管内の非定常な層流と乱流の速度分布の推定[†]

栗 春 晨*・内 山 勝*・箱 守 京次郎*

Estimation of Velocity Profiles for Both Laminar and Turbulent Unsteady Flows in Pipes

Chunchen Su*, Masaru UCHIYAMA* and Kyojiro HAKOMORI*

Recently, the study on the model-based method of the measurement of unsteady pipe flow has developed rapidly and a lot of fruitful applications have been reported. These applications, however, are all limited to the measurement of unsteady laminar flow, although the application to unsteady turbulent flow is strongly needed in practice. For this reason, not only is it necessary to make the model-based measurement method applicable for unsteady turbulent pipe flow, but also is it more needed to build up a unified model-based measurement method which is applicable for both laminar and turbulent flows without any special distinctions.

The aim of this paper is to present a unified model-based method to estimate velocity profiles as well as flow rates for both the turbulent and the laminar flows in a pipe. In this paper, a dynamic model of fluid in the pipe including a time-varying unknown parameter is derived by, first, considering a distributed parameter system governing the flow with suitable expression for eddy viscosity, and then lumping it by using the finite element method. The extended Kalman filtering technique is applied to the model to yield a nonlinear estimator for simultaneous estimation of the unknown parameter and the velocity profile. Experiments using a beam scanning laser Doppler velocimeter (LDV) are done to verify the proposed estimator. Successful results show that the method is effective not only for turbulent flow but also for laminar flow.

Key Words: flow measurement, distributed parameter system, finite element method, extended Kalman filter

1. はじめに

近年、科学技術の急速な進歩に伴い、高精度に管内非定常流れの瞬時流量を計測することがますます重要な問題となり、その計測法の確立が切望されている。この問題を解決するために、われわれは、管内非定常流のダイナミクスを表わす数学モデルに基づき、断面流速分布を予測推定し、流量を知るという新しい計測法、いわゆるモデルベースト計測法を提案してきた¹⁾。その後、この管内非定常流速分布と流量のモデルベースト計測手法は、多くの研究者に注目され、関連する研究成果が数多く発表されており^{2)~8)}、管内非定常流れの計測のための重要な手法を形成しつつある。

ところで、これらの研究は、いずれも非定常層流のみを取り上げて論じたもので、その適用範囲は非定常層流に限られている。しかし、実際の管路において、流れは乱流となる場合が多い。また、流れは層流となったり、乱流となったりする場合がよく見られる。したがって、モデルベースト手法を、実用性の高い手法にまで発展させるためには、その適用範囲を、非定常乱流領域に拡張させ、層流・乱流を区別しない統一的なモデルベースト計測手法を確立することが重要である。

そこで、本研究では、以前の研究成果を踏まえて、モデルベースト手法の適用範囲を非定常乱流領域に拡張して、層流・乱流領域に適用できる流速分布および瞬時流量の統一的なモデルベースト計測法を提案する。

まず、円管路を通過する十分発達した非圧縮性流体を取り上げ、層流と乱流の動的挙動を、渦粘性係数をパラメータとして含む同一の偏微分方程式で表わし、問題を、この方程式に基づき、有限個数観測値による流速分布の推定に帰着する。そして、有限要素法によ

[†] International Conference on ADVANCED MECHATRONICS で発表 (1989・5)

* 東北大学工学部 仙台市青葉区荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

(Received October 9, 1989)

(Revised January 5, 1990)

り有限次元の管内流体モデルを求める。さらに拡張カルマンフィルタ手法を用いて、流速分布および流量を推定するアルゴリズムを構成する。最後に、実験により、提案した手法が、助走区間外における層流・乱流のいずれに対しても有効であることを示す。

2. 基礎方程式

円管内の十分発達した非定常乱流は軸対称とみられ、その流体運動は、つぎに示すようなレイノルズ方程式により記述されることが知られている⁹⁾。

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \{ \nu + \nu_t(r, t) \} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] \quad (1)$$

ここで、 u_r は管軸方向の時間平均速度成分、 p_r は時間平均圧力、 r は管半径方向座標、 x は管軸方向座標、 t は時間、 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性係数、 $\nu_t(r, t)$ は渦粘性係数である。

