四元数による表現を用いた飛行体の大角度姿勢制御[†]

細川 民樹*・山下 裕**・島 公脩**

Application of the Quaternion to Spacecraft's Large Angle Attitude Control

Tamiki HOSOKAWA*, Yuh YAMASHITA** and Masasuke SHIMA**

In this paper, we study the stabilization problem of a spacecraft with three independent torque actuators via state feedback. We describe its attitude with the quaternion $\mathbf{q} \triangleq (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $\|\mathbf{q}\|^2 \triangleq q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$, instead of the rotation matrix $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3)$, which is known to have the manifold structure. The purpose of this paper is to derive a global static feedback law such that quaternion $\mathbf{q}$ converges to $(0, 0, 0, 1)$.

First of all, we cover the manifold $\mathbf{SO}(3)$ with four local co-ordinates A: (q_1, q_2, q_3) , B: (q_1, q_2, q_4-1) , C: (q_1, q_3, q_4-1) , D: (q_2, q_3, q_4-1) . And, by means of the nonlinear control theory, we obtain four local control laws $\mathbf{u} = \mathbf{u}_A(x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_B(x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_C(x)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D(x)$ corresponding to them. But, each control law has singular points where the inputs diverge. If we adopt an idea that the control laws are switched according to the value of the quaternion in order to avoid the problem of the singular points, the control inputs are not smooth at the switching point. So, we synthesize a new control law $\mathbf{u} = q_1^2 \mathbf{u}_A + q_2^2 \mathbf{u}_B + q_3^2 \mathbf{u}_C + q_4^2 \mathbf{u}_D$ from local control laws. The new control law, of which each term is equal to zero at the singular points, is smooth and gives globally stable closed-loop system. Furthermore, its structure is much simpler than four local control laws. This method is applicable to both gas-jet actuators and reaction wheel actuators. The control law for gas-jet actuators is the special case of the control law derived in Ref. 5).

Key Words: global attitude control, quaternion, stabilization, nonlinear system

1. はじめに

飛行体の姿勢は、多様体の構造をもつ回転行列 $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3)$ により表わすことができる。本報告では、この行列 $\mathbf{R}$ を四元数 $\mathbf{q}$ により表現し、飛行体の姿勢をある目標姿勢に静止させるような非線形 3 軸姿勢制御系を設計することについて考える。

四元数を用いた大角度 3 軸姿勢制御の研究には、Mortensen¹⁾, Salehi and Ryan²⁾, Dwyer³⁾, Wie and Barba⁴⁾, Wie, Weiss and Arpostathis⁵⁾ などがあり、オイラー角などの表現を用いた方法（たとえば文献 6)）よりも良い結果を得ているようである。しかし、いずれも、制御則はある手順によって導かれたものではなく、ある制御則を仮定した上で、制御系の安定性などを論じている。

本報告では、まず多様体 $\mathbf{SO}(3)$ を四元数を用いた四つの局所座標系により覆い、各座標近傍系に対し非線形制御理論を用いて制御則を与える。しかし、これらの制御則は、制御入力が発散してしまうような特異点をもつため、あらゆる姿勢を一つの制御則で制御することはできない。その解決法として、 $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3)$ を覆った四つの局所座標系における各制御則を四元数 $\mathbf{q}$ の値によって切り換えて用いることにより、各制御則の特異点を避けるという方法が考えられる⁷⁾。しかし、この方法をそのまま用いたのでは、制御則切り換え時における制御入力が発散してしまうため、特にモーメントムホイール方式などにおいて制御則を切り換える際に問題がある。

そこで、本報告では、これら四つの各制御則を特異点から遠いときは重く、近いときは軽く評価することにより、制御則の特異点をなくし、連続かつ滑らかな制御入力により姿勢制御ができることを示す。さらに、大域的安定性も保証されることを示す。本報告

[†] 計測自動制御学会北海道支部シンポジウム「デジタル信号処理と数値解析」で発表 (1988・2)

