ある粘弾性体の集中定数系によるモデリング†

藤井 信夫*・竹内 尚寿**・羅 正華*

A Lumped Parameter Model for a Visco-Elastic System

Nobuo FUJII*, Hisatoshi TAKEUCHI** and Zheng Hua LUO*

In this paper, a lumped parameter model for a visco-elastic system is proposed and examined through some experiments. The experimental results show that the lumped parameter model is a good approximation for the original distributed parameter system in certain situation.

Key Words: visco-elastic system, distributed parameter system, lumped parameter model, approximation

1. ま え が き

近年、粘弾性体の集中定数系によるモデリングとして、数万ないしは十数万個の固有値、固有関数を求めて行う方法が提案^{1)~3)}されているが、汎用性を犠牲にして特別な場合を取り扱う場合を考えれば、ずっと簡単なモデルを作ることができると期待される。なぜなら、粘弾性体の理論は、弾性体の理論に対応原理によってスプリング・ダッシュポットモデルを対応させて得られ^{4),5)}、この粘弾性体の理論が現実の粘弾性体の振舞をよく記述しているからである。

本小論では、防振ゴムなどを念頭において、上から一様な荷重の加わる直方体の粘弾性体を取り扱い、これに対する2次の集中定数モデル (Voigt 形のスプリング・ダッシュポットモデル) を導き、簡単な実験によってその妥当性を確かめる。このような粘弾性体の簡単なモデルは、防振系の設計や制御などに役立つと思える。しかしながら、後に見るように、完全な解析を望むならば分布定数系として扱わねばならない。

2. 集中定数モデル

いま、面積 $A \text{ m}^2$ 、厚さ $l \text{ m}$ の直方体である粘弾性

体 (具体的には Chloroprene ゴム) を考え、鉛直上面に $m \text{ kg}$ の均一な荷重 (具体的には鉄板を載せる) がかかっているとする。鉛直上方を x 軸に取り、 x 方向の変位を u で表わす。少し乱暴であるがつぎの4個の仮定をする。

- (i) 水平面内の変位、したがってストレイン、ストレスを無視する。
- (ii) ずりの大きさに較べて体積変化は小さい。
- (iii) 変位 u は水平面内の座標 (y, z とする) によらない。
- (iv) ゴムを念頭においているので、ストレスとストレインの間の関係は Voigt 形 (Kelvin 形ともいう) とする。

第4の仮定より、構成方程式は、 q_0 を弾性係数、 q_1 を粘性係数として、

$$\sigma_x = \left(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_x \quad (1)$$

で表わされる。ただし、 σ_x はストレスを ε_x はストレインを表わし、

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$$

で定義される。このように考えると変位 $u = u(x, t)$ の運動方程式は、 g を重力の加速度、 ρ を粘弾性体の密度とすると、つぎのように近似できる。

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \right) = \left(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

境界条件であるが、下面は床に固定されているとすると、

$$u(0, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

と考えてよい。上面では単位面積当り $m \text{ kg}$ の荷重がかかっているので、

$$\sigma(l, t) = \left(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = -m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g \right) \quad (t \geq 0) \quad (4)$$

が成り立たねばならない。

ここで、つぎの第5の仮定をする。

- (v) x 軸方向の加速度は g が無視できるほど大きい。

† 第32回自動制御連合講演会で発表 (1989・10)

* 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-1

** (株)野村證券 東京都中央区日本橋 1-9-1

* Department of Control Engineering, Osaka University, Toyonaka

** Nomura Securities, Chuo-ku, Tokyo

(Received August 10, 1989)

(Revised October 30, 1989)

さて、この仮定を念頭において解 u を $u(x, t) = e^{-\lambda t} v(x)$ の形に仮定して、(2)式に代入し、整理すると $v(x)$ についての方程式として

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\rho \lambda^2}{\lambda q_1 - q_0} v = 0 \quad (5)$$

を得る。これの解は(3)式を考慮すると、

$$v = \sin(Q(\lambda)x) \quad \left(Q(\lambda) = \sqrt{\frac{\rho \lambda^2}{\lambda q_1 - q_0}} \right) \quad (6)$$

