むだ時間をもつ多変数系の有限極配置[†]

——有理関数から有限ラプラス変換行列への Smith Form の構造を利用した変換——

渡 部 慶 二*

Finite Spectrum Assignment of Multivariable Systems with Delays

—A Transformation of Rational Functions to the Finite Laplace

Transforms on the Basis of Smith Form—

Keiji WATANABE*

This paper is concerned with finite spectrum assignment of multivariable systems with commensurate delays. The control law over rational functions of a delay operator is transformed to the one with polynomials of the delay operator and finite Laplace transforms by the proposed method which is based on the structure of the Smith form of the control matrix.

Key Words: multivariable systems with time delay, finite spectrum, Smith form, algorithm

1. ま え が き

むだ時間をもつ系の有限極配置は、特性方程式からむだ時間要素を消去し、特性方程式の次数に等しい有限個の極を任意の値に設定する制御方式である。最初、むだ時間オペレータを z とおいた多項式環上の可到達のもとで、1入力系に対する解が Kamen¹⁾により、多入力系の解が Morse²⁾, Lee and Zak³⁾により与えられた。この環上可到達の条件は厳しく、環上可到達でない場合は z の有理関数上の制御になり、不可制御な成分が生じた^{4), 5)}。

Manitius・Olbrot⁶⁾は、制御のクラスを有限ラプラス変換を含むクラスに拡張することでこの問題を解決し、有限極配置できるための必要条件は、可到達よりゆるいスペクトル可制御なことを明らかにした。渡部・伊藤^{7)~9)}は、1入力系のスペクトル可制御性は有

限極配置の十分条件でもあることを示すとともに、制御則を組織的に求める方法を与えた。さらに、多入系でも同様のことが成立つことを、Heymann の補題¹⁰⁾を基に示した¹¹⁾。

一方、玄・新・大久保^{12), 13)}は、1入力系の z の有理関数上の制御則を有限ラプラス変換上の制御則に変換する方法を提案した。この方法は、 z の有理関数と有限ラプラス変換を始めて関係づけた点で画期的な方法といえる。さらに、多入力系の有限極配置問題に対しても、形式的に z の環上の制御行列をもとめ、それを有理関数上の制御行列に戻し、文献12)の方法で有限ラプラス変換上の制御行列に変換する方法が示された^{14), 15)}。

その後、渡部らの方法と玄らの方法を融合し、1入力系に対して、行列の構造を利用し、 z の有理関数上の制御行列を有限ラプラス変換上の制御行列に変換する見とおしのよい方法が与えられた^{17), 18)}。

本稿の目的は、この方法を、文献14)の有理関数上の制御行列を有限ラプラス変換上の制御行列へ変換する部分に拡張することである。文献14)では Smith form を基にしており、可制御行列の下三角行列変換を基にした文献17), 18)の方法が直接適用できない。そこで、本稿では、可制御行列のスミス形の構造を利用して、有理関数行列を有限ラプラス変換行列に変換する新しい方法を与える。

2. 有限極配置

つぎのむだ時間系を考える。

$$\dot{x}(t) = A(z)x(t) + B(z)u(t) \quad (1)$$

ただし、 $x \in R^n$, $u \in R^m$, z はむだ時間オペレータで $zx(t) = x(t-h)$, $h > 0$ 。また、 z の実係数多項式からなる $i \times j$ 行列を $R^{i \times j}[z]$ とし、 $A(z) \in R^{n \times n}[z]$,

[†] 計測自動制御学会東北支部創立25周年記念学術講演会で発表 (1989・7)

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

(Received August 30, 1989)

(Revised November 8, 1989)

$B(z) \in R^{n \times m}[z]$ とする. この系につぎの制御を考える.

$$u(t) = F(z)x(t) + \int_{-Nh}^0 \phi(\tau)x(t+\tau)d\tau + \int_{-Nh}^0 \phi(\tau)u(t+\tau)d\tau \quad (2)$$

ただし, N は適当な正の整数, $F(z) \in R^{m \times n}[z]$, $\phi(\cdot) \in L_2[-Nh, 0]$, $R^{m \times n}$, $\phi(\cdot) \in L_2[-Nh, 0]$, $R^{m \times m}$. 任意の実数あるいは共役複素数 λ_i ($i=1, \dots, n$) に対し, (1), (2) 式がつくる閉ループ系の特性関数を

$$\Delta_f(s, z) = \begin{vmatrix} sI - A(z) & -B(z) \\ -F_1(z, s) & I - F_2(z, s) \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \quad (3)$$

に設定する制御を有限極配置という. ただし, $z = e^{-sh}$

$$F_1(z, s) = F(z) + \int_{-Nh}^0 \phi(\tau)e^{s\tau}d\tau \quad (4)$$

$$F_2(z, s) = \int_{-Nh}^0 \phi(\tau)e^{s\tau}d\tau \quad (5)$$

である. (1) 式がスペクトル可制御のとき, すなわち $\text{rank}[sI - A(e^{-sh}), B(e^{-sh})] = n, \forall s \in C$ (6)

を満たすとき, そのときに限って有限極配置できることが知られている¹¹⁾.

