むだ時間系の有限極配置アルゴリズム

——むだ時間要素の有理式から有限ラプラス変換を含むフィードバックへの変換——

玄 英 澤*・渡 部 慶 二**・北 森 俊 行*

A Finite Spectrum Assignment Algorithm in Time-Delay Systems

—Transformation from Rational Matrices to Finite Laplace Transform Matrices—

Young Taek HYUN*, Keiji WATANABE** and Toshiyuki KITAMORI*

This paper is concerned with finite spectrum assignment of time-delay systems. One of authors proposed an algorithm for it based on transformation from rational matrices to finite Laplace transform matrices. In the present paper, to improve the algorithm a new method for the transformation is given. The feedback generated by the new algorithm includes a smaller number of finite Laplace transform terms than that by the existing one.

Key Words: time-delay systems, finite spectrum assignment, finite Laplace transform

1. ま え が き

本論文で考える極配置法は、閉ループ系の特性関数における係数を任意に指定するものであり、通常は係数を実数にとり有限個にした極を任意に配置するので有限極配置法^{1)~7)}と呼ばれる。有限極配置法は、系のもつスペクトルを求めずに、係数行列を元にした代数演算により閉ループ系の特性関数を任意に設定できるという特徴をもつ。

状態にむだ時間を含む系は一般に無限個のスペクトルをもち、すべてのスペクトルに対応するモードが可制御なときスペクトル可制御であるという。Manitiusら¹⁾は、スペクトル可制御な系に対する有限極配置問題を検討し、有限区間積分(有限ラプラス変換)を含むフィードバックを用いることによりその可能性を示

唆した。続いて、渡部ら^{2)~4)}は可到達行列の基本行変換を元に、有限極配置のためのフィードバックを求めるアルゴリズムを与えた。これにより、有限ラプラス変換を含むフィードバックを用いた場合、スペクトル可制御性が有限極配置可能であるための必要十分条件であることが明らかにされた。その後、玄ら⁵⁾はむだ時間要素 $z (= \exp(-sd))$ の有理式を含むフィードバックを有限ラプラス変換を含むフィードバックに変換するという方法を用いて、渡部らとは異なる有限極配置アルゴリズムを与えた。さらに、玄ら⁶⁾は有理式の分母が単根だけをもつ場合についてアルゴリズムの簡略化を行った。しかし、重根が存在する場合、重根が存在する構造と系の係数行列との関係が明確でないため、一般の場合への拡張が困難であった。一方、渡部⁷⁾は基本行変換を元にして重根をもつ構造と係数行列の関係を明確にする変数変換を与え、重根の部分を逐次的に有限ラプラス変換を含む項へと変換するアルゴリズムを与えた。

本論文では、先の変数変換により重根をもつ構造を明らかにした上で、有限ラプラス変換を含む項へと行列演算により一括して変換するアルゴリズムを与える。本アルゴリズムは文献5)で与えたものと比較して、余分な有限ラプラス変換の項を含まない、アルゴリズムが簡略化された、などの特徴をもつ。

2. 問 題 設 定

2.1 有限極配置

つぎの1入力むだ時間系が与えられたとする。

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p \{A_i x(t-id) + b_i u(t-id)\} \quad (1)$$

ただし、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b_i \in \mathbf{R}^n$, $d > 0$ とする。系(1)に対しフィードバック

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

** 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

** Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

(Received February 13, 1989)

(Revised May 18, 1989)

$$u(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{f}_1^T \mathbf{x}(t-id) + \int_{-Nd}^0 \phi^T(\tau) \mathbf{x}(t+\tau) d\tau + \int_{-Nd}^0 \phi(\tau) u(t+\tau) d\tau \quad (2)$$

を行うと、閉ループ系の特性関数は次式となる。

$$\Delta_c(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A(z) & -\mathbf{b}(z) \\ -\mathbf{f}_1^T(s, z) & 1 - f_2(s, z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし、

$$z = \exp(-sd)$$

$$A(z) = \sum_{i=0}^p A_i z^i, \quad \mathbf{b}_i = \sum_{i=0}^p \mathbf{b}_i z^i$$

$$\mathbf{f}_1^T(s, z) = \sum_{i=0}^N \mathbf{f}_1^T z^i + \int_{-Nd}^0 \phi^T(\tau) \exp(s\tau) d\tau$$

$$f_2(s, z) = \int_{-Nd}^0 \phi(\tau) \exp(s\tau) d\tau$$

である。 $\mathbf{f}_1^T(s, z)$ の第 2 項と $f_2(s, z)$ が有限ラプラス変換の項である。このとき、任意に与えられた実数 $\hat{a}_i$ ($i=1, \dots, n$) に対して

$$\Delta_c(s) = s^n + \hat{a}_1 s^{n-1} + \dots + \hat{a}_{n-1} s + \hat{a}_n \quad (4)$$

とするフィードバック (2) が存在するとき、系 (1) は有限極配置可能であるという。そのための必要十分条件は系 (1) がスペクトル可制御なこと、すなわち、任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\text{rank}[sI - A(\exp(-sd)) \quad \mathbf{b}(\exp(-sd))] = n \quad (5)$$

が成立すること、ということが知られている²⁾⁻⁵⁾。

2.2 z の有理式を含むフィードバック

まず、

$$\mathbf{k}^T(z) = [\alpha_n(z) - \hat{a}_n \quad \dots \quad \alpha_1(z) - \hat{a}_1] M^{-1}(z) \quad (6)$$

