構造化中間標準形システムの無限極と無限零点の次数

須田 信英*・万 柏平*

The Orders of Infinite Poles and Infinite Zeros of Structured Descriptor Systems

Nobuhide SUDA* and Baiping WAN*

This paper extends the graph approach for evaluating the orders of the infinite zeros of structured state space systems to structured descriptor systems. For the latter, not only infinite zeros but also infinite poles may exist. By introducing integration and differentiation nodes and defining a new index of pass in the system signal flow graph, it is found that the infinite poles and zeros are easily obtained from the graph, and that the nesting property is also applicable.

Key Words: structured descriptor systems, orders of infinite poles and zeros, signal flow graph

1. はじめに

本研究では、多入出力構造化中間標準形

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

で表わされるシステムの無限極および無限零点の構造的重複度について考察する。ここで、 $x(t)$, $u(t)$ と $y(t)$ はそれぞれ r , m と p 次元の中間変数、入力変数と出力変数ベクトルであり、係数行列 E , A , B , C の次元はそれぞれ $r \times r$, $r \times r$, $r \times m$, と $p \times r$ である。係数行列の要素が、システムの構造上零に固定されるものと、独立にかつ零以外の任意の値に変動できるものとに分けられるとし、このようにとらえたものを構造化中間標準形表現と呼び、以下これを $\Sigma(E, A, B, C)$ で表わす。筆者ら¹⁾は、すでに(1)式における E が単位行列である場合、つまり構造化標準形状態方程式で表わされるシステムについてその無限零点の次数をグラフ上で調べた。しかし、よく知られているように、中間標準形は標準形状態方程式よりもシステムの物理的構造を直接反映しており、その係数行列の要素は物理的パラメータと直接的に対応している場合が多い。その意味で、システムの構造的な性質を考察するのに適した表現である。

ここで用いる手法は、基本的には文献1)と同じなので、相違点だけを説明する。

2. グラフ表現と拡張 Mason 公式

2.1 基礎準備

はじめに無限極、無限零点の次数の定義と性質および構造的次数の定義を述べる。

【定義1】²⁾ (プロパーと限らない) 有理関数行列 $G(s)$ の無限極と無限零点の次数は $\tilde{G}(\omega)$ の $\omega = -\delta/\gamma$ における有限極と有限零点の次数と定義する。ここで、 s と ω は $s = \alpha\omega + \beta/\gamma\omega + \delta$ ($\gamma \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) と関係づけられる。

【補題1】²⁾ $G(s)$ の有理関数体における階数を h ($h \leq \min(m, p)$) とし、 α_i を $G(s)$ のすべての i 次小行列式の分母多項式と分子多項式の次数差の最小値とすると、ある k が存在して、 $1 \leq i \leq k$ に対しては $\alpha_i \leq \alpha_{i-1}$ が成り立ち、 $k+1 \leq j \leq h$ に対しては $\alpha_{j-1} \leq \alpha_j$ が成り立つ。 $\alpha_0 = 0$ において、非負の整数 $q_1, q_2, \dots, q_k$ と $q_{k+1}^*, q_{k+2}^*, \dots, q_h^*$ を

$$\begin{cases} q_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i, \\ q_j^* = \alpha_j - \alpha_{j-1} \end{cases} \quad (2)$$

と定めると、 $q_1, \dots, q_k$ が $G(s)$ の無限極の次数であり、 $q_{k+1}^*, \dots, q_h^*$ が $G(s)$ の無限零点の次数である。

【定義2】 $\Sigma(E, A, B, C)$ の無限極と無限零点の構造的次数とは、係数行列の変動要素のほとんどすべての値に対して、定義1で定められる $G(s) = E(sE - A)^{-1}B$ の無限極と無限零点の次数と定義する。すなわち、係数行列のほとんどすべての値に対して(2)式で求められる q_i と q_j^* のことをいう。

以下行列 $(sE - A)$ が正則とし、かつ s の多項式 $|sE - A|$ の次数 $\deg |sE - A|$ を n ($n \leq r$) とする。つぎの補題が成立する。

【補題2】³⁾ 多項式 $|sE - A|$ の次数を n とすると、ある順序行列 P, Q が存在して、

$$\begin{aligned} \hat{E} &= PEQ = \text{block diag} \{A_E, 0\} + E^* \\ &= \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* \\ E_{21}^* & E_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山 1-1

* Faculty of Engineering Science, Osaka University, Toyonaka
(Received June 7, 1990)
(Revised August 24, 1990)

$$\begin{aligned}\hat{A} &= PAQ = \text{block diag} \{0, A_A\} + A^* \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \quad (4)\end{aligned}$$

と表わされる。\$A_E, A_A\$ はそれぞれ \$n\$ と \$r-n\$ 個の \$E, A\$ の非零要素で構成した対角行列である。

補題2の \$P\$ と \$Q\$ を用いて \$\hat{B} = PB = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}\$ (\$\hat{B}_1: n \times m, \hat{B}_2: (r-n) \times m\$), \$\hat{C} = CQ\$ とおくと, \$\Sigma(E, A, B, C)\$ と \$\Sigma(\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})\$ は同じ伝達関数行列をもつ。したがって、以下 \$\Sigma(\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})\$ について考える。

