入出力雑音を受ける汎関数展開可能な系の同定[†]

沖 田 豪*・小 林 康 秀*・田 中 正 吾*

Identification for Nonlinear System Described by Functional Expansion with Noisy Input and Output

Tsuyoshi OKITA*, Yasuhide KOBAYASHI* and Shogo TANAKA*

We propose the method to determine the system structure and to estimate the parameters for the nonlinear system, described by the functional expansion.

First, we hypothesize candidate models of different structure. We may estimate the system parameters of each model by the proposed criterion function which is based on the maximum likelihood method. The estimated parameters are obtained analytically from noisy input and output data, and they are consistent.

Secondly, we calculate a posteriori probability for each model by using Bayesian theorem. We adopt the model whose a posteriori probability is maximum as the optimal one.

Finally, we verify the validity of this method by digital simulations.

Key Words: identification, nonlinear system, functional expansion

1. 緒 言

近年システム科学の進展や社会的要求から、対象とするシステムが広範に及ぶようになり、複雑多様な非線形系を取り扱う機会が多くなってきた。現実には遭遇する非線形システムでは、そのパラメータはもちろんのこと、構造もあいまいである場合がある。

これまで、公知のボルテラ核展開と対応づけることができ、Duffing 系、Van der Pol、Rayleigh の方程式など多くのシステムを表現できる汎関数展開表現が知られている¹⁾。ここでは、このような系を対象とし、その次数があいまいな場合の同定について考察する。

まず、先験情報に基づきモデルとして複数個の仮説を立てる。各モデルについて、パラメータは入出力情報に基づいて推定されるが、観測値は雑音に汚されている場合が多い。これまで、完全観測の入力と雑音に汚された出力の観測値を用いて、Bayes の定理により、システムの構造を決定し、パラメータを推定する方法が提案されている²⁾。しかし、実システムでは、出力の観測雑音のみでなく、システム雑音あるいは入力に観測雑音を含む場合が多い^{3)~5)}。

雑音を含む入出力の観測値を用いて未知パラメータを推定する際、システムの出力とモデルの出力との残差は未知パラメータ自身に依存する。そのため、単に最小2乗法を適用したり、式誤差のエントロピーを最小化するだけでは推定値にバイアスをもつことは、よく知られている^{6)~8)}。したがって、このパラメータに依存した残差の存在を認め、これを真のパラメータに対する残差に近づけて一致推定量を得よう。そのため、最尤法に基づきパラメータ推定の評価量を導入する。

さらに、各モデルの事後確率より、構造を決定する。

2. 問題の提示

対象とするシステムは、安定かつ有限項で汎関数展開可能であり、次式で表わされる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_0^T \mathbf{q}_0(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + w(k) \\ \vdots \\ x(k-n_1+2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ただし、

$$\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n_1+1)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_2+1)]^T \quad (3)$$

である。

ここで、 $\mathbf{x}(k)$ は n_1 次元状態変数、 $\mathbf{u}(k)$ は n_2 次元制御入力ベクトルであり、その共分散行列は正定である。

また、システムパラメータ θ_0 およびベクトル関数

[†] 第26回計測自動制御学会学術講演会で発表 (1987・7)

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

* Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube

(Received April 4, 1989)

(Revised August 21, 1989)

$\mathbf{q}_0(\cdot)$ はつぎのように定義される.

$$\theta_0 \triangleq [\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03}, \dots, \theta_{0L}]^T$$

$$\mathbf{q}_0(\cdot) \triangleq [q_{01}(\cdot), q_{02}(\cdot), q_{03}(\cdot), \dots, q_{0L}(\cdot)]^T$$

ただし,

$$q_{0l}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \triangleq \prod_{h=1}^{m(l)} \mu_{j_{h(l)}}(k) \quad 1 \leq l \leq L \quad (4)$$

$$\mu(k) \triangleq [\mathbf{x}(k)^T, \mathbf{u}(k)^T]^T$$

である. ここで, $m(l)$ は θ_{0l} を係数とする展開項の次数であり, $\mu_{j_{h(l)}}(k)$ は展開項を構成する $\mu(k)$ の要素を表わす. $w(k)$ はシステム雑音である.