とおく。ただし

$$\det(sI - A(z)) = s^n + \alpha_1(z)s^{n-1} + \dots + \alpha_n(z) \quad (7.1)$$

$$M(z) = [\mathbf{b}(z) \quad A(z)\mathbf{b}(z) \quad \dots \quad A^{n-1}(z)\mathbf{b}(z)]$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}(z) & \dots & \alpha_1(z) & 1 \\ \vdots & & & \\ \alpha_1(z) & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

である。このとき

$$\text{adj}(sI - A(z))\mathbf{b}(z) = M(z)\mathbf{v}(s) \quad (8.1)$$

$$\mathbf{v}(s) = [1 \quad s \quad \dots \quad s^{n-1}]^T \quad (8.2)$$

の関係から

$$\begin{aligned} \det(sI - A(z) - \mathbf{b}(z)\mathbf{k}^T(z)) &= \det(sI - A(z)) - \mathbf{k}^T(z)\text{adj}(sI - A(z))\mathbf{b}(z) \\ &= \det(sI - A(z)) - \mathbf{k}^T(z)M(z)\mathbf{v}(s) \\ &= s^n + \hat{a}_1 s^{n-1} + \dots + \hat{a}_n \end{aligned} \quad (9)$$

となる⁵⁾。これは、フィードバック

$$u(s) = \mathbf{k}^T(z)\mathbf{x}(s) \quad (10)$$

により有限極配置が達成されるようにみえる。しかし、

$$\det[\mathbf{b}(z) \quad A(z)\mathbf{b}(z) \quad \dots \quad A^{n-1}(z)\mathbf{b}(z)] \in \mathbf{R} - \{0\} \quad (11)$$

でなければ、一般に $\mathbf{k}^T(z)$ は z の多項式ベクトルとはならず、 z の有理式を含むことになる。この場合、

$$u(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{f}_1^T \mathbf{x}(t-id) + \sum_{i=1}^N g_i u(t-id) \quad (12)$$

のクラスにより (8) 式が実現できたとしても、(12) 式自身にダイナミクスを含むので、閉ループ系の極に

$$\det[\mathbf{b}(z) \quad A(z)\mathbf{b}(z) \quad \dots \quad A^{n-1}(z)\mathbf{b}(z)] = 0 \quad (13)$$

の根が残ることになる。そのため、(13) 式の根が $|z| > 1$ でなければ系全体の安定性を確保することができない^{8), 9)}。しかも、系がスペクトル可制御であっても、(13) 式の根が $|z| > 1$ を満たすとは限らない。

それに対し、フィードバックのクラスとしてダイナミクスを含まない (2) 式を用いれば、閉ループ系に余分なダイナミクスを加えることなく有限極配置を達成することができる。以下では、(6) 式の $\mathbf{k}^T(z)$ を元にして (2) 式のフィードバックを導くことを考える。

ところで、(3) 式はつぎのように変形できる。

$$\begin{aligned} \Delta_c(s) &= \det(sI - A(z)) \\ &\quad \cdot \det(1 - f_2(s, z) - \mathbf{f}_1^T(s, z)(sI - A(z))^{-1}\mathbf{b}(z)) \\ &= \det(sI - A(z)) \\ &\quad - [\mathbf{f}_1^T(s, z) f_2(s, z)] M_c(s, z) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、(8) 式の関係を用いた。また、

$$M_c(s, z) = \begin{bmatrix} M(z)\mathbf{v}(s) \\ \det(sI - A(z)) \end{bmatrix}$$

である。よって、(6) 式の $\mathbf{k}^T(z)$ に対して

$$\mathbf{k}^T(z)M(z)\mathbf{v}(s) = [\mathbf{f}_1^T(s, z) \quad f_2(s, z)] M_c(s, z) \quad (15)$$

を満たす $\mathbf{f}_1^T(s, z)$ 、 $f_2(s, z)$ を求め、それらを用いてフィードバック (2) を構成すれば、(9) 式の関係から有限極配置が達成されることがわかる。

次節では、系 (1) をスペクトル可制御として、(15) 式の $\mathbf{f}_1^T(s, z)$ 、 $f_2(s, z)$ を求める方法を与える。

3. 有限ラプラス変換を含むフィードバックへの変換

3.1 変数変換⁷⁾

行列 $M(z)$ をつぎのように下三角行列に変換するユニモジュラ行列を $T(z) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ とする。

$$T(z)M(z) = M_1(z) \quad (16.1)$$

$$M_1(z) = \begin{bmatrix} m_{11}(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}(z) & \dots & m_{nn}(z) \end{bmatrix} \quad (16.2)$$

ここで、

$$\hat{A}(z) = T(z)A(z)T^{-1}(z), \quad \hat{\mathbf{b}}(z) = T(z)\mathbf{b}(z) \quad (17)$$

とおくと、(16.2)の形から

$$\hat{A}(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11}(z) & \cdots & a_{n-1n}(z) \\ a_{n1}(z) & \cdots & \cdots & a_{nn}(z) \end{bmatrix} \quad (18.1)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn+1}(z) \end{bmatrix} \quad (18.2)$$

と表わすことができる。そして、このとき

$$m_{ii}(z) = a_{ii+1}(z) \cdots a_{nn+1}(z) \quad (19)$$

($i=1, \dots, n$) であり、

$$M_1^{-1}(z)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{m_{11}(z)} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{m}_{i1}(z)}{m_{11}(z)} & \cdots & \frac{\hat{m}_{ij}(z)}{m_{jj}(z)} & \cdots & \frac{1}{m_{ii}(z)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{m}_{n1}(z)}{m_{11}(z)} & \cdots & \frac{\hat{m}_{nj}(z)}{m_{jj}(z)} & \cdots & \frac{\hat{m}_{ni}(z)}{m_{ii}(z)} & \cdots & \frac{1}{m_{nn}(z)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