ところで, (6) 式は

$$\text{rank}_e M(z) = n \quad (7a)$$

かつ

$$\text{rank}[sI - A(e^{-sh}), B(e^{-sh})] = n, \forall s \in \sigma(A) \cap A \quad (7b)$$

に等価である¹⁶⁾. ただし, $M(z)$ は

$$M(z) = [B(z), A(z)B(z), \dots, A^{n-1}(z)B(z)] \quad (8)$$

であり, (7a) 式は, 有限個の離散的な点を省くすべての $z \in C$ に対し $\text{rank } M(z) = n$ が成立することを意味し, $\sigma(A) = \{s \in C | sI - A(e^{-sh}) = 0\}$, $A = \{s \in C | \text{rank } M(e^{-sh}) < n\}$ である.

(7a) 式が成り立つとき, (1) 式は弱 $R[z]$ -可制御という. すべての $z \in C$ に対し, $\text{rank } M(z) = n$ が成り立つとき, (1) 式は環上可到達あるいは $R[z]$ -可制御という.

本稿では, 文献 14) に従い, まず, スペクトル可制御性のもとで, (1) 式を形式的に $R[z]$ -可制御な系に変換し, そこで z の多項式上の制御行列を求める. つぎに, それを弱 $R[z]$ -可制御に戻し, z の有理関数上の制御行列に変換する. さらに, それを z の多項式と有限ラプラス変換上の制御行列変換し, (3) 式を満たす $F_1(z, s)$, $F_2(z, s)$ を求める. この z の有理関数上の制御行列を z の多項式と有限ラプラス変換上の制御行列に変換する部分に, 本稿で提案する新しい方法を

与える.

3. $R[z]$ -可到達な系への変換と多項式上の制御行列

スペクトル可制御のとき, 弱 $R[z]$ -可制御なので, $M(z)$ は基本行変換で

$$L(z)M(z)N(z) = [D(z) \ 0 \cdots 0] \quad (9)$$

なる Smith form に変換できる¹⁴⁾. ただし, $L(z)$, $N(z)$ は適当なユニモジュラ行列で,

$$D(z) = \text{diag}[d_1(z) \cdots d_n(z)] \quad (10)$$

$d_i(z) \in R[z]$, $d_i(z) \neq 0$ で, $d_{i+1}(z)$ は $d_i(z)$ で割り切れる.

[補題 1]

$$\tilde{A}(z) = L(z)A(z)L^{-1}(z) \quad (11)$$

$$\tilde{B}(z) = L(z)B(z) \quad (12)$$

とすると, $\tilde{B}(z)$, $\tilde{A}(z)\tilde{B}(z)$, $\dots$, $\tilde{A}(z)^{n-1}\tilde{B}(z)$ の i 行の非零要素は $d_i(z)$ を因数として含む.

(証明) $d_i(z) = (z - z_1)^{q(1)} \cdots (z - z_q)^{q(p)}$ とする.

$$G_i = [0 \cdots \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0], \quad \leftarrow i-1 \rightarrow \quad (13)$$

とおく.

(9), (13) 式から $d_i(z) = 0$ とする $z = z_j$ ($j=1, \dots, p$) に対し

$$\begin{aligned} G_i \frac{d^k}{dz^k} L[z]M[z]N(z) \Big|_{z=z_j} &= G_i \frac{d^k}{dz^k} [D(z) \ 0 \cdots 0] \Big|_{z=z_j} = 0 \\ (k=0, 1, \dots, q(j)-1) \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} G_i \left[\left\{ \frac{d^k}{dz^k} L[z]M[z] \right\} N(z) + \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} L[z]M[z] \right\} \frac{d}{dz} N(z) + \cdots + L[z]M[z] \frac{d^k}{dz^k} N(z) \right] \Big|_{z=z_j} &= 0 \\ (k=0, 1, \dots, q(j)-1) \end{aligned} \quad (15)$$

が得られ, $N(z)$ はユニモジュラなので, $k=0, 1, \dots$ の順に

$$\begin{aligned} G_i \frac{d^k}{dz^k} L[z]M[z] \Big|_{z=z_j} &= 0 \\ (k=0, 1, \dots, q(j)-1) \end{aligned} \quad (16)$$

が成り立つ. これより

$$G_j L[z]M[z] = (z - z_j)^{q(j)} [* \cdots *] \quad (17)$$

が得られる. $*$ は z の多項式である. $d_i(z) = (z - z_1)^{q(1)} \cdots (z - z_p)^{q(p)} = 0$ をみたす他の $z = z_j$ に対しても同様なことがいえる. したがって, $\tilde{B}(z)$, $\tilde{A}(z)\tilde{B}(z)$

$\dots \bar{A}(z)^{n-1} \bar{B}(z)$ の i 行の非零要素は $d_i(z)$ を因数とし
て含む。 □

ここで

$$T(z) = D^{-1}(z)L(z) \quad (18)$$

とおき

$$\bar{A}(z) = T(z)A(z)T^{-1}(z) \quad (19)$$

$$\bar{B}(z) = T(z)B(z) \quad (20)$$

とする。

$$\begin{aligned} \bar{M}(z) &= T(z)M(z) \\ &= [\bar{B}(z), \bar{A}(z)\bar{B}(z), \dots, \bar{A}^{n-1}(z)\bar{B}(z)] \end{aligned} \quad (21)$$