* (株)東芝小向工場 川崎市小向東芝町 1

** 北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8

* Komukai Works, Toshiba Corporation, Kawasaki

** Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

(Received July 25, 1989)

(Revised November 29, 1989)

においては、ガスジェット方式とモーメントホイール方式ともに、同じ手法で構成できる。また、ガスジェット方式の場合は文献 5) で提案されている制御則の特殊な場合となっている。

2. 人工衛星の運動方程式

人工衛星の姿勢制御方式には種々のものがあるが、本報告では、ガスジェット方式による場合とモーメントホイール方式による場合の、2 種類の三軸姿勢制御方式について考える。まず、機体系 Q の座標を機体の主慣性軸方向にとる。基準慣性系 I を機体系 Q に変換する回転行列を $R \in SO(3)$ とする。ただし、慣性系 I と機体系 Q はともに人工衛星の重心に原点をとるものとする。 $J \triangleq \text{diag}(j_1, j_2, j_3)$ を機体の慣性モーメント、 $\omega \triangleq \text{col}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を機体系 Q における機体の角速度、 u^i を系への入力、 b_i を入力トルクの回転軸を表わす単位ベクトル、 $\Sigma b_i u^i$ を衛星全体へ加えられる入力トルク、 $v \triangleq \text{col}(v^1, v^2, v^3)$ をモーメントホイールの角運動量とする。すると、ガスジェット方式による場合の運動方程式は、

$$\dot{R} = S(\omega)R \quad (1a)$$

$$J\dot{\omega} = S(\omega)J\omega + \sum_{i=1}^3 b_i u^i \quad (1b)$$

モーメントホイール方式による場合は、

$$\dot{R} = S(\omega)R \quad (2a)$$

$$J\dot{\omega} = S(\omega)(J\omega + v) + \sum_{i=1}^3 b_i u^i \quad (2b)$$

$$\dot{v} = - \sum_{i=1}^3 b_i u^i \quad (2c)$$

となる (たとえば、文献 6) を参照)。ただし、

$$S(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

とし、 $B \triangleq [b_1, b_2, b_3]$ は正則行列とする。

3 次元空間における剛体の姿勢を表わす方法としては、上記の回転行列 R による方法のほかに、オイラー角による方法、四元数による方法などがある。回転行列を用いる方法は、 $SO(3)$ をそのまま用いるため、 $SO(3)$ の位相を損なわず、運動方程式も簡単になるが、3 個の独立変数を 9 個の変数で表わすために冗長度が大きい。オイラー角を用いる方法は、3 個の独立変数のみで表現できる点で有利であるが、 xyz 軸を等価に扱っておらず、運動方程式に特異点が現れ、三角関数が運動方程式に含まれるために複雑な計算を必要とする。四元数による方法は、4 個の変数で姿勢を表わすため、冗長度は 1 ですむ。また、3 軸を等価に扱

っており、運動方程式は簡単である。さらに、運動方程式自体には、特異的な点は現れない。このように各表現方法を比較した結果、四元数を用いた姿勢表現を採用することにする。

3. 四元数による表現

四元数 q をつぎのように定義する^{1), 8)}。

$$q \triangleq iq_1 + jq_2 + kq_3 + q_4 \quad (4)$$

$$\triangleq \text{col}(q_1, q_2, q_3, q_4) \quad (4)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (5a)$$

$$ij = -ji = k \quad (5b)$$

$$jk = -kj = i \quad (5c)$$

$$ki = -ik = j \quad (5d)$$

すると、四元数どうしの乗算が定義できる。ここで、四元数のノルムを、

$$\|q\| \triangleq \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (6)$$

と定義する。ノルム 1 の複素数が平面での回転を表現できるのと同様に、ノルム 1 の四元数は 3 次元の回転を表現できる。すなわち、ある単位ベクトル $e = (e_1, e_2, e_3)$ を軸として $\theta(\text{rad})$ 回転した姿勢を