と表わせる (各列の分母が共通)⁷⁾。 $\hat{m}_{ij}(z)$ ($i=1, \dots, n, j < i$) は z の多項式である。

ところで、

$$\hat{\mathbf{k}}^T(z) = \mathbf{k}^T(z)T^{-1}(z) \\ = [\alpha_n(z) - \hat{\alpha}_n \cdots \alpha_1(z) - \hat{\alpha}_1]M_1^{-1}(z) \quad (21.1)$$

$$\hat{M}_e(s, z) = \begin{bmatrix} M_1(z)\mathbf{v}(s) \\ \det(sI - A(z)) \end{bmatrix} \quad (21.2)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_1^T(s, z) = \mathbf{f}_1^T(s, z)T^{-1}(z) \quad (21.3)$$

とおくと、(15)式は

$$\hat{\mathbf{k}}^T(z)M_1(z)\mathbf{v}(s) = [\hat{\mathbf{f}}_1^T(s, z) \ f_2(s, z)]\hat{M}_e(s, z) \quad (22)$$

と書ける。また、(8)式を考慮すると次式が成立する。

$$[sI - \hat{A}(z) - \hat{\mathbf{b}}(z)]\hat{M}_e(s, z) = 0 \quad (23)$$

3.2 有限ラプラス変換を含む項への変換

つぎのように、(21.1)式の $\hat{\mathbf{k}}^T(z)$ を z に関して多項式になる項と厳密にプロパーとなる項に分解し、さらに後者を部分分数展開する。

$$\hat{\mathbf{k}}^T(z) = \mathbf{r}_{p1}^T(z) + \sum_{r=1}^M \frac{\mathbf{r}_r^T(z)}{(z - z_r)^{h_r}}, \quad (z_r \in \mathbf{C}) \quad (24)$$

ここで、 z_r は $M_1^{-1}(z)$ 中の分母多項式の零点なので、(19)、(20)式より z_r は

$$a_{12}(z)a_{23}(z) \cdots a_{nn+1}(z) = 0 \quad (25)$$

の根となっている。

つぎに、部分分数展開項の一つに注目する。ここで

は記号の簡略化のためそれを

$$\mathbf{r}^T(z)/(z - z_0)^h \quad (26)$$

と表わすことにする。そして、 $z_0 \in \mathbf{C}$ は $a_{ii+1}(z)$ ($i=1, \dots, n$) のうちの m 個の零点となっているとし、その行番号を $c(1), \dots, c(m)$ 、重複度を $k(1), \dots, k(m)$ とする。つまり、 $z_0 \in \mathbf{C}$ は

$$a_{ii+1}(z) = 0, \quad i = c(1), c(2), \dots, c(m) \quad (27)$$

($c(1) < c(2) < \dots < c(m)$) の根で、その重複度は $k(i)$ であるとする。このとき、(19)、(20)式より $h \leq k(1) + \dots + k(m)$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}^T(z)}{(z - z_0)^h} &= \frac{1}{z - z_0} [\mathbf{r}_{11}^T \ 0 \ \cdots \ 0] + \cdots \\ &+ \frac{1}{(z - z_0)^{q(1)}} [\mathbf{r}_{1q(1)}^T \ 0 \ \cdots \ 0] + \cdots \\ &+ \frac{1}{z - z_0} [0 \ \cdots \ 0 \ \mathbf{r}_{m1}^T \ 0 \ \cdots \ 0] + \cdots \\ &+ \frac{1}{(z - z_0)^{q(m)}} [0 \ \cdots \ 0 \ \mathbf{r}_{mq(m)}^T \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (28) \end{aligned}$$

と書ける。ただし

$$d(i) = c(i) - c(i-1), \quad i = 1, \dots, m \quad (29.1)$$

($d(0) = c(0) = 0$) として

$$q(i) = k(i) + \dots + k(m), \quad \mathbf{r}_{ir}^T \in \mathbf{C}^{1 \times d(i)} \quad (29.2)$$

$$i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, q(i)$$

である。

(1) $m=1$ の場合

(28)式より $\mathbf{r}^T(z)/(z - z_0)^h$ の最初の $c(1)$ 列は

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}^T(z)}{(z - z_0)^h} [\mathbf{I}_{c(1)} \ 0 \ \cdots \ 0]^T &= \frac{1}{z - z_0} \mathbf{r}_{11}^T + \cdots + \frac{1}{(z - z_0)^{k(1)}} \mathbf{r}_{1k(1)}^T \\ &= [\mathbf{r}_{11}^T \ \cdots \ \mathbf{r}_{1k(1)}^T] Z_1(z) \quad (30.1) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 $\mathbf{I}_{c(1)}$ は $c(1)$ 次の単位行列、

$$Z_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}_{c(1)}}{z - z_0} & \cdots & \frac{\mathbf{I}_{c(1)}}{(z - z_0)^{k(1)}} \end{bmatrix}^T \quad (30.2)$$

