度条件での温度補償係数が求まる。単層の場合のみ例示する。\$r=0\$, \$\lambda_1=\lambda_0\$ として (A.9), (A.11) 式を用い、表面を \$z \rightarrow -0\$ の極限として、積分公式⁴⁾を利用 (このための極限操作である) すれば

$$E_T = H \cdot \lim_{z \rightarrow -0} \int_0^\infty J_1(\beta) \beta \exp(\beta z/R) d\beta \\ = H \quad (5.6)$$

となる。4章で得た階段状熱伝達係数条件での係数 \$E\$ を表わす (4.17) 式と (5.3), (5.6) 式を比べれば、異なる表面条件でも、温度補償係数 \$E\$ の違いは最大 17% にすぎなく、\$H\$ に対する依存性に本質的差異はないことが示されている。

6. 温度補償の必要精度 (数値例)

単層表面中心では、簡略化のため \$\delta(H)\$ を無視すれば、温度補償係数 \$E\$ は (4.17), (5.3), (5.6) 式でいずれも \$E=H\$ となり、(4.8) 式により (2.1) 式は、

$$\frac{\Delta q}{q_0} = -E \frac{\Delta\theta}{\theta_0} = -\frac{\lambda_0}{\alpha_0 R} \cdot \frac{\Delta\theta}{\theta_0} \quad (6.1)$$

となる。熱流密度測定誤差は、対象の熱伝導率 \$\lambda_0\$ に比例し、センサ (半径 \$R\$) が大きいほど小さくできる。

係数 \$E\$ は、およその数値として \$\lambda_0=0.1 \sim 400\$ (W/m/K), \$\alpha_0=4 \sim 40\$ (W/m\$^2\$/K), \$R=1 \sim 5\$ cm の範囲を考えれば、\$0.05 \sim 10,000\$ の広範囲の値となる。

熱流密度測定の所望精度 (ここでは \$\pm 5\%\$ とする) に対する温度補償の必要精度 (数値は \$\Delta\theta\$ で示す) の測定対象依存性を数値で例示する。表面状態に関する

数値は \$\theta_0=50^\circ\text{C}\$, \$\alpha_0=10\$ W/m\$^2\$/K, \$R=4\$ cm とする。対象の熱伝導率 (単位 W/m/K) として ① \$\lambda_0=0.2\$ (=断熱材), ② \$\lambda_0=20\$ (=ステンレス), ③ \$\lambda_0=200\$ (=アルミニウム) を例にとる。

(1) 単層の場合: (6.1) 式におおのの数値を直接入れれば、\$\Delta\theta\$ は ① \$\pm 5\$ K, ② \$\pm 0.05\$ K, ③ \$\pm 0.005\$ K となる。\$\lambda_0\$ が小の場合 ① は温度補償操作は容易であるが、\$\lambda_0\$ 大の場合 ③ は高精度の補償操作が要求される。

(2) 内部材が ① \$\lambda_0=0.2\$ で、\$d=2\$ mm の金属表面板 ② \$\lambda_1=20\$ または ③ \$\lambda_1=200\$ をもつ二層の場合: \$d \ll R\$ かつ \$\lambda_1 \gg \lambda_0\$ であり、(4.18) 式の計算あるいは Fig. 6 (②では \$H=0.5\$, \$L=5\$, ③では \$H=0.5\$, \$L=50\$ の点) から、②は \$E=3.8\$, ③は \$E=22\$ となる。\$\Delta\theta\$ は (6.1) の左の等号式から ②で \$\pm 0.7\$ K, ③で \$\pm 0.11\$ K となる。②, ③の単層の場合に比べれば温度補償は 1 桁以上容易となる。

ここでは特定した条件で \$\pm 5\%\$ の熱流密度測定精度を得るための温度補償の必要精度 (\$\Delta\theta\$) を例示した。このように表面および測定対象の条件を設定すれば、その条件に合せた温度補償精度と熱流密度測定精度の関係を温度補償係数を用いて計算できる。