また, 観測値は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}(k) + v(k) \\ z(k) &= \mathbf{u}(k) + \nu(k) \end{aligned} \quad k \geq 1 \quad (5)$$

ただし,

$$\mathbf{h}^T = [1, 0, 0, \dots, 0] \quad ; \quad n_1 \text{ 次元}$$

であり, $v(k)$ および $\nu(k)$ は観測雑音である. 入力 $\mathbf{u}(k)$ および雑音 $v(k)$, $w(k)$, $\nu(k)$ は, それぞれ発生源が異なるため統計的に独立であり, 雑音 $v(k)$, $w(k)$, $\nu(k)$ は白色定常エルゴード過程で, つぎのガウス分布に従う. $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$, $w(k) \sim N(0, \sigma_w^2)$, $\nu(k) \sim N(0, \sigma_\nu^2)$. このとき, 観測値系列,

$$Y_k = \{y(1), z(0), y(2), \dots, y(k), z(k-1)\}$$

に基づいて, システムの構造を決定し, パラメータを推定する問題を考える.

3. システムの同定

本方法では, まず, 候補モデルとして複数個の仮説を立て, 最尤法に基づきパラメータを推定する. つぎに, Bayes の定理より各候補モデルの事後確率を計算し, その確率を基にシステムの構造を決定する. そこで, 候補モデルを設定する方法について考えよう.

まず, システムの構造に関する先験情報が与えられ, 構造の推測がある程度可能な場合は, それらに基づいて複数個のモデルを設定すればよい. しかし, そのような先験情報がない場合, 次数によりシステムを分類し, その各分類に属する代表的なモデルの適合性を考慮して, 候補モデルを設定することが考えられている²⁾.

3.1 パラメータ推定

上記により, (1)式のシステムに基づいて, モデルとしてつぎの M 個の仮説を立てる.

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_i^T \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) x_i(k) \\ \vdots \\ x_i(k-n_{i1}+2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0} \quad (i=1, \dots, M)$$

ここで, i はモデルの識別番号であり, θ_i および $\mathbf{q}_i(\cdot)$ は L_i 次元である. また, モデルの出力は次式

で表わされる.

$$y_i(k) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}_i(k) \quad (i=1, \dots, M) \quad (7)$$

対象とするシステムからの情報は観測値 $y(k)$, $z(k)$ を通して得られるが, $y(k)$, $z(k)$ は雑音に汚されている. パラメータは連続量でその先験分布が未知, 雑音の分布は既知であるため, 最尤法に基づいてパラメータを推定する.

$$L(\hat{\theta}_i) = \max_{\theta_i} \log P(Y_k | \theta_i)$$

ここで, 観測雑音 $v(k)$, $\nu(k)$ が白色ガウス性のため, 尤度関数はエルゴード性の仮定のもとで次式となる.

$$\begin{aligned} \log P(Y_k | \theta_i) &= - \frac{\sum_{k_1=1}^k \{y(k_1) - y_i(k_1)\}^2}{2\sigma_v^2} + \text{const} \\ &= - \left\{ \sum_{k_1=1}^k y^2(k_1) - 2\theta_i^T \sum_{k_1=1}^k (y(k_1) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{q}_i(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1))) \right. \\ &\quad \left. + \theta_i^T \sum_{k_1=1}^k (\mathbf{q}_i(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1))) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1))) \theta_i \right\} / 2\sigma_v^2 \\ &\quad + \text{const} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし,

$$\sigma_v^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2$$

である. 上式で, ベクトル $\sum_{k_1=1}^k y(k_1) \mathbf{q}_i(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1))$ および行列 $\sum_{k_1=1}^k \mathbf{q}_i(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1))$ に含まれる $\mathbf{x}_i(k_1-1)$, $\mathbf{u}(k_1-1)$ は直接得られない. したがって, これらを観測値 $y(k)$, $z(k)$ で近似することを考える. まず, (5)式よりつぎの $y_i(k)$, $z(k)$ を定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i(k) &\triangleq [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_{i1}+1)]^T \\ &= \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{v}_i(k) \\ \mathbf{z}(k) &\triangleq [z(k), z(k-1), \dots, z(k-n_{i2}+1)]^T \\ &= \mathbf{u}(k) + \nu(k) \end{aligned} \quad (9)$$

これを(4)式に代入すれば, 二項定理よりつぎの関係式が得られる.