一方、円管内の十分発達した非定常層流は、同じく軸対称流とみられ、その流体運動を支配するナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_L}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu \frac{\partial u_L}{\partial r} \right) \quad (2)$$

と表わされる。ここで、 u_L は管軸方向の速度成分、 p_L は圧力である。

(1)式と(2)式を比較すると、見かけ上、層流と乱流の運動方程式の違いは、方程式の形のみに限って言えば、渦粘性係数項 $\nu_t(r, t)$ の有無にある。これより、層流と乱流の流速および圧力を、それぞれ同一変数 u と p で表わすと、層流と乱流の運動を記述する方程式は、つぎのように一つの式にまとめられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \{ \nu + \nu_t(r, t) \} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (3)$$

ただし、以下の2点に注意する必要がある。

(1) $\nu_t(r, t)$ は、乱流の場合には、渦粘性係数を表わす。層流の場合には、その値はゼロとなる。

(2) 乱流を記述する u と p は、それぞれ流速と圧力の時間平均値を表わすが、層流を記述する u と p は、流速および圧力そのものを表わす。

また、境界条件は

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. u \right|_{r=a} = 0 \quad (4)$$

である。ただし a は管半径である。

3. 渦粘性係数の近似

(3)式は、形式的に、乱流粘性の概念を導入したレイノルズ方程式である。それを閉じる、すなわち渦粘性係数を定めるためには、乱流モデルを導入する必要

がある。しかし、現在までに発表されている乱流モデルは複雑すぎ、また層流領域にまで適用しないので、これらのモデルをそのまま本研究に適用することは困難である。一方渦粘性係数を時間・空間の変動パラメータと考え、適応手法によりその係数を同定する方法がすでに研究されているが¹⁰⁾、渦粘性係数を同定するために流速分布を観測しなければならないので、本目的には適当でない。

そこで、本研究では、混合距離モデルに基づき、渦粘性係数の近似式を求める。以下、その近似式を求める方法を示す。

工学的には、乱流の速度分布はつぎの指数法則により近似される⁹⁾。

$$u = \alpha_1 (a - r)^{\alpha_2} \quad (5)$$

ここで、 α_1 、 α_2 は共に実験値とされているが、特に α_1 は時間の関数と考えられる。一方、零方程式乱流モデルによれば、つぎの関係がある。

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \quad (6)$$

ここで、 l_m は平均混合距離であり、実験により定められる。Nikuradse の実験式¹¹⁾によれば

$$l_m = a \{ 0.14 - 0.08(r/a)^2 - 0.06(r/a)^4 \} \quad (7)$$

である。(5)~(7)式より、渦粘性の近似式

$$\nu_t(r, t) = C l_m^2 (1 - r/a)^{\alpha_2 - 1} \beta(t) \quad (8)$$

が得られる。ここで、

$$C = \frac{1}{0.0196 a^2}, \quad \beta(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 a^{\alpha_2 - 1}}{C}$$

である。 C は定数で、 $\beta(t)$ は $\nu_t(r, t)$ の最大値に相当する。また、物理的に $\beta(t)$ は負にならない。

さらに、工学上よく使用される値 $\alpha_2 = 1/7$ を用いると、つぎのような渦粘性係数の近似式が得られる。

$$\nu_t(r, t) = C l_m^2 (1 - r/a)^{-6/7} \beta(t) \quad (9)$$

以上により、渦粘性係数は一つの適応パラメータ $\beta(t)$ によって定まる。なお、 $\beta(t)$ は乱流の場合のみに定義されるものであるが、層流では $\nu_t = 0$ であるので、 $\beta(t) = 0$ と置けば、(9)式は層流の場合にも適用できる。

4. 管内流体の有限次元モデリング

(3)式によって表わされる管路内流れのモデルは空間的な次元をもつ分布定数システムである。実際処理する際などに、それを集中定数化する必要がある。またモデルベースト計測手法を用いるとき、流れの観測システムを前もって定めなければならない。本章では、このようなモデリング問題を取り扱う。

