指定した回復度を満たす Loop Transfer Recovery 設計法による最小次元オブザーバの設計†

佐 伯 正 美*

A Design of Minimal Order Observers by a Loop Transfer Recovery
Design Procedure with Specified Degree of Recovery

Masami SAEKI*

This paper presents a new LTR method which recovers a robustness property at plant inputs to a specified degree by a minimal order observer. The result of this paper is an extension of the previous result for full order observers reported by the author. In LQG/LTR procedure a design problem of controllers for which the sequence of the open loop transfer functions of an LQG regulator converges to that of the corresponding LQ regulator is examined, but for non-minimum phase plant this asymptotic property does not hold and the effectiveness of the procedure is not clear. In this paper a difference of those transfer functions is estimated quantitatively by H^∞ norm and a design problem of an observer which makes the norm less than a specified value is proposed. This problem can be reduced to an H^∞ optimal control problem by state feedback. This H^∞ optimal control has been solved, but a different proof is given.

Key Words: loop transfer recovery, minimal order observer, H^∞ optimization, optimal control

1. ま え が き

LQ 理論 (線形最適制御理論) で得られる状態フィードバック系は十分な安定余裕と低感度特性をもつが、オブザーバ併合系ではこの性質が保存されない¹⁾。そこでオブザーバ併合系の開ループ伝達関数を状態フィードバック系の開ループ伝達関数に漸近させることでロバスト性を回復するようなオブザーバの設計手法が提案され、LTR (Loop Transfer Recovery) 法と

呼ばれる。漸近手法としては、LQG (Linear Quadratic Gaussian) 理論の枠組みにおける LTR である LQG/LTR 法^{2)~4)}や完全制御と完全観測に基づく方法が提案されている⁵⁾。この漸近的性質が非最小位相系の場合には成立しないため非最小位相系では LTR 法の効果が不明確であった。そこで筆者は漸近的性質を用いず回復度を定量的にある伝達関数の H^∞ ノルムで評価し、それを指定値以下とする解の存在条件を検討しフルオーダーオブザーバの設計法を提案した¹¹⁾。文献 11) で LTR 法はコントローラが安定である場合にのみ有効であり、強安定化できない制御系は LTR が無意味であることを指摘した。設計問題は状態フィードバックによるロバスト安定化問題や H^∞ 最適制御問題^{7)~9)}で現れる問題の双対形式に帰着された。さて、制御系の構成ではコントローラの次元が低いほうが実装上好ましいので、最小次元オブザーバについて LTR 法を検討することは重要と考えられる。すでに完全制御、完全観測の立場から最小次元オブザーバによる LTR 法が得られている¹²⁾。本論文では、文献 11) の結果を最小次元オブザーバの場合に拡張する。2章で設計問題を定式化する。3章で設計問題の解を与える。4章でアルゴリズムを整理し、5章で数値例を示す。

行列 A のすべての固有値の実部が負のとき行列 A は安定と呼ぶ。安定な実係数有理関数行列のクラスを RH^∞ で表わし、行列 $G(s) \in RH^\infty$ の H^∞ ノルムを

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

で表わす。ただし、 $\sigma_{\max}[A]$ は複素係数行列 A の最大特異値である。

2. 問題設定

つぎの線形時不変システムを考える。

† 第19回制御理論シンポジウムで発表 (1989・5)

* 筑波大学電子情報工学系 つくば市天王台 1-1-1

* Institute of Information Sciences and Electronics,
University of Tsukuba, Tsukuba
(Received March 2, 1989)
(Revised December 6, 1989)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

ただし (A, B) が可制御, (C, A) が可観測, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^r$ とする. また, 一般性を失うことなく, $\text{rank } C = m$ とする. このシステムに対し評価関数

$$J = \int_0^\infty x^T V x + u^T R u dt, \quad V \geq 0, R > 0 \quad (3)$$

を最小にする入力の状態フィードバック

$$u = -Kx \quad (4)$$

$$K = R^{-1} B^T P \quad (5)$$

で与えられる. ただし行列 P はつぎのリカッチ方程式の正定唯一解である.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + V = 0 \quad (6)$$

このとき, 状態フィードバック系(1), (4)式の入力側から見た開ループ伝達関数 $H_a(s)$ は

$$H_a(s) = K(sI - A)^{-1}B \quad (7)$$

であり, つぎの円条件を満たす.

$$[I + H_a(-j\omega)]^T R [I + H_a(j\omega)] \geq R \quad (8)$$

以下では, $H_a(s)$ を望ましい開ループ伝達関数とする.