となる。さらに境界条件(4)式を使うと、 λ についての超越方程式

$$\tan(Q(\lambda)l) = \frac{\rho l}{m_0 Q(\lambda)l} \quad (7)$$

を得る。 $X = Q(\lambda)l$ において、上記方程式両辺のグラフを描いて第1象限における交点を左から順に、 $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ とする。グラフより容易にわかるように、

$$X_n \rightarrow n\pi \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8)$$

となる。関数 $Q(\lambda)$ や X の定義より対応する固有値 λ_n^* は、

$$\lambda_n^* = \frac{X_n^2}{2\rho l^2} q_1 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho l^2 q_0}{X_n^2 q_1^2}} \right) \quad (9)$$

で与えられる(複号同順)。これより、

$$X_n^2 < 4\rho l^2 (q_0/q_1^2)$$

の満たされる有限個のモードだけが減衰振動的であり、残りの無限個のモードは指数関数的に減衰するモードであることがわかる。後述する実験に用いた Chloroprene ゴムの場合について試算すると、0次のモードより高次のモードは数十倍も速く減衰するので、いつまでも残る過渡応答を記述するには高次のモードを無視してよいことがわかる。したがって、いつまでも残る過渡応答を記述するモデルとして、0次の固有値より Fig. 1 のスプリング・ダッシュポットモデルが得られる。つまり、質量を M 、スプリングのばね定数を $\bar{q}_0$ 、ダッシュポットの減衰係数を $\bar{q}_1$ とすると、 M についての運動方程式は、

$$M\ddot{U} = M \frac{d^2 U}{dt^2} = -\bar{q}_0 U - \bar{q}_1 \dot{U} \quad (10)$$

Fig. 1 Spring-dashpot model

となる。解 U を $U = ae^{-\lambda t}$ と仮定して上式に代入すれば、自明でない解をもつための条件から λ の方程式

$$M\lambda^2 - \bar{q}_1\lambda + \bar{q}_0 = 0$$

を得、これより

$$\lambda^* = \frac{\bar{q}_1 \pm \sqrt{\bar{q}_1^2 - 4\bar{q}_0 M}}{2M} \quad (11)$$

なる固有値を得る。これと(9)式で $n=0$ とおいた λ の表現を比較して、

$$\bar{q}_0 = \frac{X_0^2 q_0}{\rho l^2} M, \quad \bar{q}_1 = \frac{X_0^2 q_1}{\rho l^2} M \quad (11)$$

を得る。しかも、荷重と粘弾性体は密着しているで、

$$U(t) = u(l, t)$$

であることに注意されたい。かくして、荷重の鉛直方向の(いつまでも続く)過渡応答について、粘弾性体に対するスプリング・ダッシュポットモデルが得られた。

少なくとも、第0次のモードが振動的である(実際、後述の実験システムでは第0次のモードのみが振動的であることが数値的に推察された)場合、(10)式の解は

$$\dot{U} = A \exp\left(-\frac{X_0^2 q_1}{2\rho l^2} t\right) \exp\left[i\sqrt{\left(\frac{X_0^2 q_1}{2\rho l^2}\right)^2 - \frac{X_0^2 q_0}{\rho l^2}} q_0(t + \phi)\right] \quad (12)$$

で与えられる。ただし、 A は $\dot{U}$ の最大振幅、 ϕ は位相を表わしている。

3. 実験結果

実験は、粘弾性体として厚さ 0.010m、断面が $0.20 \times 0.20 \text{ m}^2$ 、質量 0.55 kg の Chloroprene ゴムを使い、その上に厚さ 0.030m、断面が $0.20 \times 0.20 \text{ m}^2$ の鉄板をゴム糊で接着したものを用意して行った。鉄板の加速度は三菱油化製の Super-G-1A を用いて計り、データはコンテック製の A/D 変換器 PC: MODULE AD 12-16(98) を通して NEC 製の PC-9801 XA に取り込んで処理をした。バイアスとして現れる重力の加速度 g はソフト上で打ち消した。