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) = B_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{q}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \quad (10)$$

ただし, 行列 B_i の要素 $b_{j_1 j_2}$ は,

$$b_{j_1 j_2} = \begin{cases} 0 & (j_1 < j_2) \\ 1 & (j_1 = j_2) \\ b_{j_1 j_2} & (j_1 > j_2) \end{cases}$$

である³⁾. $b_{j_1 j_2}$ は $v(k)$, $\nu(k)$ との積の項を示し, 線形のモデルでは 0 となる.

$\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{v}_i(k)$, $\nu(k)$ が互いに独立であることを考慮し

て(10)式の期待値をとれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) &= \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \\ &+ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、記号 $\bar{\cdot}$ は $v(k)$, $\nu(k)$ についての期待値を示す。 $\bar{\mathbf{B}}_i$ は対角要素に1をもつ三角行列であり、 $\bar{\mathbf{B}}_i^{-1}$ は存在して(11)式より $\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) &= \bar{\mathbf{B}}_i^{-1} \{ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \\ &- \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \} \end{aligned} \quad (12)$$

また、(10)式より $\mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k))$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) &= \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{B}_i^T \\ &+ \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \\ &+ \mathbf{q}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{B}_i^T \\ &+ \mathbf{q}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \end{aligned} \quad (13)$$

さらに、3次のテンソル $\mathbf{C}_i$ 、4次のテンソル $\mathbf{D}_i$ を用いて次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) &= \mathbf{D}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \\ &+ \mathbf{C}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) + (\mathbf{C}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)))^T \\ &+ \mathbf{q}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$ はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) &\triangleq \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \\ \mathbf{D}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) &\triangleq \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{B}_i^T \end{aligned}$$

$\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$ は雑音 $v(k)$ および $\nu(k)$ の統計量で表わされるので、これを知ることができる。 $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}_i$ を $v(k)$, $\nu(k)$ について期待値をとれば、 $\bar{\mathbf{C}}_i$ の (j_1, r, j_2) 要素 $\bar{c}_{j_1 r j_2}$ および $\bar{\mathbf{D}}_i$ の (j_1, j_2, r, s) 要素 $\bar{d}_{j_1 j_2 r s}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{c}_{j_1 r j_2} &= \bar{b}_{j_1 r} \mathbf{q}_{j_1 j_2}(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \\ \bar{d}_{j_1 j_2 r s} &= \begin{cases} 0 & (j_1 < j_2 \text{ or } r < s) \\ 1 & (j_1 = 1 \text{ and } r = s) \\ \bar{b}_{j_1 j_2} \bar{b}_{r s} & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

また、このような $\bar{\mathbf{D}}_i$ の性質より、次式を満たす4次のテンソル $\bar{\mathbf{D}}_i^{-1}$ が存在する⁹⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \} &= \bar{\mathbf{D}}_i^{-1} \mathbf{E} \{ \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \\ &\times \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{B}_i^T \} \end{aligned} \quad (16)$$

(14)式で、 $v(k)$, $\nu(k)$ について期待値をとれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) &= \bar{\mathbf{D}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \\ &+ \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) + (\bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)))^T \end{aligned}$$

$$+ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \quad (17)$$

よって、 $\mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) &= \bar{\mathbf{D}}_i^{-1} \{ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \\ &+ \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)) + (\bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k)))^T \\ &+ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k), \nu(k)) \} \end{aligned} \quad (18)$$

システムの安定性および雑音のエルゴード性より、(12), (18)式の $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k))$, $\mathbf{q}_i(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{y}_i(k), \mathbf{z}(k))$ の期待値を時間平均に置き換えれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^k \mathbf{y}(k_1) \cdot \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) &= \sum_{k=1}^k \mathbf{y}(k_1) \bar{\mathbf{B}}_i^{-1} \{ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k_1-1), \mathbf{z}(k_1-1)) \\ &- \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k_1-1), \nu(k_1-1)) \} \\ &\triangleq \boldsymbol{\alpha}_i \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^k \mathbf{q}_i(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) &= \sum_{k=1}^k \bar{\mathbf{D}}_i^{-1} [\bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k_1-1), \mathbf{z}(k_1-1)) \\ &\cdot \bar{\mathbf{q}}_i^T(\mathbf{y}_i(k_1-1), \mathbf{z}(k_1-1)) \\ &- \bar{\mathbf{C}}_i \bar{\mathbf{B}}_i^{-1} \{ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k_1-1), \mathbf{z}(k_1-1)) - \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k_1-1), \nu(k_1-1)) \} \\ &- \{ \bar{\mathbf{C}}_i \bar{\mathbf{B}}_i^{-1} \{ \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{y}_i(k_1-1), \mathbf{z}(k_1-1)) - \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k_1-1), \nu(k_1-1)) \} \}^T \\ &- \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{v}_i(k_1-1), \nu(k_1-1)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{v}_i(k_1-1), \nu(k_1-1))] \\ &\triangleq \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、(19), (20)式を用いて(8)式を近似し、パラメータ推定の評価量としよう。

$$I_i \triangleq \sum_{k=1}^k \mathbf{y}^2(k_1) - 2\boldsymbol{\theta}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{A}_i \boldsymbol{\theta}_i \quad (21)$$