$$q_1 = e_1 \sin(\theta/2) \quad (7a)$$

$$q_2 = e_2 \sin(\theta/2) \quad (7b)$$

$$q_3 = e_3 \sin(\theta/2) \quad (7c)$$

$$q_4 = \cos(\theta/2) \quad (7d)$$

で表現する。(7)式を見てもわかるように $q_1, \dots, q_4$ の符号をすべて同時に反転させても同じ姿勢を表わす。また、四元数どうしの乗算は回転の合成を意味する。四元数 p と回転行列 $R = [r_{ij}]$ には、

$$r_{11} = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2$$

$$r_{12} = 2(q_1 q_2 + q_3 q_4)$$

$$r_{13} = 2(q_1 q_3 - q_2 q_4)$$

$$r_{21} = 2(q_1 q_2 - q_3 q_4)$$

$$r_{22} = -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \quad (8)$$

$$r_{23} = 2(q_2 q_3 + q_1 q_4)$$

$$r_{31} = 2(q_1 q_3 + q_2 q_4)$$

$$r_{32} = 2(q_2 q_3 - q_1 q_4)$$

$$r_{33} = -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

の関係式が成り立つ。逆に、回転行列 R を四元数 q に変換する関係式はいろいろと考えられるが、たとえば $q_4 \neq 0$ のとき、

$$q_4 = \pm \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}/2 \quad (9a)$$

$$q_1 = (r_{23} - r_{32})/4q_4 \quad (9b)$$

$$q_2 = (r_{31} - r_{13})/4q_4 \quad (9c)$$

$$q_3 = (r_{12} - r_{21})/4q_4 \quad (9d)$$

となる。この式の両辺を微分して、(1a)式を代入すると、次式が得られる。

$$\dot{q} = \phi(q, \omega) \triangleq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4 \\ \omega_1 q_3 - \omega_3 q_1 + \omega_2 q_4 \\ \omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4 \\ -\omega_1 q_1 - \omega_2 q_2 - \omega_3 q_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

4. 制御系の安定化

本章では、一般に、

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^r g_i(x) u^i(t) \quad (11a)$$

$$y = h(x) \quad (11b)$$

と表わされる非線形系について考える。ここで、 $x \triangleq \text{col}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ は状態量、 $y \triangleq \text{col}(y^1, \dots, y^m) \in \mathbf{R}^m$ は出力、 $u \triangleq \text{col}(u^1, \dots, u^r) \in \mathbf{R}^r$ は入力とし、 $f(x)$, $g_i(x)$, $h(x)$ は解析的とする。この系に状態フィードバック、

$$u = a(x) \quad (12)$$

を作用させて、出力を $y = y_0$ に収束させることを考える。

ここで、relative order ρ_i を、

$$\text{row}(L_{g_i} L_f^k h^1, \dots, L_{g_r} L_f^k h^i) \begin{cases} = 0, & k=0, \dots, \rho_i-2 \\ \neq 0, & k=\rho_i-1 \end{cases} \quad (13)$$

を満たす正の整数と定義する。ただし、 L はリ－微分作用素で、関数に作用した場合は、

$$L_f \gamma(x) \triangleq \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x^i} \quad (14)$$

である。この ρ_i を用いて、decoupling matrix $A(x)$ を、つぎのように定義する。

$$A(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h^1 & \dots & L_{g_r} L_f^{\rho_r-1} h^1 \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h^m & \dots & L_{g_r} L_f^{\rho_r-1} h^m \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $m=r$ であつ、ほとんどすべての点で、

$$\text{rank } A(x) = m \quad (16)$$

と仮定する。すると、状態フィードバック、

$$u = a(x) = -A(x)^{-1} \begin{pmatrix} L_f^{\rho_1} h^1(x) + \mu^1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m} h^m(x) + \mu^m(x) \end{pmatrix} \quad (17)$$

は、局所的に

$$h^i(x), L_f h^i(x), \dots, L_f^{\rho_i-1} h^i(x), \quad i=1, \dots, m \quad (18)$$