4.1 有限次元の管内流体モデル

以下有限要素法¹²⁾を用いて、(3)式の分布定数シス

テムを集中定数化する。

まず、適当に管半径領域 $0 \leq r \leq a$ を n_E 個の要素に分割して、各要素内において四つの節点を設ける。要素 e における流速 u^e は

$$u^e = \sum_{i=1}^4 N_i u_i^e \quad (10)$$

により近似される。ここで、 N_i は節点 i に付随する形状関数、 u_i^e は要素 e 内の節点 i における流速である。(3)式に Galerkin 法¹²⁾を適用することにより、つぎのような重み付き残差方程式系が得られる。

$$\int_{Q^e} N_i \left[\frac{\partial u^e}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\nu + \nu_i) \frac{\partial u^e}{\partial r} \right] \right] dr = 0$$

$$(i=1, 2, 3, 4 \text{ and } e=1, 2, \dots, n_E) \quad (11)$$

ここで、 Q^e は管半径方向にそう e 番目要素の領域を表わす。上式の弱形式を導いてから、(9)、(10)式と連立して、適当な数値積分法を採用すれば、全領域において、 n_E 個の 4×4 の行列方程式が得られる。境界条件(4)を利用してこの n_E 個の行列方程式を組み立てれば、状態変数方程式で表わした管路流体の有限近似モデルがつぎのように求められる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\beta) \mathbf{x} + \mathbf{b} \gamma \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{c}(r) \mathbf{x} \quad (13)$$

ただし

$$\mathbf{A}(\beta) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \beta$$

ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ は節点流速を要素とするベクトル、 $\beta \in \mathbf{R}$ は前述のパラメータである。 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}$ は流速でシステムの出力である。 $\gamma \in \mathbf{R}$ は圧力勾配でシステムの入力である。また、行列 $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ はともに有限要素法により定まる係数である。ただし、 $n=3n_E$ はシステムの次元である。なお、第6章に述べる実験では、管半径上の領域を管中心から四つの要素に分割し、それぞれの要素の長さを $0.4a$, $0.3a$, $0.2a$, $0.1a$ とし、12次元の管内流体モデルを求めた。

4.2 流れの観測システム

本論文では、流れの観測情報は流速計によって測定される有限個数の流速とする。

流速計による流速の観測過程は確率過程である。また、流速の測定はサンプリング時刻ごとに行うとする。これより、(13)式に対する流速の観測過程は

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (14)$$

で表わされる。ここで、 $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ は流速計による観測値を表わす。 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ は観測機器による観測ノイズを表わし、正規性白色過程とする。添字 k は k 番目のサンプリング時刻を表わす。 m は観測の次元である。また、 $\mathbf{C}_m \in \mathbf{R}^{m \times n}$ は観測行列で、式

$$\mathbf{C}_m = \int_0^a \mathbf{h}(r) \mathbf{c}(r) dr \quad (15)$$

により与えられる。ここで、ベクトル $\mathbf{h}(r) \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ は重み関数列で、観測機器および観測方法により定まるものである。本研究では、観測機器として多点流速の測定できるビーム走査レーザー流速計を利用するので、 $\mathbf{h}(r)$ の各要素はデルタ関数となる。

(12)式と(14)式を組み合せれば、つぎのように流れの観測システムが得られる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\beta) \mathbf{x} + \mathbf{b} \gamma \quad (16)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (17)$$

5. 流速分布の推定フィルタ

上記の観測システムはパラメータ β を含んでいる。このパラメータは流れに応じて変化するものである。一般に、このパラメータは時間の関数であるが、それを事前に解析的に求めることはできないので、ここでは β を一つの未知パラメータと考える。また、同観測システムには、システム入力として圧力勾配項 γ が存在している。実用上圧力勾配を計測することは非常に困難であるので、ここでは、この圧力勾配項 γ を未知入力とみなす。結局、われわれはシステムの状態変数 $\mathbf{x}$ を推定するために、 β と γ とを同時に推定しなければならない。この問題は適応推定と逆システムとが関連した問題である。この問題を解決するために、二つの未知変数をシステムの状態変数として推定する方法が考えられる。

そのため、まずつぎのようにシステムの状態を定義する。

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ \beta \ \gamma]^T \quad (18)$$

つぎに、 β , γ はそれぞれ以下のような確率過程であると仮定する。

$$\dot{\beta} = w_1 \quad (19)$$

$$\dot{\gamma} = w_2 \quad (20)$$

ここで、 $w_1 \in \mathbf{R}$, $w_2 \in \mathbf{R}$ はそれぞれ β , γ の駆動ノイズで、ともに正規性白色過程と仮定する。