とすると(9)式から

$$\bar{M}(z)N(z) = [I \ 0 \dots 0] \quad (22)$$

が成り立つ。

【補題 2】 $\bar{A}(z), \bar{B}(z)$ は z の多項式上の行列である。

(証明) $\bar{B}(z) = D^{-1}(z)\tilde{B}(z)$, $\bar{A}(z)\bar{B}(z) = D^{-1}(z)\tilde{A}(z) \times D(z)D^{-1}(z)\tilde{B}(z) = D^{-1}\tilde{A}(z)\tilde{B}(z)$, ...なので補題 1 から, $\bar{B}(z), \bar{A}(z)\bar{B}(z), \dots, \bar{A}^{n-1}(z)\bar{B}(z)$ は z の多項式上の行列である。 $|sI - \bar{A}(z)|$ は

$$\begin{aligned} |sI - \bar{A}(z)| &= |sI - A(z)| \\ &= s^n + \alpha_1(z)s^{n-1} + \dots + \alpha_n(z) \end{aligned} \quad (23)$$

と展開できる。 $\alpha_i(z)$ は z の多項式である。 ケーリ・ハミルトンの定理 (z の多項式, 有理関数行列に容易に拡張できる) から

$$\begin{aligned} \bar{A}^n(z)\bar{B}(z) &= -\alpha_1(z)\bar{A}^{n-1}(z)\bar{B}(z) - \dots - \alpha_n(z)\bar{B}(z) \end{aligned} \quad (24)$$

が成り立ち, $\bar{A}^n(z)\bar{B}(z)$ も z の多項式上の行列である。

ここで $\bar{A}(z)$ の行を $[a_{j1}(z) \dots a_{jn}(z)] + [* \dots *]$ とする。ただし, $a_{jk}(z)$ は分子が定数の部分分数に展開されている z の有理関数で, $*$ は z の多項式である。 $\bar{A}(z)[\bar{B}(z), \dots, \bar{A}^{n-1}(z)\bar{B}(z)]$ は z の多項式上の行列なので

$$\begin{aligned} [a_{j1}(z) \dots a_{jn}(z)] \cdot [\bar{B}(z), \bar{A}(z)\bar{B}(z), \dots, \\ \bar{A}^{n-1}(z)\bar{B}(z)] &= (z \text{ の多項式}) \end{aligned}$$

となる。 $a_{j1}(z), \dots, a_{jn}(z)$ の分母多項式の最小公倍多項式を $p(z)$ とし, 上式の両辺にかけ, $p(z)=0$ の任意の根 $z=z_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} [a_{j1}(z_i) \dots a_{jn}(z_i)] \cdot [\bar{B}(z_i), \bar{A}(z_i)\bar{B}(z_i), \dots, \\ \bar{A}^{n-1}(z_i)\bar{B}(z_i)] &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。ただし, $\bar{a}_{jk}(z) = a_{jk}(z)p(z)$ ($k=1, \dots, n$). (22)式から

$$[\bar{a}_{j1}(z_i) \dots \bar{a}_{jn}(z_i)][I \ 0] = 0$$

が成り立ち,

$$[\bar{a}_{j1}(z_i) \dots \bar{a}_{jn}(z_i)] = 0 \quad (25)$$

となる。 z_i を k 位の根とすると, (25)式は $a_{j1}(z) \dots a_{jn}(z)$ の $1/(z-z_i)^k$ の係数が 0 であることを意味す

る。このことは, 順に, $1/(z-z_i)^{k-1}, \dots, 1/(z-z_i)$ の係数が 0 を意味する。これは $p(z)=0$ の任意の根 $z=z_i$ に対して成り立つから, $[a_{j1}(z) \dots a_{jn}(z)] = 0$ であり, $\bar{A}(z)$ は z の多項式上の行列である。 □

補題 2 と (22)式から, $(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$ は環上可到達である。したがって, 任意に与えられた λ_i に対し

$$|sI - \bar{A}(z) - \bar{B}(z)\bar{F}(z)| = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \quad (26)$$

を満たす $\bar{F}(z) \in R^{m \times n}[z]$ を, 文献 2)あるいは文献 3)の方法でもとめることができる。

4. 多項式制御行列から有理関数制御行列への変換

(26)式を満たす制御行列 $\bar{F}(z) \in R^{m \times n}[z]$ を, 弱 $R[z]$ -可制御な系上の制御行列に戻すと

$$\begin{aligned} \bar{F}(z)T(z) &= \bar{F}(z)D^{-1}(z)L(z) \\ &= \tilde{F}(z)L(z) \\ &\in R^{m \times n}(z) \end{aligned}$$

(z の有理関数上の $m \times n$ 行列) (27)

となる。ただし,

$$\tilde{F}(z) = \bar{F}(z)D^{-1}(z) \quad (28)$$

ここで, $d_n(z)=0$ の根を z_i ($i=1, \dots, p$) とし, $d_i(z)/d_{i-1}(z)$ ($i=1, \dots, n, d_0(z)=1$) が, $i=c(1), \dots, c(q)$ ($c(1) < \dots < c(q)$) のみ, それぞれ $(z-z_i)^{r(1)}, \dots, (z-z_i)^{r(q)}$ をもつとし, $r=r(1)+\dots+r(q)$ とする。 $\tilde{F}(z)$ はつぎのように展開できる。

$$\tilde{F}(z) = F_p(z) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \frac{1}{(z-z_i)^j} [0 \dots 0 \ \nu_{ij}] \quad (29)$$

ただし, $F_p(z)$ は z の多項式上の行列, $\nu_{ij} \in C^{m \times (n-c(k)+1)}$ で, k は $r(1)+\dots+r(k-1) < j \leq r(1)+\dots+r(k)$ を満たす整数である。