で表わされる状態空間の動特性を安定化する。ここで、

$$\mu^i(x) \triangleq \alpha_{i, \rho_i-1} L_f^{\rho_i-1} h^i(x) + \dots + \alpha_{i,1} L_f h^i(x) + \alpha_{i,0} (h^i(x) - y_0^i) \quad (19)$$

であり、 $\alpha_{i,j}$ は、

$$s^{\rho_i} + \alpha_{i, \rho_i-1} s^{\rho_i-1} + \dots + \alpha_{i,1} s + \alpha_{i,0} = 0 \quad (20)$$

が安定多項式となるような正の実数とする。この制御則による閉ループ系の出力は、

$$\begin{aligned} & \frac{d^{\rho_i} y}{dt^{\rho_i}} + \alpha_{i, \rho_i-1} \frac{d^{\rho_i-1} y}{dt^{\rho_i-1}} + \dots \\ & + \alpha_{i,1} \frac{dy}{dt} + \alpha_{i,0} (y - y_0) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

なる式で決定される⁹⁾。(20)式が安定多項式であるので、閉ループ系の可観測な状態空間(18)における動特性は、安定となっていることがわかる。しかし、

$$\sum_{i=1}^m \rho_i = n \quad (22)$$

を満たしていない場合は、不可観測な状態が生じ、この閉ループ系全体の安定性は保証されない。

5. 人工衛星の姿勢制御系

まず、ガスジェット方式の場合を考える。 $R = \text{diag}(1, 1, 1)$ の姿勢、すなわち、

$$q = \text{col}(0, 0, 0, 1) \quad (23)$$

に収束させることにする。運動方程式は、(10), (1b) 式であり、状態量は $x \triangleq (q^T, \omega^T)^T$ である。(11a) 式の表現では、 $f(x) = (\phi(x)^T, (\mathbf{J}^{-1} S(\omega) \mathbf{J} \omega)^T)^T$, $g_i(x) = \mathbf{J}^{-1} b_i$ となる。 q_i のうち独立な変数は3個なので、たとえば出力として、

$$A) \quad y = h(x) = \text{col}(q_1, q_2, q_3) \quad (24a)$$

$$B) \quad y = h(x) = \text{col}(q_1, q_2, q_4 - 1) \quad (24b)$$

$$C) \quad y = h(x) = \text{col}(q_1, q_3, q_4 - 1) \quad (24c)$$

$$D) \quad y = h(x) = \text{col}(q_2, q_3, q_4 - 1) \quad (24d)$$

をとった4通りの場合を考える。前章の方法によって求めた。A)~D) の場合の制御入力をおのおの $u_A(x)$, $u_B(x)$, $u_C(x)$, $u_D(x)$ とすると、これらは、

$$\begin{aligned} u_A(x) &= -(2/q_4) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J} \\ & \cdot \begin{bmatrix} q_1^2 + q_4^2 & q_1 q_2 + q_3 q_4 & q_1 q_3 - q_2 q_4 \\ q_1 q_2 - q_3 q_4 & q_2^2 + q_4^2 & q_1 q_4 + q_2 q_3 \\ q_1 q_3 + q_2 q_4 & q_2 q_3 - q_1 q_4 & q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} u_B(x) &= -(2/q_3) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J} \\ & \cdot \begin{bmatrix} q_1 q_2 + q_3 q_4 & q_2^2 + q_3^2 & q_2 q_4 - q_1 q_3 \\ -q_1^2 - q_3^2 & q_3 q_4 - q_1 q_2 & -q_1 q_4 - q_2 q_3 \\ q_2 q_3 - q_1 q_4 & -q_1 q_3 - q_2 q_4 & -q_3^2 - q_4^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} u_C(x) &= -(2/q_2) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J} \\ & \cdot \begin{bmatrix} q_2 q_4 - q_1 q_3 & -q_2^2 - q_3^2 & -q_1 q_2 - q_3 q_4 \\ -q_2 q_3 - q_1 q_4 & q_1 q_2 - q_3 q_4 & -q_2^2 - q_4^2 \\ q_1^2 + q_2^2 & q_1 q_3 + q_2 q_4 & q_1 q_4 - q_2 q_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r^1 \\ r^3 \\ r^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25c)$$