状態が直接に測定できないとし, 最小次元オブザーバによる状態推定値 $\hat{x}$ を次式のようにフィードバックする.

$$u = -K\hat{x} \quad (9)$$

最小次元オブザーバはゴピナスの方法を適用する. すなわち $n \times n$ 行列

$$T = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix} \quad (10)$$

が正則となる行列 $C^* \in R^{(n-m) \times n}$ を選び, 行列 $A_{11} \in R^{m \times m}$, $A_{12} \in R^{m \times (n-m)}$, $A_{21} \in R^{(n-m) \times m}$, $A_{22} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $B_1 \in R^{m \times r}$, $B_2 \in R^{(n-m) \times r}$ を次式で定義する. C^* の存在は $\text{rank } C = m$ の仮定により保証される.

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

そして, 行列 $F \in R^{(n-m) \times m}$ は

$$\hat{A} = A_{22} - FA_{12} \quad (12)$$

が安定となる F を用いる. このとき最小次元オブザーバの方程式は

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}_1 y + \hat{B}_2 u \quad (13)$$

$$\dot{x} = \hat{C}z + \hat{D}y \quad (14)$$

ただし, I_m を m 次の単位行列とすると各係数行列は

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= A_{21} - FA_{11} + A_{22}F - FA_{12}F \\ \hat{B}_2 &= B_2 - FB_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{D} = T^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ F \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix}$$

で与えられる. F はオブザーバゲインであり設計パラメータである.

以下では(1), (2), (9), (13), (14)式で構成されるオブザーバ併合系について検討する. この系は Fig. 1 のように表わせる. ここに

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (16)$$

$$G_1(s) = K\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}_2 \quad (17)$$

$$G_2(s) = K\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}_1 + K\hat{D} \quad (18)$$

である. また, Fig. 1 の点 b から見た開ループ伝達関数は

$$H_b(s) = [I + G_1(s)]^{-1}G_2(s)G(s) \quad (19)$$

で与えられる. 点 a から見た開ループ伝達関数は(7)式の $H_a(s)$ に一致し, Fig. 1 より

$$H_a(s) = G_2(s)G(s) + G_1(s) \quad (20)$$

と表わせる. LTR の目的は $H_b(j\omega)$ が $H_a(j\omega)$ に近づくようにオブザーバを設計することである.

LTR についてつぎの基本的性質が成り立つ.

《定理 1》¹²⁾ コントローラが安定でない $H_b(s)$ を $H_a(s)$ に漸近させることはできない. ■

この定理より LTR 法ではコントローラ伝達関数を安定の範囲で考えてよい. つぎに, 文献 11) で導入した LTR の回復度を以下に説明する. H_a と H_b の差は(19), (20)式より

$$H_a - H_b = [I + G_1]^{-1}G_1[I + H_a] \quad (21)$$

である. $I + H_a$ は(8)式よりゼロに漸近しないので H_b が H_a に漸近することは, $[I + G_1]^{-1}G_1$ の大きさがゼロに漸近することに等価である. そこでスカラー $\alpha > 0$ として

$$\sigma_{\max} \{ [I + G_1(j\omega)]^{-1}G_1(j\omega) \} \leq \alpha \quad (22)$$

とおくと

$$\sigma_{\max} [H_a(j\omega) - H_b(j\omega)] \leq \alpha \sigma_{\max} [I + H_a(j\omega)] \quad (23)$$