とする。ところで、 $[sI - \hat{A}(z) - \hat{\mathbf{b}}(z)]$ の最初の $c(1)$ 行は、 $(z - z_0)$ の多項式行列として表わすと、 z_0 が $a_{c(1)c(1)+1}$ の重複度 $k(1)$ の零点であることより、

$$\begin{aligned} &[\mathbf{I}_{c(1)} \ 0 \ \cdots \ 0][sI - \hat{A}(z) - \hat{\mathbf{b}}(z)] \\ &= [s\mathbf{I}_{c(1)} - \mathbf{A}_{11}^0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \\ &\quad - (z - z_0)[\mathbf{E}_{11}(z) \ \mathbf{e}_1^T(z) \ 0 \ \cdots \ 0] \\ &= \cdots \\ &= [s\mathbf{I}_{c(1)} - \mathbf{A}_{11}^0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \\ &\quad - (z - z_0)[\mathbf{A}_{11}^1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \\ &= \cdots \end{aligned} \quad (31.1)$$

$$\begin{aligned} & -(z-z_0)^{k(1)-1} [A_{11}^{k(1)-1} \mathbf{0} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\ & -(z-z_0)^{k(1)} [E_{11}^{k(1)}(z) \mathbf{e}_1^{k(1)}(z) \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \end{aligned} \quad (31. k(1))$$

ただし,

$$\begin{aligned} & [\hat{A}(z) \hat{\mathbf{b}}(z)] \\ & = \left[\sum_{i=0}^{j-1} (z-z_0)^i A_{11}^i + (z-z_0)^j E_{11}^j(z) \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_1^j(z) = [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \ e_1^j(z)]^T$$

$$e_1^j(z) = a_{c(1)c(1)+1}/(z-z_0)^j, \quad j=1, \dots, k(1)$$

と $k(1)$ 通りの表現で表わせる. よって, 恒等式 (23) の最初の $c(1)$ 行を $(z-z_0)^j$ で割って $j=1, \dots, k(1)$ について集めると, (31. 1)~(31. $k(1)$) 式から

$$\begin{aligned} & \{(sI_{r(1)} - A_1)Z_1(z)[I_{c(1)} \mathbf{0} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\ & - E_{11}(z)[I_{c(1)+1} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]\} \hat{M}_e(s, z) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (32)$$

を得る. ただし, $r(1)=c(1)k(1)$, $Z_1(z)$ は (30. 2) 式,

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11}^{k(1)-1} & \cdots & A_{11}^0 \end{bmatrix} \quad (33. 1)$$

$$E_1(z) = \begin{bmatrix} E_{11}^1(z) & e_1^1(z) \\ \vdots & \vdots \\ E_{11}^{k(1)}(z) & e_1^{k(1)}(z) \end{bmatrix} \quad (33. 2)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} & Z_1(z)[I_{c(1)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]M_1(z)\mathbf{v}(s) \\ & = (sI_{r(1)} - A_1)^{-1}E_1(z)[I_{c(1)+1} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]\} \hat{M}_e(s, z) \end{aligned} \quad (34)$$

となる. つぎに, これを有限ラプラス変換を含む項へ変換する. ここで,

$$F_1 = \{I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} \exp(A_1 d) \quad (35)$$

とおくと

$$\begin{aligned} & I_{r(1)} - (z-z_0)F_1 \\ & = \{I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} \{I_{r(1)} - z \exp(A_1 d)\} \end{aligned} \quad (36)$$

が成立する. ただし, 右辺最初の逆行列が存在することは系 (1) がスペクトル可制御であることにより保証される (後に証明する). また, $Z_1(z)$ について

$$(z-z_0)Z_1(z) = J_0 + J_1 Z_1(z) \quad (37. 1)$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} I_{c(1)} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ I_{c(1)} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & I_{c(1)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (37. 2)$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} & \{I_{r(1)} - (z-z_0)F_1\} Z_1(z) \\ & = \{(I_{r(1)} - F_1 J_1)Z_1(z) - F_1 J_0\} \\ & = \{I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} \\ & \quad \cdot \{(I_{r(1)} - \exp(A_1 d)(z_0 I_{r(1)} + J_1))Z_1(z) \\ & \quad - \exp(A_1 d)J_0\} \end{aligned} \quad (38. 1)$$

$$\begin{aligned} & \{I_{r(1)} - (z-z_0)F_1\} (sI_{r(1)} - A_1)^{-1} \\ & = \{I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} L(s, A_1) \end{aligned} \quad (38. 2)$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned} & L(s, A_1) = \{I_{r(1)} - z \exp(A_1 d)\} (sI_{r(1)} - A_1)^{-1} \\ & : \text{有限ラプラス変換} \end{aligned} \quad (39)$$

であり, 時間領域では, たとえば

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(s, A_1)\mathbf{w}(s)] = \int_{-d}^0 \exp(-A_1 \tau) \mathbf{w}(t+\tau) d\tau$$

($\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$: 逆ラプラス変換) と表わされる. したがって, (34) 式両辺左から $\{I_{r(1)} - (z-z_0)F_1\}$ を乗じて整理すると, (38. 1), (38. 2) 式より次式が得られる.

$$Z_1(z)[I_{c(1)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]M_1(z)\mathbf{v}(s) = K_0(s, z) \quad (40. 1)$$

ただし,

$$\begin{aligned} & K_0(s, z) \\ & = (I_{r(1)} - \exp(A_1 d)(z_0 I_{r(1)} + J_1))^{-1} \\ & \quad \cdot \{\exp(A_1 d)J_0[I_{c(1)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]M_1(z)\mathbf{v}(s) \\ & \quad + L(s, A_1)E_1(z)[I_{c(1)+1} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]\} \hat{M}_e(s, z) \end{aligned} \quad (40. 2)$$

である. 右辺最初の逆行列が存在することは J_1 が下三角のべき零行列であることと, (36) 式右辺最初の逆行列が存在することにより保証される. さらに, (40. 1) 式左から

$$[r_{11}^T \cdots r_{k(1)}^T]$$

を乗ずると, (30. 1) 式より

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{r}^T(z)}{(z-z_0)^h} M_1(z)\mathbf{v}(s) \\ & = [\mathbf{f}_{11}^T(s, z) \ f_{02}(s, z)] \hat{M}_e(s, z) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし

$$\begin{aligned} & [\mathbf{f}_{11}^T(s, z) \ f_{02}(s, z)] \hat{M}_e(s, z) \\ & = [r_{11}^T \cdots r_{k(1)}^T] K_0(s, z) \end{aligned} \quad (42)$$

を得る. これが, z の有理式を含む項から有限ラプラス変換を含む項へ変換する式を表わしている.