$$\begin{aligned} u_D(x) &= -(2/q_1) \mathbf{B}^{-1} \mathbf{J} \\ & \cdot \begin{bmatrix} q_1 q_3 - q_2 q_4 & -q_1 q_2 - q_3 q_4 & -q_1^2 - q_4^2 \\ q_1 q_4 + q_2 q_3 & q_1^2 + q_3^2 & q_3 q_4 - q_1 q_2 \\ -q_1^2 - q_2^2 & q_1 q_4 - q_2 q_3 & -q_1 q_3 - q_2 q_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r^2 \\ r^3 \\ r^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25d)$$

と表わされる。ここで、 r^i は、

$$r^1 \triangleq L_f^2 q_1 + \alpha_1 L_f q_1 + \alpha_0 q_1 \quad (26 a)$$

$$r^2 \triangleq L_f^2 q_2 + \alpha_1 L_f q_2 + \alpha_0 q_2 \quad (26 b)$$

$$r^3 \triangleq L_f^2 q_3 + \alpha_1 L_f q_3 + \alpha_0 q_3 \quad (26 c)$$

$$r^4 \triangleq L_f^2 q_4 + \alpha_1 L_f q_4 + \alpha_0 (q_4 - 1) \quad (26 d)$$

と定義される。ただし、 α_1, α_0 は、

$$s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \quad (27)$$

が安定多項式となるように決めるものとする。また、 $L_f q_i, L_f^2 q_i$ は、

$$L_f q_1 = (\omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4) / 2 \quad (28 a)$$

$$L_f q_2 = (\omega_1 q_3 - \omega_3 q_1 + \omega_2 q_4) / 2 \quad (28 b)$$

$$L_f q_3 = (\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4) / 2 \quad (28 c)$$

$$L_f q_4 = -(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) / 2 \quad (28 d)$$

$$L_f^2 q_1 = (w_1 \omega_2 \omega_3 q_4 - w_2 \omega_1 \omega_3 q_3 + w_3 \omega_1 \omega_2 q_2 + \omega_3 L_f q_2 - \omega_2 L_f q_3 + \omega_1 L_f q_4) / 2 \quad (29 a)$$

$$L_f^2 q_2 = (w_1 \omega_2 \omega_3 q_3 + w_2 \omega_1 \omega_3 q_4 - w_3 \omega_1 \omega_2 q_1 - \omega_3 L_f q_1 + \omega_1 L_f q_3 + \omega_2 L_f q_4) / 2 \quad (29 b)$$

$$L_f^2 q_3 = (-w_1 \omega_2 \omega_3 q_2 + w_2 \omega_1 \omega_3 q_1 + w_3 \omega_1 \omega_2 q_4 + \omega_2 L_f q_1 - \omega_1 L_f q_2 + \omega_3 L_f q_4) / 2 \quad (29 c)$$

$$L_f^2 q_4 = -(w_1 \omega_2 \omega_3 q_1 + w_2 \omega_1 \omega_3 q_2 + w_3 \omega_1 \omega_2 q_3 + \omega_1 L_f q_1 + \omega_2 L_f q_2 + \omega_3 L_f q_3) / 2 \quad (29 d)$$

$$w_1 \triangleq (j_2 - j_3) / j_1 \quad (30 a)$$

$$w_2 \triangleq (j_3 - j_1) / j_2 \quad (30 b)$$

$$w_3 \triangleq (j_1 - j_2) / j_3 \quad (30 c)$$

と計算される。

機体の姿勢を 3 次元ユークリッド空間で表現しようとする必ず特異点が生じるので、制御則 (25) 式でも $q_4=0, q_3=0, q_2=0, q_1=0$ となる点がおのおの特異点となり入力が無限大となる。 $u_A(x), \dots, u_D(x)$ に対してそれぞれ $q_4, \dots, q_1$ を“対応する四元数”と呼ぶこととする。この特異点の問題を避けるために、まず思いつくのは、制御則を切り換える方法⁷⁾である。具体的には、現在用いている制御則に対応する四元数の絶対値がある値 $E(<0.5)$ よりも小さくなったときに、絶対値が最大の四元数に対応する制御則に切り換えればよい。しかし、この方法では、制御入力が不連続となる。また、大域的安定性の解析も困難である。