ここで、システムは安定であり、入力 $\mathbf{u}(k)$ の共分散行列は正定である。したがって、パラメータ数に比べてデータ数が十分大きいとき、 $\mathbf{A}_i$ はほとんど確かに正定値行列となる。このとき、評価量 I_i を最小にする推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ は、一意に得られる。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = \mathbf{A}_i^{-1} \boldsymbol{\alpha}_i \quad (22)$$

得られた推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ は、データ数の増加とともに中心極限定理により $\mathbf{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i0}, \mathbf{A}_i)$ のガウス分布に従うと考えられる¹⁰⁾。ただし、

$$\boldsymbol{\theta}_{i0} = \mathbf{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}_i | \mathbf{Y}_{k-1}]$$

$$\mathbf{A}_i \triangleq \sigma_v^2 \cdot \mathbf{A}_i^{-1} + \mathbf{A}_i^{-1} \sum_{k=1}^k \{ (\mathbf{y}(k_1) - \sigma_v^2)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) \bar{\mathbf{q}}_i^T(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) - (\mathbf{y}(k_1) - \sigma_v^2) \\ &\times \bar{\mathbf{q}}_i(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) \mathbf{q}_i^T(\mathbf{x}_i(k_1-1), \mathbf{u}(k_1-1)) \} \mathbf{A}_i^{-1} \end{aligned}$$

であり、データ数が十分大のとき、上式の各項とも、 $O(k^{-1})$ となる。したがって、 A_i は漸近的に、 $O(k^{-1})$ である。

3.2 システム構造の決定

ここでは、(6)式の候補モデルの中から最適モデルを決定する。各モデルの推定値 $\hat{\theta}_i$ に基づいて、各モデル i の事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ を知ることができる。

$$\Pi(i|Y_k) = \Pi(i|Y_{k-1}) \frac{P(y(k)|i, Y_{k-1})}{P(y(k)|Y_{k-1})} \quad (23)$$

$$\Pi(i|0) = 1/M \quad (i=1, \dots, M)$$

ただし、

$$P(y(k)|Y_{k-1}) = \sum_{i=1}^M \Pi(i|Y_{k-1}) P(y(k)|i, Y_{k-1}) \quad (24)$$

$$P(y(k)|i, Y_{k-1}) = \frac{1}{\{2\pi\sigma_i^2\}^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(y(k) - y_i(k))^2}{\sigma_i^2}\right\} \quad (25)$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 + \mathbf{c}_i^T A_i \mathbf{c}_i + \hat{\theta}_i^T \text{Cov}(\mathbf{q}_i(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1))) \hat{\theta}_i$$

$$\mathbf{c}_i^T \triangleq \left. \frac{\partial y_i(k)}{\partial \hat{\theta}_i} \right|_{\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i0}}$$

である。(23)式は時刻 k の推移に伴って逐次計算され、事後確率が最大となるモデルを最適モデルとしよう。事後確率の漸近的性質より、正しいモデルの事後確率がデータ数の増加とともに最大となることが示されている¹¹⁾。

一方、データ数が少ない場合、雑音の影響でモデルによっては、つぎの三つの条件を満たさないことがある。

$$A) \quad A_i > 0$$

$$B) \quad \sum_{k_1=1}^k (y(k_1) - y_i(k_1))^2 < \sum_{k_1=1}^k y(k_1)^2 \\ (i=1, \dots, M)$$

$$C) \quad \sum_{k_1=1}^k (y(k_1) - y_i(k_1))^2 < \sum_{k_1=1}^k (y(k_1) - y_j(k_1))^2 \\ i \geq 2, i > j$$

(ただし、低次よりモデル番号 i を付けるものとする)

