Pisarenko 法のための解析信号処理

島村 徹也*・高橋 進一*

Analytic Signal Processing for Pisarenko's Method

Tetsuya SHIMAMURA* and Shin-ichi TAKAHASHI*

Pisarenko's method is an approach to estimate the frequencies of sinusoidal signals corrupted by a white noise. Because this method provides theoretically an unbiased estimation independent on the signal-to-noise ratio, many researchers have improved Pisarenko's method and developed efficient fast algorithms for it.

In this paper, we first present a procedure for the analytic signal transform, which has zero phase property using the fast Fourier transform. It can generate N analytic signals from N measurement data, so it is suitable for spectral analysis with finite data. Secondly, we show that we could get a good frequency estimation by using Pisarenko's method with the analytic signals. Furthermore, we drive three procedures which use effectively and averagely the decimated analytic signals by two and the remainder signals in the decimation. We compare the three procedures by computer simulations and, as a result, insist that the procedure with autocorrelation function averaging is the best of the three.

This method gives much more accurate frequency estimation than the conventional Pisarenko method. Also, we could perform a real-time processing with the proposed method if we use several efficient algorithms developed recently.

Key Words: Pisarenko's method, frequency estimation, analytic signal

1. はじめに

白色雑音に埋もれた正弦波信号の周波数を、与えられた有限長の観測信号から高精度に推定する問題は、地震波解析をはじめ、レーダーやソナーなど多くの信

号処理分野で重要視され、その解決策として多くの報告がある⁵⁾。なかでも、Pisarenko の方法⁹⁾は、理論的に信号対雑音比 (SNR) に依存せずに周波数推定値を算出することから、多くの研究者がこの推定法の改良^{6)~8)}、効率的なアルゴリズムの開発^{13)~18)}、また、実行能力の解析^{10)~12)}に努めている。最近では、Pisarenko 法の周波数推定能力が認識され、その計算アルゴリズムを開発することに、特に力が入れられているようである。それは、Pisarenko 法が相関行列の固有値分解を本質的に必要とし、その演算量は、存在する正弦波の数が増大するにつれて莫大なものとなり、連続時間処理が不可能となってしまうためである。特にここ数年でのアルゴリズムの発展はめざましく、Hu らによるアルゴリズム¹⁵⁾は、VLSI による並列処理に基づき、従来の Gauss 消去法タイプの演算オーダー $O((2L+1)^3)$ (ここで $2L+1$ は相関行列の次数) から $O((2L+1)K)$ (ここで K はアルゴリズムの反復回数) に改良したものであり、また Hayes らによるアルゴリズム¹⁶⁾は、 $O((2L+1)^2)$ ではあるが、自動的に存在する正弦波信号の数を推定することが可能であるなど、両アルゴリズムともそれぞれに長所があり、その実用化が期待されている。

本論文の目的は、現在盛んに開発されている種々のアルゴリズムを直接適用することが可能であり、かつ、従来の Pisarenko 法の実行性能を大幅に改善する周波数推定法を提案することである。今までに報告されている Pisarenko 法を改良した手法は、存在する正弦波信号の数に対応する次数より高い次数が相関行列に課せられ、複雑な行列計算を必要とする^{6),7)}。あるいは、最適プレフィルタを用いてデータアダプティブに Pisarenko 法を適用する⁸⁾など、直接、文献 13)~18) などのアルゴリズムを組み入れることが不可能であり、その演算量の多さに問題が残されていた。本論文で提案する手法は、通常観測される実信号を複素信号の一つである解析信号に変換し、相関行列の次数を従

* 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received February 1, 1990)

(Revised April 20, 1990)