あとは, 残しておいた (36) 式右辺最初の逆行列が存在することの証明を行う. (33. 1) から, 行列

$$I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d) \quad (43)$$

が逆行列をもたないのは,

$$\text{rank}[I_{r(1)} - z_0 \exp(A_1 d)] < c(1) \quad (44)$$

の場合である. これは, A_{11}^0 の固有値 $s_0 \in \mathbf{C}$ で $z_0 = \exp(-s_0 d)$ を満たすものが存在することを意味する.

その場合, (31. 1) 式より, s_0 に対して

$$\begin{aligned} & \text{rank}[I_{c(1)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}][s_0 I - A(z_0) - \mathbf{b}(z_0)] \\ & = \text{rank}[s_0 I_{c(1)} - A_{11}^0 \mathbf{0} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] < c(1) \end{aligned} \quad (45)$$

となるので, 系 (1) のスペクトル可制御性に反することになる. すなわち, 系 (1) がスペクトル可制御ならば (43) の逆行列が存在することがいえる.

(2) $m=2$ の場合

(28) 式より $\mathbf{r}^T(z)/(z-z_0)^h$ の最初の $c(2)$ 列は

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{r}^T(\mathbf{z})}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^k} [I_{c(2)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]^T \\
&= \frac{1}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_0} [\mathbf{r}_{11}^T \quad \mathbf{0}^T] + \cdots + \frac{1}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{q(1)}} [\mathbf{r}_{1q(1)}^T \quad \mathbf{0}^T] \\
&\quad + \frac{1}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_0} [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{r}_{21}^T] + \cdots + \frac{1}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(2)}} [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{r}_{2k(2)}^T] \\
&= [\mathbf{r}_{11}^T \cdots \mathbf{r}_{1k(1)}^T : \\
&\quad \mathbf{r}_{1k(1)+1}^T \mathbf{r}_{21}^T \cdots \mathbf{r}_{1q(1)}^T \mathbf{r}_{2k(2)}^T] \mathbf{Z}_2(\mathbf{z}) \quad (46.1)
\end{aligned}$$

ただし, $q(1)=k(1)+k(2)$, $d(i)$ は (29.1) 式,

$$\mathbf{Z}_2(\mathbf{z}) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{I_{d(1)}}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{I_{d(1)}}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)}} & \mathbf{0} \\ \hline \frac{I_{d(1)}}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)+1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{I_{d(2)}}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_0} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{I_{d(1)}}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{q(1)}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{I_{d(2)}}{(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(2)}} \end{array} \right] \quad (47)$$

と表わせる。ところで, $[sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})]$ の最初の $c(1)$ 行は, $(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)$ の多項式行列として表わすと, $k(1)$ 乗までは (31) 式のように表わせた。 $m=2$ の場合, さらに $q(1)=k(1)+k(2)$ 乗までが必要となるので, つぎのように表わす。

$$\begin{aligned}
& [I_{d(1)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] [sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})] \\
&= [sI_{d(1)} - A_{11}^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0) [A_{11}^1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad \cdots \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)-1} [A_{11}^{k(1)-1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)} [A_{11}^{k(1)} \quad \mathbf{e}_1^{k(1)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad \cdots \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)+j} [E_{11}^{k(1)+j}(\mathbf{z}) \quad \mathbf{e}_1^{k(1)+j}(\mathbf{z}) \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \quad (48. j)
\end{aligned}$$

ただし, $j=1, \dots, k(2)$

$$\begin{aligned}
E_{11}^{k(1)}(\mathbf{z}) &= \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^i A_{11}^{k(1)+i} + (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j E_{11}^{k(1)+j}(\mathbf{z}) \\
\mathbf{e}_1^{k(1)}(\mathbf{z}) &= \sum_{i=0}^{j-1} (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^i \mathbf{e}_1^{k(1)+i} + (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j \mathbf{e}_1^{k(1)+j}(\mathbf{z})
\end{aligned}$$

である。また, $[sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})]$ の $c(1)+1 \sim c(2)$ 行は, $(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)$ の多項式行列として表わすと, (31) 式と同様につぎのように $k(2)$ 通りに表わされる。

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \quad I_{d(2)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] [sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})] \\
&= [A_{21}^0 \quad sI_{d(2)} - A_{22}^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0) [E_{21}^1(\mathbf{z}) \quad E_{22}^1(\mathbf{z}) \quad \mathbf{e}_2^1(\mathbf{z}) \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \quad (49.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cdots \\
&= [A_{21}^0 \quad sI_{d(2)} - A_{22}^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0) [A_{21}^1 \quad A_{22}^1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad \cdots \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(2)-1} [A_{21}^{k(2)-1} \quad A_{22}^{k(2)-1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(2)} [E_{21}^{k(2)}(\mathbf{z}) \quad E_{22}^{k(2)}(\mathbf{z}) \quad \mathbf{e}_2^{k(2)}(\mathbf{z}) \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \quad (49. k(2))
\end{aligned}$$