そこで、A), B), C) のうち一つでも満たさないモデルは不適切と考えられる。したがって、そのモデルにペナルティとしてつぎの操作を施して確率を計算する。A), B), C) のすべてを満たしたモデルを i 、満たさないモデルを i_0 とすれば、

$$P(y(k)|i_0, Y_{k-1}) = \beta \times \min_i P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ (0 < \beta \leq 1) \quad (26)$$

として事後確率の計算を続行する。

このようにパラメータ推定値 $\hat{\theta}_i$ が得られると、その推定誤差分散を考慮して、(23)式より各モデルの事後確率を具体的に計算できる。よって、この事後確率よりシステムの構造を決定することが可能である。

なお、入力の設定誤差も雑音 v と見なすことができる。

4. 実験的考察

4.1 シミュレーションの概要

本方法の理論的正当性を検証するために、ディジタルシミュレーションを行う。ここでは、工学、生物、経済などの分野でよく用いられる双線形系および非線形振動を表わす Duffing 系を対象とする。パラメータ θ_0 と構造を表わすベクトル関数 $\mathbf{q}_0(\cdot)$ は、つぎのとおりである。

(1) 双線形系

$$\mathbf{q}_0(\cdot) = [x(k), x(k-1), u(k), x(k)u(k)]^T$$

$$\theta_0 = [0.4, -0.3, 1.0, -0.8]^T \quad (2)$$

(2) Duffing 系

$$\mathbf{q}_0(\cdot) = [x(k), x(k-1), u(k), x^2(k), x^3(k)]^T$$

$$\theta_0 = [0.3, -0.7, 1.0, 0.2, -0.02]^T$$

システムの構造を決定する際、システムに類似したモデルほど識別が難しいと考えられる。そこで、ここでは、システムと同じ構造をもつモデル、低次のモデル、冗長なモデルを設定し、シミュレーションを行う。具体的には、(1), (2) のシステムに対して、それぞれつぎのモデルを設定する。

(1) 双線形系に対するモデル

モデル 1

$$\mathbf{q}_1 = [x_1(k), u(k)]^T$$

モデル 2

$$\mathbf{q}_2 = [x_2(k), x_2(k-1), u(k)]^T$$

モデル 3

$$\mathbf{q}_3 = [x_3(k), x_3(k-1), u(k), x_3(k)u(k)]^T$$

モデル 4

$$\mathbf{q}_4 = [x_4(k), x_4(k-1), u(k), x_4(k)u(k), x_4^2(k)]^T$$

モデル 5

$$\mathbf{q}_5 = [x_5(k), x_5(k-1), u(k), x_5(k)u(k), x_5^2(k), x_5^3(k)]^T$$

(2) Duffing 系に対するモデル

モデル 1

$$\mathbf{q}_1 = [x_1(k), x_1(k-1), u(k)]^T$$

モデル 2

$$\mathbf{q}_2 = [x_2(k), x_2(k-1), u(k), x_2^2(k)]^T$$

モデル 3

$$\mathbf{q}_3 = [x_3(k), x_3(k-1), u(k), x_3^2(k), x_3^3(k)]^T$$

モデル 4

$$\mathbf{q}_4 = [x_4(k), x_4(k-1), u(k), x_4^2(k), x_4^3(k), x_4(k)x_4(k-1)]^T$$

モデル 5

$$\mathbf{q}_5 = [x_5(k), x_5(k-1), u(k), x_5^2(k), x_5^3(k), x_5(k)x_5(k-1)]^T$$

いずれもモデル 3 がシステムと同じ構造である。

また、雑音をつぎのように与える。

$$1) \quad \sigma_v = 0.03, \sigma_w = 0.03, \sigma_p = 0.003$$

$$2) \quad \sigma_v = 0.11, \sigma_w = 0.11, \sigma_p = 0.011$$

$$3) \quad \sigma_v = 0.35, \sigma_w = 0.35, \sigma_p = 0.035$$

また、入力 $u(k)$ は $N(0, 1)$ とする。さらに、データ数が小さいときの対策として、(26)式で $\beta = 0.9$ とする。それぞれの場合について 5 通りの乱数系列に対しシミュレーションを行う。