来の実信号処理の場合に比べ半減させ、正弦波周波数を高精度に推定するものである。すでに、解析信号を用いる方法は、正弦波信号の周波数を推定するために、周知の Burg 法に適用した結果も報告されている¹⁹⁾。本論文では理論的に最も高分解能性を有するとされる Pisarenko の方法を取り上げ、さらにまた、解析信号を与えられた有限のデータから生成する際に問題とされる解析信号変換によるデータ数の削減、零位相フィルタリングを用いることにより克服している。さらには、デシメーションのサンプリング操作によって捨てられたデータを有効利用することにより、ある種の平均化操作を組み入れた三つの手法を導出し、この3手法を計算機シミュレーションにより比較検討し、最終的には、自己相関関数推定に平均化を導入した方法が最も優れた推定法であることを結論づけている。

本手法は、文献6)、7)の手法のように相関行列の次数を増大させることなく、低分散かつ高精度な周波数推定値を算出する。また、この種の問題の応用例として、正弦波信号の周波数推定問題が、センサアレーの出力信号からの到来波の方向探知問題に対応するために、複素信号処理として問題設定をしている文献も少なくない。先にあげた文献13)~18)の取り扱い内容もそれに該当し、容易に複素変数形への拡張が可能である。従って、すでに開発されているこれらのアルゴリズムを直接本手法に適用することができる。

本論文は、まず2章で従来の Pisarenko 法を述べ後章につなげる。3章では Pisarenko 法のための解析信号処理の有用性を明示する。4章では、平均化操作を導入した三つの手法を紹介し、5章のシミュレーション実験により、その3手法の実行能力を比較検討する。

2. 従来の Pisarenko 法

本章では、従来の Pisarenko 法を簡潔に述べる。観測信号が

$$x(n) = \sum_{i=1}^L A_i \cos(\omega_i n + \phi_i) + w(n) \quad (1)$$

の形で与えられる場合を考えることにする。ここで A_i 、 ω_i は正弦波信号の振幅と周波数で、 ϕ_i は $[0, 2\pi)$ の確率変数とみなせる初期位相である。 $w(n)$ は分散 σ_w^2 の白色雑音である。与えられた観測信号 $\{x(n)|n=1, \dots, N\}$ から高精度に $\{\omega_i|i=1, \dots, L\}$ を推定することがここでの目的である。Pisarenko 法の一つの特徴は、 $\{A_i|i=1, \dots, L\}$ をも推定することが可能なことであるが、現実問題として重要なのは、多くの場合周

波数値の抽出であるため、ここでは周波数推定のみについて考えることにする。

Pisarenko の方法はまず、 $\{x(n)|n=1, \dots, N\}$ から自己相関関数 $\{r(\tau)|\tau=0, \dots, 2L\}$ を推定する。その推定法には、相関行列 R の正定値性を保証するように、バイアス推定

$$r(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-\tau} x(n)x(n+\tau) \quad (2)$$

が通常用いられる。つぎに、(2)式から Toeplitz 相関行列

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(2L) \\ r(1) & r(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(2L) & \dots & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (3)$$

を構成し、

$$R\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (4)$$

の固有値問題を解く。ここで、 λ は R の最小固有値、 $\mathbf{a}$ はそれに対応する固有ベクトルである。この固有ベクトル $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{2L}]^T$ に対し、その第一要素を1と正規化した後、多項式

$$f(z) = 1 + \sum_{i=1}^{2L} a_i z^{-i} \quad (5)$$

を構成する。(5)式に $z = \exp(j\omega)$ を代入した後に

$$P(\omega) = \frac{1}{|f(\exp(j\omega))|^2} \quad (6)$$

のピークを抽出することにより、あるいは(5)式を

$$f(z) = \prod_{i=1}^L (1 - \exp(j\omega_i)z^{-1})(1 - \exp(-j\omega_i)z^{-1}) \quad (7)$$

のように因数分解することにより、正弦波信号の周波数 $\{\omega_i|i=1, \dots, L\}$ を推定する。

3. Pisarenko 法のための解析信号処理

本章では、従来の Pisarenko 法を改良する一手法として、解析信号を用いた複素正弦波信号処理に基づく方法を導出する。

3.1 解析信号変換

まず、与えられた観測信号 $\{x(n)|n=1, \dots, N\}$ を解析信号 $\{z(n)|n=1, \dots, N\}$ に変換する。 $z(n)$ は、負の周波数成分が零で、正の周波数成分が $x(n)$ の周波数成分の2倍の振幅値を有する複素信号である²⁾。 $x(n)$ の Hilbert 変換を $x_H(n)$ とすると、 $z(n)$ は $z(n) = x(n) + jx_H(n)$ と表現される。