ここで, (23) 式に

$$[I_{d(1)}/(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{k(1)+j} \quad I_{d(2)}/(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]$$

を乗じて $j=1 \cdots k(2)$ についてあつめたものを (48),

(49) 式を用いて整理し, (32) 式と合せると

$$\begin{aligned}
& \{(sI_{r(2)} - A_2) Z_2(\mathbf{z}) [I_{c(2)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - E_2(\mathbf{z}) [I_{c(2)+1} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}]\} \hat{M}_e(s, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (50)
\end{aligned}$$

を得る。ただし, $r(2)=c(1)k(1)+c(2)k(2)$

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \mathbf{0} \\ \hline A_{21}^{k(1)} \cdots & A_{21}^0 \quad \mathbf{e}_1^{k(1)} \quad \mathbf{0} \\ A_{21}^0 \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \quad A_{22}^0 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A_{21}^{q(1)-1} \cdots & \cdots & A_{21}^0 \quad \mathbf{e}_1^{k(1)} \quad \mathbf{0} \\ A_{21}^{k(2)-1} \cdots & \cdots & \mathbf{0} \quad A_{22}^0 \end{array} \right]$$

である。よって, (50) 式を元に (34) ~ (41) 式と同様な操作を行うと (41) 式を満たす $f_{01}(s, \mathbf{z})$, $f_{02}(s, \mathbf{z})$ が得られる。

(3) 一般の場合

$m>2$ の場合は $m=2$ の場合を拡張すればよい。まず, $[sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})]$ の $c(r-1)+1 \sim c(r)$ 行は $(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)$ の多項式とみるとつぎのように書ける。

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \quad I_{d(r)} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] [sI - \hat{A}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{z})] \\
&= [A_{r1}^0 \cdots sI_{d(r)} - A_{rr}^0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0) [A_{r1}^1 \cdots A_{rr}^1 \quad \mathbf{e}_r^1 \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad \cdots \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^{j-1} [A_{r1}^{j-1} \cdots A_{rr}^{j-1} \quad \mathbf{e}_r^{j-1} \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad - (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j [E_{r1}^j(\mathbf{z}) \cdots E_{rr}^j(\mathbf{z}) \quad \mathbf{e}_r^j(\mathbf{z}) \quad \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \\
&\quad j=1, \dots, q(r) \quad (=k(r)+\cdots+k(m)) \quad (51. j)
\end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{z}_0$ は $a_{c(r)c(r)+1}(\mathbf{z})$ の重複度 $k(r)$ の零点であるから,

$$\mathbf{e}_r^j = \mathbf{0}, \quad j < k(r)$$

であり, $j \geq k(r)$ については

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_r^j = [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_{r0}^j]^T, \quad \mathbf{e}_r^j(\mathbf{z}) = [\mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \quad \mathbf{e}_{r0}^j(\mathbf{z})]^T \\
& a_{c(r)c(r)+1} = \sum_{i=k(r)}^{j-1} (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^i \mathbf{e}_{r0}^{i+1} + (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j \mathbf{e}_{r0}^j(\mathbf{z})
\end{aligned}$$

である。よって, (23) 式の $c(r-1)+1 \sim c(r)$ 行を $(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)^j$ で割ったものを

for $r=1$ to m

for $j=k(0)+\cdots+k(r-1)+1$ to $k(0)+\cdots+k(r)$

($k(0)=0$ とする) の順番でまとめて整理すると, (51) 式より, (50) 式を拡張した形で次式が得られる.

$$\{(sI_{r(m)} - A_m)Z_m(z)[I_{c(m)} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] - E_m(z)[I_{c(m)+1} \ 0 \ \dots \ 0]\} \hat{M}_e(s, z) = 0 \quad (52)$$

ただし, $r(m) = c(1)k(1) + \dots + c(m)k(m)$ であり, $Z_m(z)$ だけを具体的に書くと

$$Z_m(z) = \begin{bmatrix} Z_{11}(z) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ Z_{m1}(z) & \dots & Z_{mm}(z) \end{bmatrix}, \quad Z_{jr}(z) = \begin{bmatrix} Z_{jr1}(z) \\ \vdots \\ Z_{jr k(j)}(z) \end{bmatrix}$$

$$Z_{jr q}(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_{d(r)} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & d(1) \\ \frac{I_{d(r)}}{(z-z_0)^{p(j,r)+q}} & d(j) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & d(r) \end{cases} \quad q=1, \dots, k(1)$$

$$p(j, r) = \begin{cases} 0, & j=r \\ \sum_{i=r}^{j-1} k(i), & j>r \end{cases}$$

となる. よって, (52) 式を元に (41) 式を満たす $\mathbf{f}_{01}^T(s, z)$, $\mathbf{f}_{02}(s, z)$ が得られる.

3.3 有限極配置を達成するフィードバック

以上の操作を繰り返すと, (24) 式右辺第 2 項の厳密にプロパーな項に対して

$$\frac{\mathbf{r}_r^T(z)}{(z-z_r)^{h_r}} M_1(z) \mathbf{v}(s) = [\mathbf{f}_{r1}^T(s, z) \ f_{r2}(s, z)] \hat{M}_e(s, z) \quad (53)$$

を満たす $\mathbf{f}_{r1}^T(s, z)$, $f_{r2}(s, z)$ ($r=1, \dots, M$) を求めることができる. これらを用いて

$$\mathbf{f}_1^T(s, z) = \{\mathbf{r}_{p1}^T(z) + \sum_{r=1}^M \mathbf{f}_{r1}^T(s, z)\} T(z) \quad (54.1)$$

$$f_2(s, z) = \sum_{r=1}^M f_{r2}(s, z) \quad (54.2)$$

とおいたものは, (21), (22) 式より (15) 式を満たす. したがって, これらを用いたフィードバック

$$\mathbf{u}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{f}_1^T(s, z) \mathbf{x}(s) + f_2(s, z) u(s)] \quad (55)$$

により有限極配置が達成される.