【補題3】 (3)式における行列 \$E_{22}^*\$ の対角要素はすべて零固定要素である。

(証明) \$\hat{E}, \hat{A}\$ の形から、もし \$\hat{E}_{22}^*\$ の対角線上に非零要素があれば、多項式 \$|s\hat{E} - \hat{A}|\$ の次数は \$n+1\$ 以上となることが明らかで、これは \$\deg |s\hat{E} - \hat{A}| = \deg |sE - A| = n\$ と矛盾する。

さらに、便宜のために、\$\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\$ をつぎのように定義しておく。

$$\begin{cases} \bar{E} = - \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* \\ sE_{21}^* & sE_{22}^* \end{bmatrix} \\ \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}^*/s & A_{12}^*/s \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix} \\ \bar{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1/s \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \hat{C} \end{cases} \quad (5)$$

2.2 構造化中間標準形システムのグラフ表現

構造化中間標準形システム \$\Sigma(\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C})\$ のグラフ \$g(\Sigma)\$ は \$r+m+p\$ 個の節点を含む節点集合入力節点 \$\{u_1, u_2, \dots, u_m\}\$, 中間節点 \$\{x_1, x_2, \dots, x_r\}\$, 出力節点 \$\{y_1, y_2, \dots, y_p\}\$ とこれらを結ぶ枝の集合とから構成する。すなわち係数行列 \$\bar{E}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\$ の要素が零固定でないとき、対応する節点間に枝を設け、行列の要素をその枝のゲインとする。こうすると、中間節点同士の間には \$\bar{e}_{ij}\$ の枝と \$\bar{a}_{ij}\$ の枝とが存在しうが、前者を \$e\$-枝、後者を \$a\$-枝と呼ぶ。\$i=j\$ ならば、それぞれ \$e\$-セルフループ、\$a\$-セルフループという。パス、ループ、分離、\$r\$ 分離ループ群、\$L\$ 入出力分離マッチングおよびそれらのゲインの定義は文献1)と同じである。

文献1)ではパスに含まれる状態節点の個数をパスの長さとして定義し、それに基づいて構造的次数を求めた。これに対応するものとして、本稿では新たにパスの「指数」をつぎのように定義する。

まず(5)式の形に注目して、\$g(\Sigma)\$ において1から \$n\$ 番目までの中間節点 \$x_1, x_2, \dots, x_n\$ を積分節点と呼ぶ。残りの中間節点 \$x_{n+1}, \dots, x_r\$ を微分節点と呼ぶ。

【定義3】 パスに含まれる \$a\$-枝と \$b\$-枝の向かう積分節点の総数と \$e\$-枝の向かう微分節点の総数の差を

そのパスの指数という。

そして、\$L\$ 入出力分離マッチングの指数はそれを構成する \$L\$ 本のパスの指数の和とし、\$L\$ 入出力分離マッチングのうち、指数がもっとも小さいものを最小 \$L\$ 入出力分離マッチングという。

2.3 拡張 Mason 公式

《定理1》 システム \$\Sigma\$ の伝達関数行列 \$G(s)\$ の \$L\$ 次小行列式 \$\det G(s)^{iL, iL}\$ は次式で表わされる：

$$\det G(s)^{iL, iL} = \frac{\Sigma \Pi_m (C_{1m} + F_{1m}(s))}{C_0 + F_0(s)} \quad (6)$$

ただし、\$\Pi_m\$ は \$g(\Sigma)\$ における第 \$m\$ 番目の \$L\$ 入出力分離マッチングのゲインを表わし、\$F_{1m}(s)\$ は第 \$m\$ 番目の \$L\$ 入出力分離マッチングと分離しているすべての分離ループ群(セルフループだけから構成したものを除く)のゲインの代数和である。\$F_0(s)\$ はセルフループのみから構成された一つの分離ループ群を除いたすべての \$r\$ 分離ループ群のゲインの代数和である。\$\Sigma\$ はすべての \$L\$ 入出力分離マッチングについての和をとれという意味である。\$C_0, C_{1m}\$ は積分節点上の \$e\$-セルフループのゲインと微分節点上の \$a\$-セルフループのゲインから決まる常数である。

(6)式を拡張 Mason 公式といい、その証明はグラフ理論を用いて、文献1)におけるのと同様にできる。ただし、つぎの2性質に注目する必要がある。

P1. (6)式における \$C_0\$ と \$C_{1m}\$ は1とは限らないが、零とならない常数である。

P2. すべてのループのゲインは \$1/s\$ の多項式である。

P1は補題2の \$\lambda_1^*\$ と \$\lambda_2^*\$ の存在と補題3で保証される。P2はつぎのように証明できる。(5)式の \$\bar{A}\$ と \$\bar{E}\$ の定義から

$$\det(A - sE) = s^n \det(\bar{A} + \bar{E})$$

が確かめられる。\$n\$ は多項式 \$\det(A - sE)\$ の \$s\$ についての次数であるから、\$\det(\bar{A} + \bar{E})\$ は \$s^p\$ (\$p \geq 1\$) の因子を含まない。つまり、

$$\det(\bar{A} + \bar{E}) = \gamma_0 + \gamma_1/s + \dots + \gamma_n/s^n$$

の形でなければならない。一方、Mason の公式により \$\det(\bar{A} + \bar{E})\$ は \$g(\Sigma)\$ におけるすべてのループのゲインの代数和の項を含んでおり、各ループのゲインの係数がお互いに独立しているので、各ループのゲインが \$s^p\$ (\$p \geq 1\$) の項を含まないことはわかる。