解析信号変換法としては、しばしば Hilbert 変換器が用いられるが²⁾、この変換には、Hilbert 変換のインパルス応答に相当するデータ数がフィルタリング時において切り捨てられるため、スペクトル解析のよう

な、与えられるデータ数が比較的少ない問題に対しては適していない²⁰⁾。そこで本論文では、高速フーリエ変換 (FFT) を用いた方法を提案する。

今、 $\{x(n)|n=1, \dots, N\}$ を FFT によりその周波数成分 $\{X(k)|k=1, \dots, N\}$ に変換する。ここで $k=1$ は零周波数の直流成分に対応している。この $\{X(k)\}$ に対して、重み関数

$$W(k) = \begin{cases} 2 & 2 \leq k \leq N/2 \\ 1 & k=1, N/2+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

を掛け合わせ、その積 $X(k)W(k)$ を逆 FFT (IFFT) することにより $\{z(n)|n=1, \dots, N\}$ を得る。この FFT-IFFT によるフィルタリングは、零位相性を有し¹⁾、因果性を満たさない。しかし、一般にスペクトル解析は、与えられた観測信号の自己相関関数のパワースペクトルを基にその解析を行うため、パワースペクトルが零位相性を有することに着目すれば、必ずしも線形位相性を有するフィルタリングを施す必要はない。したがって、上記のフィルタリング方法は、 N 個のデータから N 個の解析信号を生成し、スペクトル解析には適した方法といえる。

つぎに、このようにして得られた解析信号 $\{z(n)|n=1, \dots, N\}$ にデシメーション比2のサンプリング操作を施す。すなわち、

$$z_1(m) = z(2n) \quad m=1, \dots, N/2, \quad n=1, \dots, N \quad (9)$$

である。(1)式の信号が解析信号に変換されれば

$$z(n) = \sum_{i=1}^L A_i \exp \{j(\omega_i n + \phi_i)\} + v(n) \quad (10)$$

となるが、ここで $v(n)$ は白色雑音の解析信号であり、一種の有色雑音となってしまう。有色雑音下でのスペクトル解析は、一般に白色雑音下に比べ困難であるため、(9)式のデシメーションにより、

$$\begin{aligned} z_1(m) &= z(2n) \quad m=1, \dots, N/2, \quad n=1, \dots, N \\ &= \sum_{i=1}^L A_i \exp \{j(\omega_i 2n + \phi_i)\} + v(2n) \end{aligned} \quad (11)$$

と雑音成分を白色化するわけである²⁾。

同様に、デシメーション操作を1サンプルずつずらすことにより、

$$z_2(m) = z(2n-1) \quad m=1, \dots, N/2, \quad n=1, \dots, N \quad (12)$$

とすることも可能である。(12)式も(11)式と同様に、

(注1) これは、 $x(n)$ から $z(n)$ への解析信号変換フィルタが零位相フィルタであることを意味する。

(注2) 白色雑音の解析信号の性質や、比2のデシメーション操作の必要性などはすでに報告されているので、文献19)を参照されたい。

雑音成分を白色化する性質を有する。3.3節では、(9)式と(12)式の2種類の信号に対して、複素変数型へ拡張された Pisarenko 法を適用し、その結果を比較することにする。その準備として、次章では従来の Pisarenko 法を複素変数型へ拡張する。

3.2 複素変数型 Pisarenko 法

自己相関関数推定を

$$s_i(\tau) = \frac{1}{N/2} \sum_{m=1}^{N/2-\tau} z_i^*(m) z_i(m+\tau) \quad i=1 \text{ or } 2, \quad m=1, \dots, N/2 \quad (13)$$