5. 有理関数制御行列からラプラス変換上の制御行列への変換

上記の z の有理上の行列を有限ラプラス変換上の行列に変換する。それにはつぎの補題が必要である。

【補題 3】 $\tilde{A}(z)$ の第 $c(j)$ 行から第 n 行, 第 1 列から第 $c(j)-1$ 列までの非零要素は, $(z-z_i)^{r(j)}$ を因数としてもつ。

(証明) 補題 2 から $\bar{A}(z) = D^{-1}(z)\tilde{A}(z)D(z)$ は z の多項式上の行列であり, $D^{-1}(z)$ の第 $c(j)$ 行から第 n 行までの対角要素は, $1/(z-z_i)^{r(1)+\dots+r(j)}$ を因数としてもつ。したがって, $\tilde{A}(z)D(z)$ の第 $c(j)$ 行から第 n 行までの非零要素は, $(z-z_i)^{r(1)+\dots+r(j)}$ を因数としてもつ。さらに, $D(z)$ の第 1 列から $c(j)-1$ 列までの要素は高々 $(z-z_i)^{r(1)+\dots+r(j-1)}$ の因数である。したが

って, $\tilde{A}(z)$ の第 $c(j)$ 行から第 n 行, 第 1 列から第 $c(j)-1$ 列までの非零要素は, 少なくとも $(z-z_i)^{r(c(j))}$ を因数としてもつ. $\square$

$\{n-c(j)+1\} \times n$ 行列 R_j を

$$R_j = [0 \cdots 0 \ I_j] \quad (30)$$

とおく. I_j は, $\{n-c(j)+1\} \times \{n-c(j)+1\}$ 単位行列である. 補題 3 から

$$R_j[sI - \tilde{A}(z_i)] = [sI - A_j]R_j \quad (31)$$

が成り立つ. ただし, $A_j \in R^{(n-c(j)+1) \times (n-c(j)+1)}$ で, A_j と A_{j+1} の間には

$$A_j = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & A_{j+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c(j+1)-c(j) \text{ 行} \\ n-c(j+1)+1 \text{ 行} \end{matrix} \quad (32)$$

の関係が成り立つ. また, 補題 1 から

$$R_j \tilde{B}(z_i) = 0 \quad (33)$$

が成り立つ. これらのことから

$$R_1[sI - \tilde{A}(z)] = [sI - A_1]R_1 - (z-z_i)\xi_1(z) \quad (34)$$

$$R_1 \tilde{B}(z) = (z-z_i)\eta_1(z) \quad (35)$$

が得られる. ただし, $\xi_1(z) \in R^{(n-c(1)+1) \times n}[z]$, $\eta_1(z) \in R^{(n-c(1)+1) \times m}[z]$.

ここで, つぎの恒等式

$$[sI - \tilde{A}(z)] \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) - \tilde{B}(z) |sI - \tilde{A}(z)| \\ = 0 \quad (36)$$

に左から R_1 をかけ, (34), (35) 式の関係代入すると

$$\frac{R_1}{(z-z_i)} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [sI - A_1]^{-1} [\xi_1(z), \eta_1(z)] \tilde{Q}(z, s) \quad (37)$$

$$\tilde{Q}(z, s) = \begin{bmatrix} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ |sI - \tilde{A}(z)| I_m \end{bmatrix} \quad (38)$$

が得られる. I_m は $m \times m$ 単位行列である.

(37) 式を $(z-z_i)$, $(z-z_i)^2$, $\dots$, $(z-z_i)^{r(1)-1}$ で割ると

$$\frac{R_1}{(z-z_i)^k} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [sI - A_1]^{-1} \left[\xi_k(z) + \frac{\xi_{11}}{(z-z_i)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\xi_{1k-1}}{(z-z_i)^{k-1}}, \eta_k(z) \right] \tilde{Q}(z, s) \\ (k=1, 2, \dots, r(1)) \quad (39)$$

が得られる. ただし, $\xi_k(z) \in R^{(n-c(1)+1) \times n}[z]$, 補題 3 から

$$\xi_{1d} = [0 \cdots 0 \ * \cdots \cdots \ *] \in R^{(n-c(1)+1) \times n} \\ \leftarrow n-c(1)+1 \rightarrow \\ (d=1, 2, \dots, k-1) \quad (40)$$

$\eta_k(z) \in R^{(n-c(1)+1) \times m}[z]$ である.

(32) 式の関係を用いると, $k=r(1)$ とおいた (39) 式の下から $n-c(2)+1$ 行取り出し, $(z-z_i)$, $(z-z_i)^2$, $\dots$, $(z-z_i)^{r(2)}$ で割ることができる. これを $R_2/(z-$

$z_i)^r$ まで続けると次式が得られる.

$$\frac{R_j}{(z-z_i)^k} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [sI - A_j]^{-1} \left[\xi_k(z) + \frac{\xi_{j1}}{(z-z_i)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\xi_{jk-1}}{(z-z_i)^{k-1}}, \eta_k(z) \right] \tilde{Q}(z, s) \\ j=2, 3, \dots, q \\ k=r(1)+\dots+r(j-1)+1, \dots, r(1)+\dots+r(j-1)+r(j)$$

ただし,

$$\xi_k(z) \in R^{(n-c(j)-1) \times n}[z], \\ \xi_{jd} = [0 \cdots 0 \ * \cdots \cdots \ *] \in R^{(n-c(j)+1) \times n} \\ \leftarrow n-c(j)+1 \rightarrow \\ (d=1, 2, \dots, k-1) \quad (42)$$