(18)～(20)式を用いて、上述の観測システム(16)、(17)を拡張すれば、つぎのようなシステムが得られる。

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (21)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H} \mathbf{z}_k + \mathbf{v}_k \quad (22)$$

ここで、

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\beta) \mathbf{x} + \mathbf{b} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{C}_m \ 0 \ 0]$$

である。

拡張された観測システムは非線形である。このような確率システムの状態推定の方法として、拡張カルマンフィルタが有効である¹³⁾。そこで、拡張カルマンフィルタ理論をこのシステムに適用することにより、もとの状態変数 $\mathbf{x}$ とパラメータ β , γ とを同時推定するアルゴリズムが得られる。すなわち

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{z}}) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{z}}) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{G}\mathbf{Q}_w\mathbf{G}^T \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k/k} = \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k[\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{z}}_{k/k-1}] \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{k/k} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}]\mathbf{P}_{k/k-1} \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}^T[\mathbf{H}\mathbf{P}_{k/k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{Q}_v]^{-1} \quad (27)$$

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{z}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\hat{\mathbf{z}}} \quad (28)$$

ここで、

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{E}[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t)] \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T] \in \mathbf{R}^{m \times m}$$

である。また、初期条件は

$$\hat{\mathbf{z}}_{0/0} = \mathbf{z}(0) = [\mathbf{x}^T(0) \ \beta(0) \ \gamma(0)]^T$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{0/0} = \mathbf{P}(0)$$

により与えられる。

さらに (13) 式を利用して、つぎのように流速の推定値 $\hat{u}$ および流量の推定値 $\hat{q}$ を求めることができる。

$$\hat{u} = \mathbf{c}(r)\hat{\mathbf{x}} \quad (29)$$

$$\hat{q} = \int_0^a 2\pi r c(r) dr \hat{\mathbf{x}} \quad (30)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{x}}$ は

$$\hat{\mathbf{z}} = [\hat{\mathbf{x}}^T \ \hat{\beta} \ \hat{\gamma}]^T \quad (31)$$

により与えられる。

6. 実 験

6.1 実験装置

実験装置はビーム走査レーザー流速計と変動流発生装置よりなる。その構成を Fig. 1 に示す。

ビーム走査レーザー流速計は、以前の研究成果を踏まえて^{14), 15)} 本研究によって完成されたもので、その大きな特徴は、瞬時に多数点の流速すなわち流速分布が測定できることである。その構成を Fig. 2 に示す。同システムの測定原理はつぎのとおりである。測定点にあたる両ビームの交差点の位置は、サーボモータを通じてコンピュータからの指令により高速制御される二つの回転ミラーの回転角度により決められる。これより、線状の測定領域における流速分布を測定する。

ビーム走査レーザー流速計の測定精度を調べるために、われわれはたくさんの検証実験を行った。その結

Fig. 1 Schematic diagram of the experimental setup

Fig. 2 Configuration of the beam scanning LDV system

果、同装置は高い測定精度と信頼性を備えていることがわかった。

また、変動流発生装置は循環式を採用した。同装置はテスト管路、マグネットポンプおよびスプールバルブにより構成される。テスト管路は直管路であり、内径 31 mm、外径 38.8 mm、長さ 5,500 mm の透明アクリルパイプを用いた。テスト流体は 0.05% の市販ミルクを混入した室温 (約 20°C) の水道水を用いた。スプールバルブの開度はパルスモータを通じてコンピュータにより制御され、任意波形の変動流が発生可能である。

6.2 観測信号の統計的解析

流速分布の推定アルゴリズム (23)～(31) の最適性を得るためには、観測ノイズ v_k は正規性白色過程でなければならない。このため、実験する前に、層流と乱流の場合について、レーザー流速計による観測ノイズの統計的性質を調べる必要がある。

層流の場合については、レーザー流速計による観測ノイズは正規性白色過程であることがすでに確認されている¹⁾。そこで問題となるのは、乱流の場合にもそのノイズが正規性白色過程であるかどうかである。

本研究では、つぎのようにノイズの統計的特性を調べた。次節の実験条件に合せてレイノルズ数 $Re = 5,000 \sim 13,000$ の定常乱流を発生させ、そのときの流速分布をレーザー流速計で走査測定する。観測されたデータの平均値を真の値、平均値からの偏差を観測ノイズとみなして、データの解析を行う。