ゴム糊で接着して、約1カ月後にインパルスで鉄板に加えて加速度を計り、グラフにプロットしてゼロクロス(ゼロ)の周期より振動の周期を、また、ピーク値の減衰の程度より減衰係数を得た。20回の実験よりそれぞれの値の平均値を得た。 X_0 の値は数値計算で求めることができるので、減衰係数より(12)式を使って q_1 の値が求められ、振動周期より同じく(12)式を用いて q_0 の値が求められる。結果は

$$q_0 = 1.2 \times 10^6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2}, \quad q_1 = 7.5 \times 10^2 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$$

となり、文献 2) における値

$$q_0 = 2.1 \times 10^6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-2}, q_1 = 3.9 \times 10^3 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$$

とオーダにおいてほぼ一致している。粘性係数が大きな値となったのはゴム糊の粘性が効いているためと思われる。

このようにして得られた、減衰係数、振動周期を (12) 式に代入して、振幅 A と位相 ϕ を調整して、鉄板のインパルス入力に対する過渡応答を予想し、実測値と比較したのが **Fig. 2** である。同図で丸印は実測値を実線は予想値を表わしている。実験装置が簡単であったので、インパルスの入力と A/D 変換器のクロックとのコインシデンスは取れていない。この図からわかるようにインパルス入力直後の過渡応答は再現できていないが、いつまでも続く過渡応答はみごとに再現されている。このことは第 2 章の解析から当然予想されるとおりである。実験より、容易に $\ddot{U} \gg g$ なる仮定 (v) が実現されることがわかる。また、図より、 $\ddot{U} \sim 10g$ ($\gg g$) あたりで精度が最も良く (相対誤差数 % 以内)、 $\ddot{U} \sim g$ あたりでは、相対誤差が 10~20% と大きくなる。このことも仮定 (v) より予想されるとおりである。

Fig. 2 Measured values (dots) and conjectured values (solid line)

4. あとがき

分布定数系である粘弾性体の特殊な場合について、それが 2 次の集中定数系でモデリングできることを理論的かつ実験的に示した。インパルス入力直後の過渡応答まで再現できなかったが、これまできっちりと再現するモデルを作るためには、たんに固有値・固有関数の項数を増やしてもだめなことは第 2 章の解析で、固有値の一部が複素平面の一点に集積する (右の無限遠に発散しない) 事実からも推察される。きっちりとした解析は分布定数系としてやらねばならないと思料される。

弾性棒に先端荷重をもたせたシステムの制御について、マス・スプリングモデルで十分取り扱える⁶⁾ことも本小論の方法で理由づけができるように思うが、浅学の筆者らはそのような文献を知らない。ただ、Laura⁷⁾は、先端荷重をもった片持梁の始めの 10 項の振動数を先端荷重と梁自身の質量の比の種々の場合について数値的に求めているが、本小論のようなモデリングの意識はまったくない。

末尾ながら本研究を励ましてくださった大阪大学坂和愛幸教授に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 沖田, 小林, 田中: 過渡応答を用いた三次元双曲形分布定数系の同定, 電気学会論文誌, **101-C-6**, 145/152 (1981)
- 2) 小林, 沖田, 田中, 岡本: 異方性を示す粘弾性システムの過渡解析とその同定, 計測自動制御学会論文集, **21-12**, 34/40 (1985)
- 3) 小林, 沖田, 相良: 二層構造をもつ双曲形分布定数系の過渡解析, システム制御情報学会論文誌, **1-6**, 187/193 (1988)
- 4) W. Flügge: Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company (1967)
- 5) Y. C. Fung: 固体の力学/理論 (大橋, ほか訳), 培風館 (1970)
- 6) 坂和, ほか: 3 自由度フレキシブル・マニピュレータのモデリングと加速度センサを用いた振動制御, 日本ロボット学会誌, **6-1**, 42/51 (1988)
- 7) P. A. A. Laura, et al.: A Note on the Vibrations of a Clamped-Free Beam with a Mass at the Free End, J. Sound and Vibration, **37**, 161/168 (1974)