$\eta_k(z) \in R^{(n-c(j)+1) \times m}[z]$ である. ここで (40), (42) 式の ξ_{jd} を

$$\xi_{jd} = [0 \cdots 0 \ \nu_{jd}] \quad (43)$$

$$\nu_{jd} \in \begin{cases} R^{(n-c(j)+1) \times (n-c(1)+1)} \\ (d=1, 2, \dots, r(1)) \\ R^{(n-c(j)+1) \times (n-c(2)+1)} \\ (d=r(1)+1, \dots, r(1)+r(2)) \\ \vdots \\ R^{(n-c(j)+1) \times (n-c(j)+1)} \\ (d=r(1)+\dots+r(j-1)+1, \dots, \\ r(1)+\dots+r(j)) \end{cases} \quad (44)$$

とおくことができる.

6. ラプラス変換上の制御行列から有限ラプラス変換制御行列への変換

6.1 逐次変換

補題 4¹³⁾ (7.2) 式が成り立つとき

$$\det[I - z_i \exp(A_j h)] \neq 0 \quad (j=1, \dots, q) \quad (45)$$

(証明) A_j のジョルダン標準形を J とし,

$$\det[I - z_i \exp(A_j h)] = \det[I - z_i \exp(Jh)] = 0 \quad (46)$$

とすると, $z_i = \exp(-s_o h)$ を満たす A_j の固有値 s_o がある. これは, (31), (33) 式から

$$\text{rank}[s_o I - A(\exp(-s_o h)), B(\exp(-s_o h))] \\ = \text{rank}[s_o I - \tilde{A}(\exp(-s_o h)), \tilde{B}(\exp(-s_o h))] < n \quad (47)$$

を意味し, (7b) 式に矛盾する. $\square$

これよりつぎの式が成り立つ.

$$I - (z-z_i)[I - z_i \exp(A_j h)]^{-1} \exp(A_j h) \\ = [I - z_i \exp(A_j h)]^{-1} [I - z \exp(A_j h)] \quad (48)$$

(48) 式で $j=1$ とおいたものを (39) 式に, (48) 式で $j=2, \dots, q$ としたものを (41) 式にかけると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 & \frac{R_j}{(z-z_i)^k} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 &= \gamma_{j1} \frac{R_j}{(z-z_i)^{k-1}} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 & \quad + \gamma_{j2}(z, s) \left[\xi_k(z) + \frac{\xi_{j1}}{(z-z_i)} + \cdots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi_{jk-1}}{(z-z_i)^{k-1}}, \eta_k(z) \right] \tilde{Q}(z, s) \quad (49) \\
 & \quad j=1, 2, \dots, q \\
 & \quad k=r(1)+\cdots+r(j-1)+1, \dots, r(1)+\cdots \\
 & \quad +r(j-1)+r(j)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 \gamma_{j1} &= [I - z_i \exp(A_j h)]^{-1} \exp(A_j h) \quad (50) \\
 \gamma_{j2}(z, s) &= [I - z_i \exp(A_j h)]^{-1} [I - z \exp(A_j h)] \\
 & \quad \cdot [sI - A_j]^{-1} \quad (51)
 \end{aligned}$$

で, $\gamma_{j2}(z, s)$ は有限ラプラス変換である. ここで $k=1$ は

$$\begin{aligned}
 & \frac{R_1}{(z-z_i)} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 &= [\gamma_{11} R_1 + \gamma_{12}(z) \xi_1(z), \gamma_{12}(z) \eta_1(z)] \tilde{Q}(z, s) \quad (52)
 \end{aligned}$$

であり, 右辺の $[\]$ の中は z の多項式と有限ラプラス変換である.

つぎに, $k=2$ は

$$\begin{aligned}
 & \frac{R_1}{(z-z_i)^2} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 &= \gamma_{11} \frac{R_1}{(z-z_i)} \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 & \quad + \gamma_{12}(z) \left[\xi_2(z) + \frac{\xi_{11}}{(z-z_i)}, \eta_2(z) \right] \tilde{Q}(z, s) \quad (53)
 \end{aligned}$$

である. z の有理関数部分 $R_1/(z-z_i)$ は (52) 式で置き換えられ, $\xi_{11}/(z-z_i)$ は $\nu_{11} R_1/(z-z_i)$ で置き換えられ z の多項式と有限ラプラス変換にできる. 以下, (43), (44) 式より, (49) 式の右辺は $k=3, 4, \dots$ の順に逐次 z の多項式と有限ラプラス変換に置き換えられる.

(29) 式の $[0 \cdots 0 \ \nu_{ij}]/(z-z_i)^j$ は $\nu_{ij} R_k/(z-z_i)^j$ で置き換えられ, さらに上記によって z の多項式と有限ラプラス変換に置き換えられる. これを $d_n(z)=0$ の根 z_i ($i=1, \dots, p$) すべてに対し, 上記の計算を行う.