温度補償係数の熱伝導率依存性について簡単に記す。温度補償誤差があれば、センサ設置近傍の熱流には Fig. 1(b), (d) のように表面に平行な熱流成分が含まれる。概略すればこの平行成分として横にそれる熱流量に応じて本来の直行成分が変化する。熱流は温度勾配と熱伝導率に比例する。同じ温度変化の場合には、平行成分は熱伝導率が大きいほど大きくなり、直行成分の変化量にかかわる温度補償係数も大きくなる。簡略化した (4.18) 式を使える場合 (係数 \$E\$ は積 \$\lambda_1 d\$ に依存する) は、平行熱流は熱伝導率 (\$\lambda_1\$) の大きい厚さ (流路) \$d\$ の表面材部分に集中的に流れることを意味している。

付記すれば、温度補償型センサによる熱流測定精度は測定対象に大きく依存し、温度の測定・補償 (制御) 技術などにも依存する。変化検出用温度計が測定対象内に設置してあれば、センサ設置前後の指示値を一致させるだけでよく (あるいは複数の測定から一致相当値を内挿・外挿してもよい²⁾) が温度補償精度を高めることは容易である。これを設置しなければ、センサ設置前の (あるいはこれと同などの) 表面温度計測値とセンサ (内蔵温度計を組込むなどして) 設置時の表面温度計測値を一致させるなどの操作を要する。また、熱流測定の精度向上を図る必要性は社会的・経済的状況 (たとえば省エネルギー問題での熱損失計測の必要

性の程度など)にもかかわる。このセンサの有用性についてはこれらの要因を考慮した総合的判断が必要であろう。本稿では検討資料を示すのみに留める。

7. あとがき

物体表面での熱流密度測定の精度向上を図れるセンサとして温度補償型センサを想定し、このセンサの本質的要因である温度補償精度と熱流密度測定誤差を関係付ける温度補償係数を解析した。

この係数は、測定対象の材質・構造などに依存するが、二層構造の対象の場合は、一般には3個の無次元パラメータで表わすことができ、条件によっては2個あるいは1個の無次元パラメータで簡略して表わすことができた。

この解析をするための温度分布(熱伝導方程式の解)は、ベッセル関数の積分公式に現われる階段特性を利用して、単純和相当の式で表わすことができた。

センサ設置条件は、これを表面条件で実効的に置き換えることのできる温度操作手法を想定し、三種の表面条件(階段状の熱伝達係数変化条件、熱流密度変化条件および温度変化条件)に置き換えて解析した。単層表面中心での数式を例に、温度補償係数の対象材質依存性は異なる温度補償手法を用いても本質的差異はないことを示した。

本稿では、温度補償型センサの適用可能性を検討する資料を示すことを主目的にして、温度補償係数の測定対象依存性などを解析した。適切なセンサを設計するためには、センサ因子による誤差要因解析や温度補償手法などの検討も必要となろう。

表面近傍に熱流源を設置した場合の温度変化と熱流密度変化の測定例はある²⁾が、熱流源の位置や大きさなどの条件が特殊であって新たな解析が必要であり、本稿の計算値と直接比較はできない。また、温度操作部を設けたセンサの試作例⁶⁾およびセンサ因子による誤差要因の解析などは、省略した。

終りに、本稿をまとめるに当たりご指導と有益なご助言をいただいた当所服部 晉所長に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) たとえば、日本機械学会編：熱計測技術，30，朝倉書店(1986)
- 2) 芝 亀吉：熱流量測定法，応用物理，28-1，21/26 (1959)
- 3) T. Baba, A. Ono and S. Hattori: Analysis of the Operational Error of Heat Flux Transducers Placed on Wall Surfaces, Rev. Sci. Instrum., 56-7, 1399/1401 (1985)
- 4) たとえば、森口，宇田川，一松：数学公式Ⅲ—特殊函

数一，192，198，岩波書店(1960)

- 5) 滝谷，馬場，服部：接断面温度補償型熱流計センサとその校正装置，第22回 SICE 学術講演会予稿集，3613/3614 (1983)
- 6) たとえば，川下研介：熱伝導論，199，オーム社(1971)