として、相関行列

$$S_i = \begin{bmatrix} s_i(0) & s_i(1)^* & \dots & s_i(L)^* \\ s_i(1) & s_i(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_i(L) & \dots & \dots & s_i(0) \end{bmatrix} \quad i=1 \text{ or } 2 \quad (14)$$

を構成する。ここで、実信号の場合((3)式)に比べ、行列のサイズが半減していることに注意されたい。それは、 $x(n)$ の解析信号 $z_i(m)$ は、正負の全周波数帯域に $x(n)$ の半分のラインスペクトルのみを有するためである。また、 $s_i(\tau)$ を推定するために用いられるデータ数が(2)式の場合の半分であるが、(13)式のバイアス推定における、最高ラグ(最大時間遅れ) L に対する偏りは、

$$\frac{N/2-L}{N/2}$$

であり、(2)式における最高ラグ $2L$ に対する偏り

$$\frac{N-2L}{N}$$

と同値であるため、データ数が減少することにより複素自己相関関数推定値(13)式が、実信号の場合に比べ悪化しないことは明らかである。

相関行列が得られたなら、実信号処理と同様にし、(14)式を固有値問題

$$S_i \mathbf{b} = \nu \mathbf{b} \quad (15)$$

として解くことにより、最小固有値 ν に対応する固有ベクトル $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_L]^T$ から、(6)式(7)式に類似したピーク抽出ないしは因数分解により、正弦波信号の周波数を推定することができる。しかしこの場合、(5)式の次数が $2L$ から L へ減少し、(7)式の因数分解には複素共役極は現われない。また、パワースペクトル(6)式においては、比2のデシメーションにより、推定される周波数は、見かけ上2倍に拡張されることには注意されたい。

3.3 計算機シミュレーション

本節では、計算機シミュレーションにより、Pisarenko 法のための解析信号処理の有用性を示す。

$$L=2, \quad A_1=A_2=1.0, \quad f_1=0.1, \quad f_2=0.15, \quad \phi_1=\phi_2=$$

0.0 の場合に, (1)式に基づき, $10\log(1/\sigma_w^2)$ によって定義される SNR が 20 (dB) になるように, 64 個の信号を生成し, 従来の Pisarenko 法と 3.2 節に記した方法を周波数推定に適用した. この操作を, それぞれ独立な付加白色雑音に対して 20 回試行した.

Fig. 1 は, 従来の Pisarenko 法によって得られた (6) 式の特徴を, その独立な試行 20 回について重ね合せ, プロットしたものである. **Fig. 2, Fig. 3**, は, FFT-IFFT 解析信号変換から, それぞれ $z_1(m)$, $z_2(m)$ を生成し, 複素変数型 Pisarenko 法から算出さ

Fig. 1 Conventional Pisarenko method

Fig. 2 Complex Pisarenko method with $z_1(m)$

Fig. 3 Complex Pisarenko method with $z_2(m)$

れた結果であり, やはり (6) 式の特徴をプロットしたものである. **Fig. 1** においては, 実信号処理であるため, パワースペクトルが零周波数に関して対象に現れているが, **Fig. 2, 3** の場合は, 零周波数に関して非対象であり, かつ, $0 \sim 0.5$ 上の周波数特性の周期になっていることに気づく. これは, 比 2 のデシメーションにより, $z_1(m)$ および $z_2(m)$ 中の周波数成分は, 見かけ上周波数軸上で 2 倍に拡張されているため, 得られたパワースペクトルを周波数軸上で再び $1/2$ に縮小したものを **Fig. 2, 3** にプロットしたためである. したがって, **Fig. 2, 3** では, **Fig. 1** と同一の正周波数域の座標から, 元の正弦波信号の周波数を抽出することが可能である.

Fig. 1, Fig. 2, 3 ともに $f_1=0.1$ および $f_2=0.15$ 付近にピークが存在し, おおまかな周波数推定がなされているといえよう. しかし, **Fig. 2, 3** に比べ **Fig. 1** のピーク値のばらつきは広く, 解析信号処理の優位性は明らかである.