かくして, (28), (29) 式から, z の多項式上の行列 $\bar{F}(z)$ は

$$\begin{aligned}
 \bar{F}(z) \text{adj}[sI - \bar{A}(z)] \bar{B}(z) \\
 &= \tilde{F}(z) \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\
 &= [F_r(z) + \tilde{F}_1(z, s), \tilde{F}_2(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \quad (54)
 \end{aligned}$$

と有限関数上の制御行列 $\tilde{F}(z)$, さらに z の多項式と有限ラプラス変換上の行列 $\tilde{F}_1(z, s), \tilde{F}_2(z, s)$ に置き

換えることができる.

$$\begin{aligned}
 F_1(z, s) &= [F_r(z) + \tilde{F}_1(z, s)] L(z) \\
 F_2(z, s) &= \tilde{F}_2(z, s) \quad (55)
 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
 (27), (54) \text{ 式から} \\
 \bar{F}(z) \text{adj}[sI - \bar{A}(z)] \bar{B}(z) \\
 &= [F_1(z, s), F_2(z, s)] \Omega(z, s) \quad (56)
 \end{aligned}$$

が得られる. ただし,

$$\Omega(z, s) = \begin{bmatrix} \text{adj}[sI - A(z)] B(z) \\ |sI - A(z)| I_m \end{bmatrix}$$

6.2 一括変換

有限ラプラス変換を一括して行うこともできる.

(39) 式 $K=2$ の右辺の $\xi_{11}/(z-z_i)$ を $\nu_{11} R_1/(z-z_i)$ で, $k=3$ の $\xi_{11}/(z-z_i)^2, \xi_{12}/(z-z_i)$ をそれぞれ $\nu_{11} R_1/(z-z_i)^2, \nu_{12} R_1/(z-z_i)$ で置き換えることができる. 以下同様にして, (39), (41) 式の $\xi_{j1}/(z-z_i)^{k-1}, \dots, \xi_{jk-1}/(z-z_i)$ を置き換えることができる. まとめるとつぎようになる.

$$\begin{aligned}
 \hat{R}(z) \text{adj}[sI - \hat{A}(z)] \hat{B}(z) \\
 &= [sI - \hat{A}]^{-1} [\bar{E}(z), H(z)] \hat{Q}(z, s) \quad (57)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ \nu_{11} A_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \nu_{11} \cdots \nu_{1r(1)-1} A_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \nu_{21} & & \nu_{1r(1)} A_2 & \\ \vdots & & & \\ \nu_{q1} \cdots \nu_{qr-1} A_q & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}(z) = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{(z-z_i)} \\ \vdots \\ \frac{R_1}{(z-z_i)^{r(1)}} \\ \vdots \\ \frac{R_q}{(z-z_i)^{r(1)+\cdots+r(q-1)+1}} \\ \vdots \\ \frac{R_q}{(z-z_i)^r} \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}(z) = \begin{bmatrix} \xi_1(z) \\ \vdots \\ \xi_r(z) \end{bmatrix}$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} \eta_1(z) \\ \vdots \\ \eta_r(z) \end{bmatrix}$$

補題 4 から,

$$\det[I - z_i \exp(\hat{A}h)] \neq 0 \quad (58)$$

が成り立つ. これよりつぎの式が得られる.

$$\begin{aligned}
 I - (z-z_i) [I - z_i \exp(\hat{A}h)]^{-1} \exp(\hat{A}h) \\
 &= [I - z_i \exp(\hat{A}h)]^{-1} [I - z \exp(\hat{A}h)] \quad (59)
 \end{aligned}$$

(59) 式を (57) 式に左からかけて整理すると

$$\begin{aligned} \hat{R}(z) \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [(z - z_i) \Gamma_1 \hat{R}(z) + \Gamma_2(z, s), \Gamma_3(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (60)$$

が得られる。ただし、

$$\Gamma_1 = [I - z_i \exp(\hat{A}h)]^{-1} \exp(\hat{A}h) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(z, s) = [I - z_i \exp(\hat{A}h)]^{-1} [I - z \exp(\hat{A}h)] \\ * [sI - \hat{A}]^{-1} E(z) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3(z, s) = [I - z_i \exp(\hat{A}h)]^{-1} [I - z \exp(\hat{A}h)] \\ * [sI - \hat{A}]^{-1} H(z) \end{aligned} \quad (63)$$

である。\$\Gamma_2(z, s)\$, \$\Gamma_3(z, s)\$ の \$[I - z \exp(\hat{A}h)][sI - \hat{A}]^{-1}\$ は有限ラプラス変換である。

\$\Gamma_4\$, \$\Gamma_5\$ を

$$\Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0_1 & & & \\ I_1 & & & \\ & I_1 & & \\ & & 0_{12} I_2 & \\ & & & I_2 \\ & & & & 0_{q-1q} I_q \\ & & & & & I_q 0_q \end{bmatrix} \begin{matrix} r(1) \\ r(2) \\ r(q) \end{matrix} \quad (64)$$

$$\Gamma_5 = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

とおく。ただし、\$0_j\$, \$0_{ij}\$ はそれぞれ \$\{n - c(j) + 1\} \times \{n - c(j) + 1\}\$, \$\{n - c(j) + 1\} \times \{c(j) - c(i)\}\$ 零行列、\$I_j\$ は \$\{n - c(j) + 1\} \times \{n - c(j) + 1\}\$ 単位行列である。これらを用いると (60) 式は

$$\begin{aligned} \hat{R}(z) \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [\Gamma_1 \{ \Gamma_4 \hat{R}(z) + \Gamma_5 \} \\ + \Gamma_2(z, s), \Gamma_3(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (66)$$