《付録 二層構造の温度分布・熱流密度分布》

ここでは、Fig. 2 (3章)の二層構造をもつ対象の表面の一部(半径 R)に熱伝達状態の変化が生じた場合の温度分布および熱流密度分布の表示式を示す。

付記しておく、ある座標での熱流密度はその座標での温度勾配と熱伝導率の積に負記号(熱流正方向を座標正方向と一致させるため)を付けて定義される。

表面材と内部材の温度分布をおのおの θ_1, θ_2 とする。これらは表面熱伝達状態の変化に応じて座標 (r, z) に依存して変化するから、次式で表わす。

$$\theta_1(r, z) = \theta_0 - \frac{q_0}{\lambda_1} z + \Delta\theta_1(r, z) \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_2(r, z) = \theta_0 - \frac{q_0}{\lambda_0} \left\{ z - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \right) d \right\} + \Delta\theta_2(r, z) \quad (\text{A.2})$$

$\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ は温度変化である。右辺の他の項は表面熱伝達状態の変化前(均質な対象内部の熱流密度は表面方向へ一様 q_0 となる)の温度分布を表わす。

ここでは定常状態についてのみ述べる。温度分布は熱伝導方程式(ラプラス方程式： $i=1, 2$)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

を満足しなければならない。ラプラス方程式の基本的解法である座標依存性分離をすれば、 r を変数とするベッセル関数と z を変数とする指数関数の積(および積の重ね合わせ)は(A.3)式を満足することが示されている⁶⁾。これに従い、温度変化は原点から十分遠点でゼロおよび原点では有限であることを考慮して、本稿では $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2$ を積分変数 β を用いたつぎの式で表わす。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1(r, z) \\ = -\theta_0 \int_0^\infty \frac{cB(\beta) J_0 \left(\frac{\beta r}{R} \right) F(\beta, z)}{F(\beta, 0)} d\beta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta_2(r, z) \\ = -\theta_0 \int_0^\infty \frac{cB(\beta) J_0 \left(\frac{\beta r}{R} \right) \exp \left\{ \frac{\beta(z+d)}{R} \right\}}{F(\beta, 0)} d\beta \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

J_0 は0次ベッセル関数である。 $F(\beta, z)$ は内部接続条件で定まる z の指数関数であり、 $cB(\beta)$ は表面条件で定める積分重み関数である。

表面材 ($i=1$) および内部材 ($i=2$) の表面方向 (z 方向成分) の熱流密度 q_i および熱流密度の変化量 Δq_i は,

$$\begin{aligned} q_i(r, z) &= -\lambda_i (\partial/\partial z) \theta_i(r, z) \\ &= q_0 - \lambda_i (\partial/\partial z) \Delta \theta_i(r, z) \\ &= q_0 + \Delta q_i(r, z) \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

と表わせる。ただし, $\lambda_2 \equiv \lambda_0$ とする。

温度および熱流密度の内部境界 ($z=-d$) での接続条件は次式で表わされる。

$$\theta_1(r, -d) = \theta_2(r, -d) \quad (\text{A. 7})$$

$$q_1(r, -d) = q_2(r, -d) \quad (\text{A. 8})$$

この2式から $F(\beta, z)$ は定まる。表現簡明化のため指数関数を双曲線関数で置き換えれば,

$$F(\beta, z) = (\lambda_0/\lambda_1) \sinh \{\beta(z+d)/R\}$$

$$+ \cosh \{\beta(z+d)/R\} \quad (\text{A. 9})$$

となる。式の導入過程は省略する。(A. 9)式を使えば(A. 4), (A. 6)式から表面材の熱流密度変化は,

$$\Delta q_1(r, z) = (\theta_0 \lambda_0 / R)$$

$$\int_0^\infty \frac{cB(\beta) J_0\left(\frac{\beta r}{R}\right) G(\beta, z) \beta}{F(\beta, 0)} d\beta \quad (\text{A. 10})$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} G(\beta, z) &= (\lambda_1/\lambda_0) \sinh \{\beta(z+d)/R\} \\ &+ \cosh \{\beta(z+d)/R\} \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

である。温度・熱流密度の分布を得るための残る課題は、積分重み関数 $cB(\beta)$ を定めることである。なお、 c は $B(\beta)$ の表現が簡明となるように定める。