この理由としては

- 解析信号の負の周波数成分が零であるために, 正と負のスペクトル特性の重ね合せによる周波数推定の偏差が低減される.
- デシメーション操作によって見かけ上のラインスペクトルがより分離され, 高分解能性が得られる²¹⁾.
- 推定問題としての立場から, モデル次数が半減することにより全体的な推定精度が向上する²²⁾.

などが考えられる.

Fig. 2, 3 ともに **Fig. 1** よりピーク値のばらつきは少ないが, **Fig. 2** と **Fig. 3** ではまた多少の相違がみられる. **Table 1** には, 本シミュレーションの独立な 20 回の試行におけるピーク抽出からの周波数推定の, 平均値と標準偏差を算出した結果がまとめてある. この表より, $z_1(m)$ を用いた場合と $z_2(m)$ を用いた場合では, 平均値または標準偏差に明らかな相違があることがわかる. 平均値では $z_2(m)$ を用いたほうが, 標準偏差では $z_1(m)$ を用いたほうが良好である.

Table 1 Comparison of estimation accuracy

	Pisarenko	Even	Odd
$f_1=0.1$	(0.107755)	(0.102586)	(0.097258)
	$\langle 0.1851181 \times 10^{-2} \rangle$	$\langle 0.1403992 \times 10^{-2} \rangle$	$\langle 0.1854436 \times 10^{-2} \rangle$
$f_2=0.15$	(0.170150)	(0.159907)	(0.155577)
	$\langle 0.4538052 \times 10^{-2} \rangle$	$\langle 0.1743874 \times 10^{-2} \rangle$	$\langle 0.2024687 \times 10^{-2} \rangle$

Even: Complex Pisarenko method with $z_1(m)$,

Odd: Complex Pisarenko method with $z_2(m)$,

(): Average, $\langle \rangle$: Standard deviation

これらのシミュレーション結果より、解析信号処理により推定結果を向上させることに加え、間引きの違いによって得られる二つの推定値の長所を組み合わせることにより、さらにその推定精度を向上させることが期待できる。この点に着目し、次章では、ある種の平均化法を導入した周波数推定法へと発展させる。

4. 平均化法

本章では、 $z_1(m)$ 、 $z_2(m)$ の2種類の信号を用いて、アルゴリズムの中にある種の平均化を導入することにより、より安定した高精度の推定結果を与える方法を導く。三つの方法を以下に示す。

方法①

$z_1(m)$ から推定される自己相関関数 $s_1(\tau)$ と $z_2(m)$ から推定される自己相関関数 $s_2(\tau)$ から

$$s_{ave}(\tau) = \{s_1(\tau) + s_2(\tau)\} / 2 \quad \tau = 0, 1, \dots, L \quad (16)$$

を求める。そしてこの推定された自己相関関数の平均値に対して、3.2節で述べた複素変数型の Pisarenko 法を適用する。この方法は、Pisarenko 法の実行能力が自己相関関数値の精度に大きく依存するという報告^{1), 2)}に基づき、その自己相関関数の計算に平均化操作を組入れることにより、その推定値のばらつきを抑え、また、 $z_1(m)$ と $z_2(m)$ のそれぞれの有する情報を一つの推定値の中へ統合するという意味においても、自然に考えられる方法である。

方法②

この方法は、まず $z_1(m)$ と $z_2(m)$ から推定された $s_1(\tau)$ と $s_2(\tau)$ にそれぞれ複素変数型 Pisarenko 法を適用し、固有ベクトル $\mathbf{b}_1 = [b_{10}, b_{11}^*, \dots, b_{1L}^*]^T$ 、 $\mathbf{b}_2 = [b_{20}, b_{21}^*, \dots, b_{2L}^*]^T$ を得た後に、新たな固有ベクトル

$$\mathbf{b}_{ave} = \left[\frac{b_{10} + b_{20}}{2}, \frac{b_{11}^* + b_{21}^*}{2}, \dots, \frac{b_{1L}^* + b_{2L}^*}{2} \right] \quad (17)$$