そこで、A)~D)の各制御則に重みを付けてそれらを一つの制御則に合成することを考える。各制御則が、おのおの特異点から近いときは軽く、遠いときには重く評価されるように、 $u_A(x), u_B(x), u_C(x), u_D(x)$ におのおの $q_4^2, q_3^2, q_2^2, q_1^2$ の重み係数を付け、それらを加えさせることにする。

すると、合成された制御入力⁸⁾は、

$$u = a(x) \triangleq q_4^2 u_A(x) + q_3^2 u_B(x) + q_2^2 u_C(x) + q_1^2 u_D(x) \quad (31)$$

となる。この重み係数を付けると、各項はそれぞれの特異点で 0 となる。四元数 q のノルムは 1 であるので、(31)式の重み係数の間には、

$$q_4^2 + q_3^2 + q_2^2 + q_1^2 = 1 \quad (32)$$

という関係式が成り立つ。また、目標の状態量 $x = (q^T, \omega^T)^T = \text{col}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ の付近では、 $u = a(x)$ は、 $u_A(x)$ にほぼ等しくなる。

(31)式の制御入力 $u = a(x)$ と、それに対する閉ループ系を求めると、つぎようになる。

$$\dot{a}(x) = B^{-1} \begin{pmatrix} -c^1 - j_1 \alpha_1 \omega_1 - 2j_1 \alpha_0 q_1 \\ -c^2 - j_2 \alpha_1 \omega_2 - 2j_2 \alpha_0 q_2 \\ -c^3 - j_3 \alpha_1 \omega_3 - 2j_3 \alpha_0 q_3 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (\omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4) / 2 \\ (\omega_1 q_3 - \omega_3 q_1 + \omega_2 q_4) / 2 \\ (\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4) / 2 \\ -(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) / 2 \\ -\alpha_1 \omega_1 - 2\alpha_0 q_1 \\ -\alpha_1 \omega_2 - 2\alpha_0 q_2 \\ -\alpha_1 \omega_3 - 2\alpha_0 q_3 \end{pmatrix} \quad (34)$$

ただし、

$$c^1 \triangleq (j_2 - j_3) \omega_2 \omega_3 \quad (35 a)$$

$$c^2 \triangleq (j_3 - j_1) \omega_1 \omega_3 \quad (35 b)$$

$$c^3 \triangleq (j_1 - j_2) \omega_1 \omega_2 \quad (35 c)$$

モーメントムホイール方式の場合も、同様にして、

$$\dot{a}(x) = B^{-1} \begin{pmatrix} -c^1 - d^1 - j_1 \alpha_1 \omega_1 - 2j_1 \alpha_0 q_1 \\ -c^2 - d^2 - j_2 \alpha_1 \omega_2 - 2j_2 \alpha_0 q_2 \\ -c^3 - d^3 - j_3 \alpha_1 \omega_3 - 2j_3 \alpha_0 q_3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\omega_3 q_2 - \omega_2 q_3 + \omega_1 q_4) / 2 \\ (\omega_1 q_3 - \omega_3 q_1 + \omega_2 q_4) / 2 \\ (\omega_2 q_1 - \omega_1 q_2 + \omega_3 q_4) / 2 \\ -(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) / 2 \\ -\alpha_1 \omega_1 - 2\alpha_0 q_1 \\ -\alpha_1 \omega_2 - 2\alpha_0 q_2 \\ -\alpha_1 \omega_3 - 2\alpha_0 q_3 \\ -c^1 - d^1 - j_1 \alpha_1 \omega_1 - 2j_1 \alpha_0 q_1 \\ -c^2 - d^2 - j_2 \alpha_1 \omega_2 - 2j_2 \alpha_0 q_2 \\ -c^3 - d^3 - j_3 \alpha_1 \omega_3 - 2j_3 \alpha_0 q_3 \end{pmatrix} \quad (37)$$