4. 例を用いた考察

本章では, 本アルゴリズムを直観的に理解するために, ブロック線図を用いて簡単な例について考察する. そして, 最後に数値例を与える.

ここでは, 変数変換後の行列が

$$\hat{A}(z) = \begin{bmatrix} a_{11}(z) & z - z_0 \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

($z_0 \in \mathbf{R}$) である系について考える ($a_{11}(z)$, $a_{21}(z)$, $a_{22}(z)$ を行列と考えてよい). この場合,

$$\frac{1}{z-z_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

を有限ラプラス変換を含む項に変換することが必要となる. これは, $x_1(s)/(z-z_0)$ を生成するモデルを作ることとみることができる.

行列 $\hat{A}(z)$ の第 1 行は, $z-z_0$ の多項式とみると

$$[a_{12}(z) \ z - z_0] = [A_1 \ 0] + (z-z_0)[E_1(z) \ 1] \quad (58)$$

と表わせるので, 系 (56) のブロック線図は **Fig. 1** のようになる. その内, 点線で囲まれた部分は **Fig. 2** の点線で囲まれた部分と等価である. このとき, 図中で示した $x_1(s)/(z-z_0)$ を生成するモデルを同じ構成でつくることができる. 図中の $w(s)$ はそのモデル出力を表わしており, 初期値が零であれば,

$$x_1(s)/(z-z_0) = w(s) \quad (59)$$

が成立する. このことは, (58) 式からつぎのように導かれる. この例において, 恒等式 (23) の第 1 行は

$$[s - A_1 \ 0 \ 0] - (z-z_0)[E_1(z) \ 1 \ 0] M_e(s, z) = 0$$

を表わし, これを $z-z_0$ で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z-z_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} M_1(z) \mathbf{v}(s) \\ &= (s - A_1)^{-1} \begin{bmatrix} E_1(z) & 1 \end{bmatrix} M_e(s, z) \end{aligned} \quad (60)$$

となる. これが (59) 式の関係を表わしている (3.2 節の (34) 式に相当する). このように, 複製モデルを作れるが, このモデルでは $(sI - A_1)^{-1}$ にダイナミクスを含むので, A_1 の実部が負でなければ安定とはならない. そこで, 通常行われるように, モデルの出力と実際の値との誤差を加え, 安定性の補償をする. つまり, モデル出力との誤差

Fig. 1 Block diagram of the system (56)

Fig. 2 Configuration of the model

$$x_1(s) - (z - z_0)w(s) \quad (61)$$

にゲイン F_1 を乗じたものを加えた

$$\tilde{w}(s) = w(s) + F_1 \{x_1(s) - (z - z_0)w(s)\} \quad (62)$$

を新たなモデル出力とする。そして、適当なゲインを選んでダイナミクスを消去する。実際には、

$$\{1 - (z - z_0)F_1\} (s - A_1)^{-1} \quad (63)$$

を有限ラプラス変換にすればダイナミクスを消去することができる。具体的には、

$$F_1 = \{1 - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} \exp(A_1 d) \quad (64)$$

とすれば、(63)式は有限ラプラス変換

$$\{1 - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} L(s, A_1) \quad (65)$$

となる。ただし、

$$L(s, A_1) = \{1 - z \exp(A_1 d)\} (s - A_1)^{-1} \quad (66)$$

である。このことは、(60)式に戻って考えると、(60)式両辺左から $1 - (z - z_0)F_1$ を乗じて整理した式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z - z_0} [1 \ 0] M_1(z) v(s) \\ &= F_1 [1 \ 0] M_1(z) v(s) \\ & \quad + \{1 - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} L(s, A_1) \\ & \quad \cdot [E_1(z) \ 1 \ 0] M_e(s, z) \\ &= \{1 - z_0 \exp(A_1 d)\}^{-1} \{ \exp(A_1 d) \\ & \quad \cdot [1 \ 0] M_1(z) v(s) \\ & \quad + L(s, A_1) [E_1(z) \ 1 \ 0] M_e(s, z) \} \end{aligned} \quad (67)$$

を求めたことになる。これは z の有理式の項から有限ラプラス変換を含む項への変換式を表わしている。いうなれば、有限ラプラス変換を含む項へ変換することは、複製モデルの作成とモデル出力の誤差を用いた安定性の補償をしていることになる。

ここで、スペクトル可制御性との関係を考える。モデル出力を用いる場合、問題となるのはモデルのモード A_1 の情報を状態 $x_1(s)$ から得られるかということである。これは $x_2(s)$ から $x_1(s)$ への経路

$$(s - A_1)^{-1} (z - z_0) \quad (z = \exp(-sd))$$

で極零相殺があるかという問題であり、系がスペクトル可制御であるかということに等しい。つまり、系がスペクトル可制御であれば極零相殺がなくモデル出力との誤差での補償が可能となる。ゲイン F_1 というと、 $1 - z_0 \exp(A_1 d)$ が逆をもつか、ということに相当する。これらのようすは、有限次元線形系においてオブザーバを構成するときの状況とよく似ている。

以上が本論文で与えた有限ラプラス変換への変換法についての直観的な説明である。以下では文献5)の方法との比較を行うため簡単な数値例を与える。

〔数値例〕 つぎの系を考える。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} z & z^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