を算出する。そして、(17)式の第一要素を1に正規化し、(6)または(7)式から周波数を推定しようとする方法である。

$z_1(m)$ と $z_2(m)$ から求められる周波数推定値は理想的には同一であるため、因数分解してその極となる周波数値が同一であれば、対応する固有ベクトル値も同一であると予想される。したがって、この方法も、算出される周波数推定値に、ある種の平均化操作を導入した一手法といえる。

方法③

方法②と同様に、 $z_1(m)$ と $z_2(m)$ から推定された $s_1(\tau)$ と $s_2(\tau)$ にそれぞれ複素変数型 Pisarenko 法を適用し、固有ベクトル $\mathbf{b}_1$ 、 $\mathbf{b}_2$ を得る。しかし、本法では、(6)式の分母を、それぞれの場合において $|f_1(\exp(j\omega))|^2$ 、 $|f_2(\exp(j\omega))|^2$ として求め、最終的に

$(\exp(j\omega))|^2$ 、 $|f_2(\exp(j\omega))|^2$ として求め、最終的に

$$P_{ave}(\omega) = \frac{1}{\{|f_1(\exp(j\omega))|^2 + |f_2(\exp(j\omega))|^2\} / 2} \quad (18)$$

のピークを抽出することにより、周波数値を推定しようとする方法である。この方法は、最近レーダー、ソナーのアレー信号処理で特に注目を集めている、雑音部分空間を有効利用した MUSIC⁴⁾に多少類似した方法で、 $|f_1(\exp(j\omega))|^2$ と $|f_2(\exp(j\omega))|^2$ の平均値を算出し、その逆数から作られるピーク値を強調する意図がある。

以上の3手法はいずれも $z_1(m)$ と $z_2(m)$ が有する信号の性質を組み入れた方法である。複数の正弦波信号のための、有限データからの周波数推定アルゴリズムを解析的に比較することは数学的に困難であるため、次章では、これらの3手法を計算機シミュレーションを通して比較検討する。

5. 計算機シミュレーションならびに考察

3.3節で用いた例題と同一の信号に対して、4章で記した3手法を適用した。Fig. 4, 5, 6 はそれぞれ、方法①②③に対応した20回独立試行の結果を、

Fig. 4 Method ①

Fig. 5 Method ②

Fig. 6 Method ③

重ね合せ、プロットしたものである。また、Table 2 には、それぞれの手法によって得られた周波数推定値の平均値と標準偏差がまとめてある。まずこの Table 2 より、与えられた有限データからの正弦波信号の周波数推定問題として、3 手法ともほぼ類似した結果を与えていることがわかる。しかしながら、Fig. 4, 5, 6 を比較すると、算出されるパワースペクトルに顕著な違いが認められる。

Fig. 4 と 5 は、スペクトルの分解能、ばらつきともに類似しており、特にこれらの図を Fig. 2, 3 と比較すれば、解析信号からデシメートされた信号 $z_1(m)$, $z_2(m)$ のもつ性質に対する平均化の効果がよく現われている。一方、Fig. 6 に関しては、Fig. 4 や 5 に比べると、スペクトルのばらつきはほぼ同等であるが、分解能が大幅に劣化していることに気づく。これは、(18)式における $|f_1(\exp(j\omega))|^2$ と $|f_2(\exp(j\omega))|^2$ の平均化の一つの効果である。このような効果は MUSIC⁴⁾ に対しても現れ、一般に Pisarenko 法と MUSIC によって得られるパワースペクトルを比較した場合、Pisarenko 法のほうがスペクトルの尖り具合が急峻で、分解能が高い。

方法③による分解能の劣化は、高 SNR の信号に対してはさほど問題にならないが、低 SNR の信号に対しては大問題である。なお、方法①②に比べ方法③が低 SNR 信号に対して劣る結果を与える事実を、上述した以外のいくつかの計算機シミュレーション実験に