と表わせる。\$\Gamma_1 \Gamma_4\$ は

$$\Gamma_1 \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

なので \$I - \Gamma_1 \Gamma_4\$ は正則である。(66) 式を \$\hat{R}(z)\$ について解くと

$$\begin{aligned} \hat{R}(z) \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = [\Gamma_6(z, s), \Gamma_7(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (68)$$

となる。ただし、

$$\Gamma_6(z, s) = [I - \Gamma_1 \Gamma_4]^{-1} \{ \Gamma_1 \Gamma_5 + \Gamma_2(z, s) \} \quad (69)$$

$$\Gamma_7(z, s) = [I - \Gamma_1 \Gamma_4]^{-1} \Gamma_3(z, s) \quad (70)$$

である。

(29) 式の \$z\$ の有理関数上の行列は

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \frac{1}{(z - z_i)^j} [0 \cdots 0 \ \nu_{ij}] \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = \nu_i \hat{R}(z) \text{adj}[sI - \tilde{A}(z)] \tilde{B}(z) \\ = \nu_i [\Gamma_6(z, s), \Gamma_7(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \\ = [F_{i1}(z, s), F_{i2}(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (71)$$

と有限ラプラス変換上の行列に変換される。ただし、

$$\nu_i = [\nu_{i1}, \dots, \nu_{ir}]$$

$$F_{i1}(z, s) = \nu_i \Gamma_6(z, s)$$

$$F_{i2}(z, s) = \nu_i \Gamma_7(z, s)$$

これらのことから \$z\$ の多項式上の制御行列 \$\bar{F}(z)\$ は

$$\begin{aligned} \bar{F}(z) \text{adj}[sI - \bar{A}(z)] \bar{B}(z) \\ = \bar{F}(z) \text{adj}[sI - \bar{A}(z)] \bar{B}(z) \\ = \left[F_p(z) + \sum_{i=1}^p F_{i1}(z, s), \sum_{i=1}^p F_{i2}(z, s) \right] \tilde{Q}(z, s) \\ = [F_1(z, s), F_2(z, s)] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (72)$$

と有理関数上の制御行列 \$\bar{F}(z)\$ さらに \$z\$ の多項式と有限ラプラス変換上の行列に置き換えることができる。ただし、

$$F_1(z, s) = \left[F_p(z) + \sum_{i=1}^p F_{i1}(z, s) \right] L(z) \quad (73)$$

$$F_2(z, s) = \sum_{i=1}^p F_{i2}(z, s) \quad (74)$$

かくして、(56) 式あるいは (72) 式から、(1) 式に対する制御を

$$u(s) = F_1(z, s)x(s) + F_2(z, s)u(s) \quad (75)$$

とすると、閉ループ系の特性関数は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} sI - A(z) & -B(z) \\ -F_1(z, s) & I - F_2(z, s) \end{vmatrix} \\ = |sI - A(z)| |I - F_2(z, s) \\ - F_1(z, s)[sI - A(z)]^{-1} B(z)| \\ = |sI - A(z)|^{1-n} |sI - A(z)| I \\ - [F_1(z, s), F_2(z, s)] \tilde{Q}(z, s)| \\ = |sI - \bar{A}(z)|^{1-n} |sI - \bar{A}(z)| I \\ - \bar{F}(z) \text{adj}[sI - \bar{A}(z)] \bar{B}(z)| \\ = |sI - \bar{A}(z)| |I - \bar{F}(z)[sI - \bar{A}(z)]^{-1} \bar{B}(z)| \\ = |sI - \bar{A}(z)| |I - [sI - \bar{A}(z)]^{-1} \bar{B}(z) \bar{F}(z)| \\ = |sI - \bar{A}(z) - \bar{B}(z) \bar{F}(z)| \\ = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \end{aligned} \quad (76)$$

となり、有限極配置ができる。

以上のことはつぎの定理としてまとめられる。

《定理 1》 (1) 式がスペクトル可制御ならば、(26) 式の \$z\$ の有理関数上の制御行列は、\$z\$ の多項式と有限ラプラス変換上の制御行列に変換できる。□

(注意 1) 逐次変換と一括変換の違いは、前者では \$y\$ 有理関数 \$1/(z - z_i)^k\$ を変換するのに \$k\$ 個の \$[-h, 0]\$ 区間の有限ラプラス変換の積、すなわち \$[-kh, 0]\$ 区間の有限ラプラス変換を必要とする。後者は \$[-h, 0]\$ 区間の有限ラプラス変換ですむが、大きな行列の計算を必要とする。

7. 数 値 例

つぎの系を考える。

$$\dot{x}(z) = \begin{bmatrix} z & z^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(z) + \begin{bmatrix} 0 & z^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(z) \quad (77)$$

(9)式の $L(z)$, $D(z)$ は

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

で, $\tilde{A}(z)$, $\tilde{B}(z)$ は

$$\tilde{A}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z^2 & z \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

である。閉ループ系の極を -1 , -2 にする $\tilde{F}(z)$ は, (19), (20), (26) および (28) 式から次式で与えられる。

$$\tilde{F}(z) = \begin{bmatrix} -3-z & -1-3\frac{1}{z}-2\frac{1}{z^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$1/z$, $1/z^2$ が含まれるので, z の多項式と有限ラプラス変換に変換する。

(30)式の R_1 は $R_1 = [0 \ 1]$ となり, (34), (35) 式を計算し, (36) 式に代入し (37) 式を計算すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} [0 \ 1] \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & z \end{bmatrix} \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (81)$$