4.2 シミュレーションの結果と考察

前節のシミュレーションの結果について述べ、考察を加える。

Duffing 系に対する結果を示す。雑音の大きさを 1) ~ 3) とした場合、事後確率 $\Pi(i|Y_K)$ および正しい構造のモデルのパラメータ推定値をそれぞれ Fig. 1~3 に示す。これらの事後確率の結果より、データ数が比較的小さいとき低次のモデルの確率が最大になっている。データ数の増加とともに正しい構造のモデルの確率が 1 に近づき、システムを明確に識別している。また、このモデルのパラメータ推定値は、データ数が小さいとき、真値のまわりでゆらいているが、その後真値に漸近している。

これらの図より、SN 比が悪いほどパラメータ推定値および構造識別に多くのデータ数を必要とする傾向がある。

SN 比が悪く、かつデータ数が小さいとき、推定値が 3.2 節で設けた B), C) の条件を満足せず、(26)式の操作を施している。これにより妥当な結果を得ており、この修正法は、推定値の信頼性が低いとき有効と考えられる。

つぎに、双線形系の結果について述べる。雑音の大きさを 1) ~ 3) とした場合、事後確率 $\Pi(i|Y_K)$ および正しい構造のモデルのパラメータ推定値をそれぞれ Fig. 4~6 に示す。事後確率およびパラメータ推定値は Duffing 系と同様な傾向を示している。

また、それぞれの場合について、5 通りの乱数系列に対して、構造の識別に要するデータ数の最大値、最小値およびその平均を Table 1 に示す。いずれの場合も同様な傾向が見られる。

よって、システムと同じ構造の候補モデルがある場

Fig. 1 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for Duffing system in case 1)

Fig. 2 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for Duffing system in case 2)

Fig. 3 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for Duffing system in case 3)

Fig. 5 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for bilinear system in case 2)

Fig. 4 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for bilinear system in case 1)

Fig. 6 A posteriori probabilities and estimated parameters of true model for bilinear system in case 3)

Table 1 Number of data to discriminate the system structure

	Duffing system	Bilinear system
Size of noise	av., (min~max)	
Case-1)	13, (10~ 18)	10, (10~11)
Case-2)	28, (11~ 54)	10, (10~11)
Case-3)	126, (12~373)	17, (10~22)

合、本方法によって汎関数展開可能な系のパラメータ推定および構造決定が可能であると考えられる。

5. 結 言

入出力雑音およびシステム雑音に汚された汎関数展開可能な系を対象とし、その同定法を提案した。まず、あらかじめ複数のモデルを設定し、パラメータを推定する。その際、最尤法に基づいて評価関数を導入し、ほとんど確かに一致推定量を得ている。つぎに、Bayes の定理により各モデルの事後確率を計算し、その確率から最適モデルを決定している。

さらに、シミュレーションにより本方法の理論的正当性を検証している。したがって、入出力雑音およびシステム雑音により汚された汎関数展開可能な系の同定が可能と考えられる。

今後の課題として、システムの構造に関する先験情報がない場合、候補モデルのより適切な設定方法を考える必要がある。これらについては、引続き検討した

い。

拙文を校閲いただいた方々に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) E.G. Gilbert: Functional Expansions for the Response of Nonlinear Differential Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-22-6**, 909/921 (1977)
- 2) 沖田, ほか: Bayes の定理に基づく非線形系の一同定法, 電気学会論文誌 C, **104-6**, 149/155 (1984)
- 3) T. Söderström: Identification of Stochastic Linear System in Presence of Input Noise, Automatica, **17-5**, 713/725 (1981)
- 4) B.D.O. Anderson: Identification of Scalar Errors-in-Variables Models with Dynamics, Automatica, **21-6**, 709/716 (1985)
- 5) W.R. Wouters: On-line Identification in an Unknown Stochastic Environment, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, **SMC-2-5**, 666/668 (1972)
- 6) 鈴木 胖: システムアイデンティフィケーション IV, 制御工学, **14-11**, 683/693 (1970)
- 7) H.L. Weidemann and E.B. Stear: Entropy Analysis of Parameter Estimation, Information and Control, **14-6**, 493/506 (1969)
- 8) 有本 卓: 一般化された情報量と有限パラメータ推定問題, 情報処理, **12-9**, 544/555 (1971)
- 9) A. Netravali and R.P. De Figueiredo: On the Identification of Nonlinear Dynamical Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-16-1**, 28/36 (1971)
- 10) 添田, ほか: 数理統計の基礎と応用, 日新出版 (1980)
- 11) 沖田, ほか: 指数属の分布に従う雑音下での汎関数展開可能な系の同定, 電気学会論文誌 C, **107-4**, 381/388 (1987)