Table 2 Comparison of three proposed methods

	Method ①	Method ②	Method ③
$f_1=0.1$	(0.099966) $\langle 0.1509452 \times 10^{-2} \rangle$	(0.100024) $\langle 0.1498158 \times 10^{-2} \rangle$	(0.099922) $\langle 0.1506580 \times 10^{-2} \rangle$
$f_2=0.15$	(0.157609) $\langle 0.1800569 \times 10^{-2} \rangle$	(0.157640) $\langle 0.1796060 \times 10^{-2} \rangle$	(0.157742) $\langle 0.1781286 \times 10^{-2} \rangle$

(): Average, $\langle \rangle$: Standard deviation

より観測されたことをここに付記しておく。

つぎに、全体的な演算量を比較してみる。方法①が方法②③に比べ、一つの推定結果を得るために必要な演算量が少ないことは明白である。なぜなら、方法②③が、一つの推定結果を得るために 2 回の複素変数型 Pisarenko 法を適用しなければならないのに対して、方法①は、1 回の適用で済むためである。一般に、自己相関関数推定より、固有値分解ならびにピーク抽出、因数分解に多くの計算時間が費やされる。

以上の推定性能、演算量の比較より、3 手法の中では方法①が最も優れた周波数推定法であると考えられる。

つぎにここで提案した方法①と従来の Pisarenko 法に対して、 $L=1$, $f_1=0.1$, $\text{SNR}=30$ dB の条件下で (1) 式に基づき $N=128$ のデータを生成し、今度は、初期位相を 0 から 2π まで変化させたときの周波数推定結果を比較した。Table 3 はその結果をまとめたものである。この表より、従来の Pisarenko 法による最大誤差が 0.000567、方法①によるそれが 0.000483 であり、方法①のほうがわずかに優れていることがわかる。この結果は、周知の Burg 法に対して、本論文と類似した解析信号処理を施した場合には（ただし、前述したようにこの手法は、Hilbert 変換による有効データ数の削減問題を含む）、初期位相依存性が大幅に低減される事実¹⁹⁾と比較すれば、期待はずれの結果であるが、有限データからの自己相関関数推定値の偏差

Table 3 Comparison of method ① to conventional Pisarenko's method —dependence on the initial phase ($2\pi k/20$ corresponds to the initial phase ϕ_i)

k	Pisarenko	Method ①
1	0.100366	0.100240
2	0.100182	0.100359
3	0.100030	0.100453
4	0.099963	0.100483
5	0.100002	0.100437
6	0.100129	0.100329
7	0.100293	0.100197
8	0.100427	0.100091
9	0.100475	0.100049
10	0.100416	0.100088
11	0.100271	0.100191
12	0.100099	0.100321
13	0.099968	0.100428
14	0.099927	0.100473
15	0.099995	0.100444
16	0.100152	0.100351
17	0.100344	0.100233
18	0.100503	0.100137
19	0.100567	0.100101
20	0.100514	0.100140

は、初期位相以外にも周波数、データ数、SNRに依存する⁸⁾ことを考慮すれば、このTable 3の結果も納得できないわけではない。しかし、改善される度合がBurg法に比べ少ないとはいえ、方法①が従来のPisarenko法より初期位相に比較的影響されにくいことは、他の例題においても観測される一般的な性質といえる。以上の理由によりわれわれは、方法①を一つの高精度の周波数推定法の一つとして推奨する次第である。

6. おわりに

本論文では、FFT-IFFTによる零位相性を有する解析信号変換法を提案した。同時に、従来のPisarenko法に解析信号処理を導入することにより、その推定精度が大幅に向上する事実を示した。また、デシメーションにより切り捨てられた信号を有効利用する立場から三つのアルゴリズムを提案し、それらの実行能力を計算機シミュレーションを通して比較検討した。その結果、自己相関関数を平均化する手法が最も優れた周波数推定法であるとの結論を得た。