この系に対し、閉ループ系の特性関数を

$$\Delta_e(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \quad (69)$$

とする制御入力を求める。このとき、

$$\det(sI - A(z) - b k^T(z)) = s^2 + 2s + 1 \quad (70)$$

を満たす $k^T(z)$ は

$$k^T(z) = [-1 \ -z - 2] + \frac{1}{z^2} r^T(z) \quad (71.1)$$

$$r^T(z) = [- (2z + 1) \ 0] \quad (72.1)$$

であり、真にプロパーな項は

$$\frac{1}{z^2} r^T(z) [1 \ 0]^T = [-2 \ -1] Z_1(z) \quad (72.1)$$

$$Z_1(z) = \left[\frac{1}{z} \ \frac{1}{z^2} \right]^T \quad (72.2)$$

と表わせる。これを有限ラプラス変換を含む項に変換する。ここで、 $[sI - A(z) - b]$ の第1行は

$$\begin{aligned} [s - z \ -z^2 \ 0] &= [s \ 0 \ 0] - z [1 \ z \ 0] \\ &= [s \ 0 \ 0] - z [1 \ 0 \ 0] - z^2 [0 \ 1 \ 0] \end{aligned} \quad (73)$$

と2通りに書けるので、それぞれ z , z^2 で割ってまとめると次式が得られる ((32)式に相当する)。

$$\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} Z_1(z) [1 \ 0 \ 0] - \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2 \ 0] \right\} M_e(s, z) = 0$$

$$M_e(s, z) = \begin{bmatrix} \text{adj}(sI - A(z)) b \\ \det(sI - A(z)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(z) v(s) \\ \det(sI - A(z)) \end{bmatrix} \quad (74)$$

これから、有限ラプラス変換への変換式

$$\begin{aligned} & Z_1(z) [1 \ 0] M(z) v(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M(z) v(s) \right. \\ & \quad \left. + L\left(s, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [I_2 \ 0] M_e(s, z) \right\} \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる。よって、求める制御入力は次式となる。

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[[-1 \ -z - 2] x(s) + [-2 \ -1] \right. \\ & \quad \cdot \left. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + L\left(s, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) x(s) \right] \\ &= -5x_1(t) - 2x_2(t) - x_2(t-1) \\ & \quad - \int_{-1}^0 [(3-r) \{x_1(t+r) + x_2(t+r-1)\} \\ & \quad + x_2(t+r)] dr \end{aligned} \quad (76)$$

一方、文献5)の方法を用いて制御入力を計算すると、

$$\begin{aligned} u(t) &= -x_1(t) - 3x_1(t-1) - 3x_1(t-2) - 2x_1(t-3) \\ & \quad - x_2(t-2) - 3x_2(t-3) - 2x_2(t-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-1}^0 [r \{x_1(t+r) + x_2(t+r-1) + u(t+r)\} \\
 & + (3r-1) \{x_1(t+r-1) + x_2(t+r-2) \\
 & + u(t+r-1)\} + (2r-3) \{x_1(t+r-2) \\
 & + x_2(t+r-3) + u(t+r-2)\} \\
 & - 2 \{x_1(t+r-3) + x_2(t+r-4) \\
 & + u(t+r-3)\}] dr \quad (77)
 \end{aligned}$$

となる。

この数値例からわかるように、文献5)の方法では、入力のむだ時間項がないときでも入力の有限ラプラス変換の項が含まれることがある。本アルゴリズムではそのようなことはなく、より簡潔な制御入力を得られている。これは、本アルゴリズムが $(A(z), b(z))$ の構造を考慮していることによる。この例の場合、本アルゴリズムでは $1/z^2$ を変換するために $1/z$ で得られた情報を利用しているのに対し、文献5)ではそれを考慮せずに行っているため、一般に項の数が増えてしまう。

5. あとがき

本論文では、最初に変数変換を行うことにより係数行列の構造を規定し、その構造を利用することにより、むだ時間要素 z の有理式を含む項から有限ラプラス変換を含む項への変換を行列演算で一括して行う方法を与えた。これにより、文献5)に比べ、より簡略化された有限極配置アルゴリズムが得られた。また、文献5)のアルゴリズムでは、状態だけにむだ時間がある場合でも、入力の有限ラプラス変換の項が必要となることがあったが、本アルゴリズムではそのようなこと

はなくなった。

最後に、日頃よりご討論くださいます筑波大学新 誠一助教授、山形大学大久保重範助教授に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) A. Z. Manitius and A. W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24-4**, 541/553 (1979)
- 2) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Multiple Commensurate Delays in State Variables, Int. J. Control., **38-5**, 913/926 (1983)
- 3) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Multiple Commensurate Delays in States and Control, Int. J. Control, **39-5**, 1073/1082 (1984)
- 4) K. Watanabe: Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-6**, 543/550 (1986)
- 5) 玄, 新, 大久保: 本質的なむだ時間をつつ含む1入力線形系の有限極配置法, 計測自動制御学会論文集, **23-4**, 386/393 (1987)
- 6) 玄, 北森: 遅れ型むだ時間系の有限極配置法, 第27回計測自動制御学会学術講演会予稿集, JS27-4, 289/290 (1988)
- 7) 渡部: むだ時間系の有限極配置—有理関数制御行列と有限ラプラス変換制御行列の統合—, 第11回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 307/312 (1988)
- 8) 前田, 山田: むだ時間を含む線形システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, **11-4**, 444/450 (1975)
- 9) 古川, 示村: むだ時間系における極配置を考慮した安定化, 計測自動制御学会論文集, **17-6**, 693/695 (1981)