統計的解析の一例を Fig. 3 に示す。Fig. 3(a) は観測された流速であり、Fig. 3(b) はこの信号の偏差部分に対するフーリエ変換の結果である。また、Fig. 3(c) は信号偏差部分の確率密度関数を示している。ただし、同図における σ^2 はノイズの分散を表す。同様な多数のデータの統計的解析の結果も図示の例とほぼ同じであった。したがって、乱流の場合も、本実験装置による測定ノイズはほぼ正規性白色過程であるとみなせる。

6.3 実験方法と結果

実験は、層流と乱流の場合に分けて、つぎのように行われた。

まず、変動流発生装置を用いて正弦波状の変動流を発生させる。つぎに、タンクとテスト管路の接合部 (管入口) より 2,500 mm 離れたところに設置されたビーム走査レーザー流速計で流速分布を走査測定する。最後に、測定された流速データから 2 点の値を観測値として選び、(24)～(32) 式によって、流速分布および瞬時流量を推定する。

(a) Original data

(b) FFT result

(c) Probability density

Fig. 3 Properties of measurement noise

非定常乱流に対する実験結果の例を Fig. 4 に示す。Fig. 4(a) には、流速分布の推定結果をビーム走査レーザー流速計による直接測定値と比較して示す。また、同実験のデータを積分して、管内流量の推定値と測定値とを求めた。その結果を Fig. 4(b) に示す。Fig. 4(c) はそのときの未知のパラメータ β の推定結果である。ただし、実験条件は、レイノルズ数の変動範囲が $Re = 9,000 \sim 13,000$ 、流れの変動周波数が $f = 0.125$ Hz、サンプリング周期が $\tau = 0.1$ s、レーザー流速計による走査測定点数が 11、走査測定範囲が $-13 \sim 13$ mm (管中心を 0 とする) である。また、フィルタの観測値である 2 点の流速の測定箇所は、それぞれ $r_1 = 0$ mm、 $r_2 = 7.6$ mm である。初期条件および共分散行列は、それぞれつぎのように設定した。

$$\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \dots 0]^T, \quad \beta(0) = 1, \quad \gamma(0) = 10$$

$$\mathbf{P}(0) = \text{diag}[10000, 10000, \dots, 10000]$$

$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 5.3 & 0 \\ 0 & 7.1 \end{bmatrix}$$

(a) Velocity profile (—: estimated data; $\odot$: measured data; $\otimes$: measured data used in the estimator)

(a) Velocity profile (—: estimated data; $\odot$: measured data; $\otimes$: measured data used in the estimator)

(b) Flow rate

(c) Estimated parameter β

Fig. 4 Experimental results for estimating the unsteady turbulent flow for $a=1.55\text{cm}$, $\tau=0.05\text{s}$, $f=0.125\text{Hz}$, $Re=9000\sim 13000$

(b) Flow rate

(c) Estimated parameter β

Fig. 5 Experimental results for estimating the unsteady laminar flow for $a=1.55\text{cm}$, $\tau=0.2\text{s}$, $f=0.05\text{Hz}$, $Re=520\sim 1550$

ただし、 Q_w , Q_v , $P(0)$ の各要素の単位は cm^2/s^2 , $\beta(0)$ の単位は cm^2/s , $\gamma(0)$ の単位は cm/s^2 である。

層流に対する実験結果の例を **Fig. 5** に示す。同図における (a), (b) および (c) は、乱流の場合と同様にそれぞれ流速分布、瞬時流量およびパラメータ β に対する推定結果を表す。このとき、レイノルズ数は $Re=520\sim 1,550$ 、変動周波数は $f=0.05\text{Hz}$ 、サンプリング周期は $\tau=0.2\text{s}$ である。流速計の走査測定点数は 11 で、走査範囲は $0\sim 13\text{mm}$ である。2 点観測の測定箇所は $r_1=0\text{mm}$, $r_2=5.2\text{mm}$ とした。また