と制御則および閉ループ系が求められる。ただし、

$$d^1 \triangleq \omega_3 v^2 - \omega_2 v^3 \quad (38 a)$$

$$d^2 \triangleq \omega_1 v^3 - \omega_3 v^1 \quad (38 b)$$

$$d^3 \triangleq \omega_2 v^1 - \omega_1 v^2 \quad (38 c)$$

である。ガスジェット方式の場合の制御則 (33) 式は、文献 5) の制御則の特殊な場合となっている。

6. 大域的安定性の証明およびシミュレーション

(25)式の $u_A(x) \sim u_D(x)$ による閉ループ系において

は, relative order の和はそれぞれ6であり, 状態変数の数は7であるから, (22)式の条件は満たしていない. しかし, $\|q\|=1$ の制約があるので実質的には状態変数の数は6となっている. モーメントムホイール方式の場合も, $\|q\|=1$ の制約と角運動量保存の法則により実質的に(22)式の条件は満たされている. よって, 合成する前の制御則は, 閉ループ系を局所的に安定化する. しかし, 合成した制御則による閉ループ系(34), (37)式が大域的に安定であることの保証には, 別の議論が必要である. そこでリアプノフの直接法によって, 大域的安定性を証明した.

ガスジェット方式の場合の閉ループ系(34)に対し, リアプノフ関数を,

$$\begin{aligned} V \triangleq & (2k^2 + 4\alpha_1 k + 8\alpha_0)(1 - q_4) \\ & + 2k(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) \\ & + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \\ = & k^2(1 - q_4)^2 + (4\alpha_1 k + 8\alpha_0)(1 - q_4) \\ & + (kq_1 + \omega_1)^2 + (kq_2 + \omega_2)^2 \\ & + (kq_3 + \omega_3)^2 \end{aligned} \quad (39)$$

と定義する. ただし, k は,

$$k^3 + 16\alpha_0 k - 16\alpha_0 \alpha_1 = 0 \quad (40)$$

$$0 < k < 2\alpha_1 \quad (41)$$

を満たす実数である. このような k が存在することは, (40)式の左辺に $k=0$ および $k=2\alpha_1$ を代入することによって証明することができる. また, 5章で述べたように, $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ である. この V を時間で微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -(2\alpha_1 - kq_4)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \\ & + k^2(\omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \omega_3 q_3) \\ & - 4\alpha_0 k(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\ = & -k(1 - q_4)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \\ & - \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{k}{\alpha_0} \left(2\alpha_0 q_i - \frac{k}{4} \omega_i \right)^2 + \alpha_1 \omega_i^2 \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

が成り立つ. $\|q\|=1$ を考慮すると, $x = x_e \triangleq \text{col}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ のときに, $V = \dot{V} = 0$, $x \neq x_e$ のときに, $V > 0$, $\dot{V} < 0$ である. また, $\|x - x_e\| \rightarrow \infty$ のとき (つまり, $\|\omega\| \rightarrow \infty$ のとき), $V \rightarrow \infty$ となっている. よってリアプノフの安定定理により, 閉ループ系(34)の特異点 x_e はリアプノフの意味で大域的に漸近安定である. また, リアクションホイール方式の場合の閉ループ系(37)式において, q, ω の動特性は(34)式と同じであり, q, ω は目標値に収束する. v については, 角運動量保存則により, 状態量の初期値に応じたある一定値に収束する.