本手法は、低い推定分散値をとるだけでなく、従来のPisarenko法をも大幅に上回る高精度な推定結果を与える。さらにまた、近年開発されたいくつかの高速アルゴリズムを直接適用することができ、従来報告されている改良型Pisarenko法では不可能であった連続時間処理が、本手法では可能となることも、強調すべき事項の一つであろう。

参考文献

- 1) T. J. Ulrych and R. W. Clayton: Time Series Modelling and Maximum Entropy, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **12**, 188/200 (1976)
- 2) T. J. Ulrych and M. Ooe: Autoregressive and Mixed Autoregressive-Moving Average Models and Spectra, in *Nonlinear Methods of Spectral Analysis* by S. Haykin, Springer-Verlag (1983)
- 3) A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer: *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1975)
- 4) R. Schmidt: Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, **AP-34-3**, 276/280 (1986)
- 5) S. M. Kay and S. L. Marple: Spectrum Analysis—A Modern Perspective, *Proc. IEEE*, **69-11**, 1380/1419 (1981)
- 6) S. Kung and Y. Hu: Improved Pisarenko's Sinusoidal Spectrum Estimation via SVD Subspace Approximation Methods, *IEEE Conf. Decision and Control*, 1312/1314 (1982)
- 7) S. M. Kay: *Modern Spectral Estimation—Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1988)
- 8) 佐野 昭: 高分解能ラインスペクトル推定のためのプレフィルタリングの最適化, *電子情報通信学会論文誌 A*, **J70-A-9**, 1226/1233 (1987)
- 9) V. F. Pisarenko: The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **33**, 347/366 (1973)
- 10) 酒井, 得丸: Pisarenkoの方法による正弦波周波数の推定, *計測自動制御学会論文集*, **17-5**, 78/79 (1981)
- 11) H. Sakai: Statistical Analysis of Pisarenko's Method for Sinusoidal Frequency Estimation, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **ASSP-32-1**, 95/109 (1984)
- 12) P. Stoica and A. Nehorai: Study of the Statistical Performance of the Pisarenko Harmonics Decomposition Method, *IEE Proceeding*, **135-F-2**, 161/168 (1988)
- 13) Y. Hu and S. Kung: Highly Concurrent Toeplitz Eigen-System Solver for High Resolution Spectral Estimation, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1422/1425 (1983)
- 14) D. R. Fuhrmann and B. Liu: An Iterative Algorithm for Locating the Minimal Eigenvector of a Symmetric Matrix, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **45.8.1/45.8.4** (1984)
- 15) Y. Hu and S. Kung: Toeplitz Eigensystem Solver, *IEEE Trans.*, **ASSP-33-4**, 1264/1271 (1985)
- 16) M. H. Hayes and M. A. Clements: An Efficient Algorithm for Computing Pisarenko's Harmonics Decomposition Using Levinson's Recursion, *IEEE Trans.*, **ASSP-34-3**, 485/491 (1986)
- 17) G. Cybenko and C. V. Loan: Computing the Minimum Eigenvalue of a Symmetric Positive Definite Toeplitz Matrix, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7-1**, 123/131 (1986)
- 18) A. A. Beex and M. P. Fargues: Highly Parallel Recursive/Iterative Toeplitz Eigenspace Decomposition, *IEEE Trans.*, **ASSP-37-11**, 1765/1768 (1989)
- 19) S. M. Kay: Maximum Entropy Spectral Estimation Using the Analytical Signal, *IEEE Trans.*, **ASSP-26-5**, 467/469 (1978)
- 20) P. N. Swingler: Comments on "Maximum Entropy Spectral Estimation Using the Analytical Signal", *IEEE Trans.*, **ASSP-28-2**, 259/260 (1980)
- 21) M. P. Quirk and B. Liu: Improving Resolution for Autoregressive Spectral Estimation by Decimation, *IEEE Trans.*, **ASSP-31-3**, 630/637 (1983)
- 22) K. N. Berk: Consistent Autoregressive Spectral Estimates, *The Annals of Statistics*, **2-3**, 489/502 (1974)