初期条件および共分散行列は、それぞれつぎのように設定した。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= [0 \ 0 \dots 0]^T, \quad \beta(0)=0.1, \quad \gamma(0)=1 \\ \mathbf{P}(0) &= \text{diag}[10000, 10000, \dots, 10000] \\ \mathbf{Q}_w &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし、単位は乱流の場合と同じである。

多数の実験を行ったが、いずれもここに示した例とほぼ同じ結果を得た。本研究では、数値的に推定精度を調べるために、流速分布および流量に対する推定値

と測定値との誤差分散を求めた。層流の場合には、推定値と測定値との誤差分散は、流速分布と流量のいずれに対しても観測ノイズとほぼ同じ程度であった。乱流の場合では、流速分布に対して管壁に近いところで推定値と測定値との誤差分散が観測ノイズの誤差分散の2倍ぐらいであったが、流量に対する推定ではほとんど差がなかった。また、Fig. 4(c)とFig. 5(c)より、推定した未知パラメータ β は、乱流の場合には、流れと同じ変動周波数で変動するが、層流の場合では、ほぼゼロに収束していることがわかる。これは予想した結果と一致する。以上より、本手法により層流・乱流における流速分布および流量を精度よく推定できることがわかる。

7. おわりに

本論文では、十分発達した管内非定常層流・乱流を対象として、その流速分布または流量の計測問題を、管内流体システムの状態推定問題に帰着して、その解決を試みた。すなわち、まず層流と乱流の運動を統一的に記述する分布定数システムを、有限要素法で集中定数化して、未知パラメータを含んだ有限次元管内流体モデルを導出した。つぎに、この集中定数モデルに拡張カルマンフィルタ理論を適用することにより、層流と乱流に対する速度分布および流量の統一的推定アルゴリズムを提案した。最後に、ビーム走査レーザ流速計を用いた実験により、そのアルゴリズムが層流・乱流の両領域に対して有効であることを確認した。

なお、本研究は、文部省科学研究費補助金（課題番号62850040）により行われたものである。ここに、これを記して謝意を表わす。

参 考 文 献

- 1) M. Uchiyama and K. Hakomori: Measurement of Instantaneous Flow Rate Through Estimation of Velocity Profiles, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-28-3**, 380/388 (1983)
- 2) 中野, 横田, 植山: 円管内瞬時流量計測手法, 計測自動制御学会論文集, **20-5**, 421/426 (1984)
- 3) 内山, 劉, 箱守: 熱フィルム流速計を用いた管内非定常流速分布の実時間推定, 計測自動制御学会論文集, **22-9**, 962/967 (1986)
- 4) 趙, 北川, 香川, 竹中: 管内差圧を利用した非定常流量および流速の実時間測定法, 日本機械学会論文集 (B編), **52-480**, 2851/2859 (1986)
- 5) 趙, 北川, 香川, 竹中: 管軸上の流速測定値を利用した非定常流量の実時間測定法, 日本機械学会論文集 (B編), **52-482**, 3484/3490 (1986)
- 6) 栗, 内山, 箱守: 円管内非定常流速分布の統一的線形推定アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **24-8**, 787/793 (1988)
- 7) 劉, 内山, 箱守: 円管助走区間内非定常流速プロファイルの非線形推定アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **24-10**, 1010/1015 (1988)
- 8) 劉, 内山, 箱守: 矩管路助走区間内非定常流速プロファイルのモデルベース推定, 計測自動制御学会論文集, **25-1**, 69/75 (1989)
- 9) A. J. Ward-Smith: Internal Fluid Flow, Oxford University Press (1980)
- 10) 栗, 内山, 箱守: 管内非定常乱流の渦粘性係数の推定, 計測自動制御学会論文集, **26-5**, 494/499 (1990)
- 11) T. Cebeci and P. Bradshaw: Momentum Transfer in Boundary Layers, McGraw-Hill (1977)
- 12) O. C. Zienkiewicz and K. Morgan: Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, Inc. (1983)
- 13) A. Gelb ed.: Applied Optimal Estimation, MIT Press (1974)
- 14) 内山, 箱守: ビーム走査レーザ流速計による非定常流速分布の測定, 精密機械, **48-7**, 939/944 (1982)
- 15) 小林, 栗, 内山, 箱守: ビーム走査レーザ流速計による管内非定常流速分布の実時間測定, 第24回SICE学術講演会予稿集, 97/98 (1985)