が得られ, z で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^2} [0 \ 1] \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (82)$$

が得られる。

逐次変換では, (81) 式に $1-z$ をかけ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} [0 \ 1] \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \left[\frac{1-z}{s} z, 1 + \frac{1-z}{s}, 0, \frac{1-z}{s} z \right] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (83)$$

が得られる。さらに, (82) 式に $1-z$ をかけ, $[0 \ 1/z]$ の部分に (83) 式を代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z^2} [0 \ 1] \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \left[\frac{1-z}{s} (1+z) + \left(\frac{1-z}{s} \right)^2 z, \left(1 + \frac{1-z}{s} \right)^2, \right. \\ & \quad \left. 0, \frac{1-z}{s} (1+z) + \left(\frac{1-z}{s} \right)^2 z \right] \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (84)$$

が得られる。

一括変換では, (81), (82) 式から (57) 式を計算すると

$$\hat{R}(z) \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (85)$$

が得られる。右辺の s の行列をラプラス逆変換し, $t=h$ とおいたものを $\exp(\hat{A}h)$ とすると,

$$I - z \exp(\hat{A}h) = \begin{bmatrix} 1-z & 0 \\ -hz & 1-z \end{bmatrix} \quad (86)$$

となり, これを (85) 式の左からかけ

$$z \hat{R}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{R}(z) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の関係を用いて整理すると

$$\begin{aligned} & \hat{R}(z) \text{adj}(sI - \tilde{A}(z)) \tilde{B}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1-z}{s} z \\ \frac{1-z}{s} (1+z) + \frac{1-(hs+1)z}{s^2} z \\ 1 + \frac{1-z}{s} \\ 1 + h + \frac{1-z}{s} + \frac{1-(hs+1)z}{s^2} z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \quad \left. \begin{bmatrix} \frac{1-z}{s} z \\ \frac{1-z}{s} (1+z) + \frac{1-(hs+1)z}{s^2} z \end{bmatrix} \right\} \tilde{Q}(z, s) \end{aligned} \quad (87)$$

が得られる。

$\tilde{F}(z)$ は, (83), (84), (54), (55) 式あるいは (87), (72), (73), (74) 式から z の多項式と有限ラプラス変換上の行列 $F_1(z, s)$, $F_2(z, s)$ に変換できる。

8. あとがき

文献 14) の玄・新・大久保の多変数むだ時間系の有限極配置法の中で, z の有理関数行列を有限ラプラス変換行列に変換する部分に対し, 可制御行列の Smith Form の構造を利用して z の有理関数行列を有限ラプラス変換行列に変換する方法を与えた。

参 考 文 献

- 1) E. W. Kamen: An Operator Theory of Linear Functional Differential Equations, J. Differential Equations, **27**, 274/297 (1978)
- 2) A. S. Morse: Ring Models for Delay-Differential Systems, Automatica, **12**, 529/531 (1976)
- 3) E. B. Lee and S. Žak: On Spectrum Placement for

- Linear Time Invariant Delay Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-27-2**, 446/449 (1982)
- 4) E. D. Sontag: Linear Systems over Commutative Rings, A Survey, *Ricerca Automatica*, **7-1**, 1/34 (1976)
 - 5) 前田, 山田: むだ時間を含む線形システムの安定化, 計測自動制御学会論文集, **11-4**, 444/450 (1975)
 - 6) A. Z. Manitius and A. W. Olbrot: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-21-4**, 541/553 (1979)
 - 7) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko: Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Multiple Commensurate Delays in State Variables, *Int. J. Control*, **38-5**, 913/926 (1983)
 - 8) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko: Finite Spectrum Assignment Problem of Systems with Multiple Commensurate Delays in States and Control, *Int. J. Control*, **39-5**, 1073/1082 (1983)
 - 9) 渡部慶二: 状態にむだ時間をもつ系の有限極配置, 計測自動制御学会論文集, **18-9**, 886/892 (1982)
 - 10) M. Heymann: Comments on Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-13-6**, 747/748 (1968)
 - 11) K. Watanabe: Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-6**, 543/550 (1986)
 - 12) 玄, 新, 大久保: 本質的なむだ時間をつ含む 1 入力線形系の有限極配置, 計測自動制御学会論文集, **23-4**, 386/393 (1987)
 - 13) 玄, 北森: 遅れ型むだ時間系の有限極配置法, 第 27 回 SICE 学術講演会予稿集, JS 27-4, 289 (1988)
 - 14) 玄, 新, 大久保: 多入力むだ時間系における弱変数変換の有界線形作用素による実現 一環上可到達な系への帰着と極配置一, 第 16 回制御理論シンポジウム資料, 169/172 (1987)
 - 15) 玄, 新, 大久保: スペクトル可安定な遅れ型むだ時間系の極配置, 第 17 回制御理論シンポジウム資料, 285/287 (1988)
 - 16) M. W. Spong and T. J. Tarn: On the Spectral Controllability of Delay-Differential Equations, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-2**, 527/528 (1981)
 - 17) 渡部慶二: むだ時間系の有限極配置 一有理関数制御行列と有限ラプラス変換制御行列の統合一, 第 11 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 307/312 (1988)
 - 18) 玄, 渡部, 北森: むだ時間系の有限極配置アルゴリズム 一むだ時間要素の有理式から有限ラプラス変換を含むフィードバックへの変換一, 計測自動制御学会論文集, **25-9**, 982/989 (1989)