つぎに, シミュレーションによって, この安定性を検証した. また, 四元数の値によって制御則を切り換

える方法と比較した. その結果を Fig. 1~Fig. 5 に示す. Fig. 1 は姿勢を表わす四元数, Fig. 2 は機体の角速度, Fig. 3 はガスジェット方式の場合の入力, Fig. 4 はモーメントムホイールの角運動量, Fig. 5 はモーメントムホイール方式の場合の入力のシミュレーション結果である. それぞれの図において, (a) は合成した制御則を用いた場合, (b) は四元数 q の値により制御則を切り換えた場合の結果である. また, ガスジェット方式・モーメントムホイール方式に対して初期値・各パラメータを同じにとったので, Fig. 1, 2 は2方式に共通となっている. 初期値は, $q = \text{col}(-0.6, 0.5, -0.3, \sqrt{0.3})$, $\omega = \text{col}(1, 2, 3)$, $v = (0, 0, 0)$, 各パラメータは, $j_1=100$, $j_2=150$, $j_3=200$, $E=0.3$, $\alpha_0=1.5$, $\alpha_1=2$ とした.

(b)において, 応答が滑らかでないところは制御則の切り換えが行われているところである. しかし, このように応答が急激に変化するの, 実用上問題となることが多い. (a)では, 各応答は滑らかに変化し, 制御則を切り換える方法の欠点が改善されていることがわかる.

(a) Synthesized control law

(b) Switched control law

Fig. 1 Response of spacecraft attitude (quaternions)

(a) Synthesized control law

(b) Switched control law

Fig. 2 Response of spacecraft angular velocity

(a) Synthesized control law

(b) Switched control law

Fig. 4 Angular momentums of reaction wheels

(a) Synthesized control law

(b) Switched control law

Fig. 3 Inputs to spacecraft with gas jet actuators

(a) Synthesized control law

(b) Switched control law

Fig. 5 Inputs to spacecraft with reaction wheel actuators

7. おわりに

一つの制御則によってあらゆる姿勢を制御できるような方式の設計法について述べた。制御則を切り換えて用いる方法では、切り換え時の制御入力の不連続に変化するため、機体角速度が大きく変化する欠点があった。しかし、合成された制御則では、機体角速度・制御入力共に滑らかに変化し、その欠点が改善されている。さらに、制御則を切り換える方法に比べて制御則が非常に簡単になったため、計算時間が短くなるという利点も得られた。また、ガスジェット方式とリアクションホイール方式の両方が同じ設計法で設計でき、ガスジェット方式の場合は文献5)の特殊な場合に相当した。本設計法は、コントロールモーメントジャイロ方式の場合にも適用できると思われる。

最後に、本研究を始めるにあたって、四元数についての資料を提供していただきました石川島播磨重工業(株)宇宙開発事業部宇宙利用開発部部长北村幸雄氏に感謝いたします。

参考文献

- 1) R. E. Mortensen: A Globally Stable Linear Attitude Regulator, *Int. J. of Control*, **8-3**, 297/302 (1968)
- 2) S. V. Salehi and E. P. Ryan: A Nonlinear Feedback Attitude Regulator, *Int. J. of Control*, **41-1**, 281/287 (1985)
- 3) T. A. W. Dwyer: Exact Nonlinear Control of Spacecraft Slewing Maneuvers with Internal Momentum Transfer, *J. of Guidance, Control and Dynamics*, **9-2**, 240/247 (1986)
- 4) B. Wie and P. M. Barba: Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers, *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, **8-3**, 360/365 (1985)
- 5) B. Wie, H. Weiss and A. Arapostathis: Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations, **12-3**, 375/380 (1989)
- 6) P. E. Crouch: Spacecraft Attitude Control and Stabilization, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-29-4**, 321/331 (1984)
- 7) 細川, 山下, 島: 四元数による表現を用いた飛行体の姿勢制御, 第30回自動制御連合講演会前刷, 61/64 (1987)
- 8) 東口 實: 宇宙航空の誘導制御基礎講習会テキスト, 38/49 (1986)
- 9) 石動, 島: Invariance の理論とその応用—VIII. モデル追従制御系, システムと制御, **29-5**, 322/330 (1985)