3. 無限極、無限零点の構造的次数

性質 P2により、(6)式また(6)式の \$\Pi_m\$ は第 \$m\$ 番目の \$L\$ 入出力分離マッチングの指数 \$\mu_m^L\$ を用いて表現できる。

$$\det G(s)^{iL, iL}$$

$$= \frac{1}{s^{\mu_L} L} \sum_{\mu_L} \frac{C_m}{s^{\mu_L} L} \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{s} + \dots + \frac{\beta_p}{s^p} \right) \quad (7)$$

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{s} + \dots + \frac{\gamma_n}{s^n}$$

ただし、 $\mu^{iL} = \min_m(\mu_L^m)$ とおいた。ここで、 γ_0 と β_0 が零となるのはパラメータの値に特別な関係が成立する際にだけ生じることであって、いま構造化システムを考えているから、それはほとんど起こりえない。

これから明らかにように、 $\det G(s)^{iL}$ の分母分子多項式の次数差は μ^{iL} である。 $\mu_L = \min(\mu^{iL})$ 、すなわち、最小 L 入出力分離マッチングの指数とすると、 μ_L と構造的な $\alpha_L (L=1, 2, \dots, h) (h \leq \min(m, p))$ と等しいことがわかる。ただし、文献 1) と違うのはここでは μ_L が負になる可能性があることである。

以上の結果と補題 1 より無限極、無限零点の次数に関するつぎの定理が得られる。

《定理 2》 構造化システムの無限極、無限零点の次数 q_i と q_j^* は次式で与えられる。

$$\begin{cases} q_i = \mu_{i-1} - \mu_i & (1 \leq i \leq k) \\ q_j^* = \mu_j - \mu_{j-1} & (k+1 \leq j \leq h) \end{cases} \quad (8)$$

ただし $\mu_0 = 0$ とする。

したがって、システムのグラフにおける最小 $L (1 \leq L \leq h)$ 入出力分離マッチングの指数が求められれば、無限極と無限零点の次数はわかる。最小 L 入出力分離マッチングに関してつぎの性質がある。

〔補題 4〕 中間節点 x_j と x_i の間に、 x_j から出発して x_i に向かう a -枝と e -枝が同時に存在すれば、 a -枝は最小 L 入出力分離マッチングに含まれない。

(証明) これはグラフと最小 L 入出力分離マッチングの定義からほぼ自明である。

したがって、この場合、 a -枝の存在は無視できる。

また、文献 1) で定義した入れ子構造もそのまま成り立つ。

《定理 3》 最小 $L-1$ 入出力分離マッチングは最小 L 入出力分離マッチングの入出力節点对の間に存在する。

(証明) 文献 1) におけるのと同じように証明できる。

4. 例 題

〔例 1〕 中間標準形システム

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$

Fig. 1 Signal flow graph of the permuted system of example 1

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

を考える。 $\deg |sE - A| = 3$ であるので、補題 2 に基づき、順列行列 P, Q が E, A, B 行列の第 2 行と第 3 行を入れ換えることに対応する。順列変換後のシステムグラフは Fig. 1 に示すごとくである。このグラフにおいて最小分離マッチングの指数は $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3$ である。したがって、無限零点の次数は $q_1^* = 1, q_2^* = 2$ である。一方、 E が正則であるから、標準形システム $(E^{-1}A, E^{-1}B, C)$ に対して文献 1) の結果を適用すると、無限零点の次数は $q_1^* = 1, q_2^* = 1$ である。この例のように行列 E が正則な場合には、中間標準形を標準形状態方程式に変換できるが、変換後の状態方程式について求めた無限零点の構造的次数はもとの中間標準形について直接求めた結果と必ずしも一致しない。これは変動要素の独立性に対する仮定の違いによるものである。

5. おわりに

本論文は、中間標準形システムの無限零点および無限極の構造的な次数がグラフから求められることと、構造的次数に関して「入れ子」の性質もやはり成り立つことが示された。ただし、中間標準形は必ずしもプロパーな伝達関数を表わすとは限らないことを反映して、無限零点のみならず無限極もありうる点が標準形の場合と異なる。

参 考 文 献

- 1) 須田, 万, 上野: 構造化システムの無限零点の次数, 計測自動制御学会論文集, 25-10, 1062/1068 (1989)
- 2) A. I. G. Vardulakis, D. N. J. Limebeer and N. Karcianias: Structure and Smith-Macmillan from of a Rational Matrix at Infinity, Int. J. Control, 35-4, 701/725 (1982)
- 3) 松本, 池田: 中間標準形表現に基づく構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, 19-8, 601/606 (1983)