の評価が得られるので, この α を LTR の回復度と考える. コントローラの伝達関数が

$$\begin{aligned} [I + G_1]^{-1}G_2 = & \hat{K}C(sI - \hat{A} + \hat{B}_2K\hat{C})^{-1}(\hat{B}_1 \\ & - \hat{B}_2K\hat{D}) + K\hat{D} \end{aligned} \quad (24)$$

であり, この極と

$$[I + G_1]^{-1}G_1 = \hat{K}C(sI - \hat{A} + \hat{B}_2K\hat{C})^{-1}\hat{B}_2$$

Fig. 1 Feedback system

の極が等しく、かつコントローラが安定であるので、 $[I+G_1]^{-1}G_1$ は安定な伝達関数としてよい。これより (22) 式は H^∞ ノルムを用いて表わせる。

【定義 1】次式を満たす正定数 α を LTR の回復度と定義する。

$$\|[I+G_1]^{-1}G_1\|^\infty \leq \alpha \quad (25)$$

系全体の安定性はつぎの定理で保証される。

《定理 2》¹¹⁾ $[I+G_1]^{-1}G_1$ が内部安定とする。このとき (25) 式で $\alpha < 1$ ならば、 $\hat{A}$ は安定行列である。■
以上より

$$[I+G_1]^{-1}G_1 = \bar{C}(sI - \bar{A}_{22} + F\bar{A}_{12})^{-1}[B_2 - FB_1] \quad (26)$$

ここに

$$\bar{C} = K\hat{C}, \quad \bar{A}_{22} = A_{22} - B_2K\hat{C}, \quad \bar{A}_{12} = A_{12} - B_1K\hat{C} \quad (27)$$

と表わし、つぎの設計問題を検討する。

最小次元オブザーバの設計問題

制御対象の状態方程式の係数行列 A, B, C と最適状態フィードバックゲイン K が与えられ、以下の係数行列を (10), (11), (15), (27) 式で定義する。このとき実定数 $1 > \alpha > 0$ に対し

$$\|\bar{C}(sI - \bar{A}_{22} + F\bar{A}_{12})^{-1}[B_2 - FB_1]\|^\infty \leq \alpha \quad (28)$$

を満たす F を求めよ。■

3. 設計問題の解

システムのロバスト安定化問題や状態フィードバックの H^∞ 最適制御問題では、2 章の設計問題に双対な問題が研究されている^{7-9), 13)}。文献 8), 13) の結果は本論文の問題に直接に適用できる。しかし、これらの文献には証明が完全には示されておらず文献 8) の証明の方針が理解しづらい。そこで本論文では文献 7) の証明法を発展させてより方針がわかりやすい証明を与えた。また、得られた定理は文献 13) と多少異なる表現であるが数値計算により適したように特異値分解を用いて表現している。この定理は文献 13) の定理で直達項をゼロとした場合の結果に等価である。なお、文献 13) の一般的な場合も以下の証明法で同様に導けることを指摘しておく。この章に限り記号を簡略にするために他の章の記号と独立な記号を用いる。

設計問題

$$\|C(sI - A + FE)^{-1}[B_2 - FB_1]\|^\infty \leq \alpha \quad (29)$$

を満たす F の存在条件と F を求めよ。■

【定義 2】⁶⁾ 実有理行列 $S(s)$ が bounded real であるとは以下の条件が成立することである。

1. $S(s)$ のすべての要素が $\operatorname{Re}[s] \geq 0$ で解析的である。

2. $I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq 0$ がすべての ω に対して成り立つ。

行列 $S(s)$ を

$$S(s) = (1/\alpha)[C(sI - A + FE)^{-1}(B_2 - FB_1)] \quad (30)$$

で定義すると、(29) 式は

$$I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq 0 \quad \omega \in [0, \infty] \quad (31)$$

と表わせ、 $S(s)$ は安定であることが必要だから、設計問題は $S(s)$ が bounded real である F をみつけることに等価である。以下に述べる定理 3 では $I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq \delta I > 0$ となる F が存在するための必要条件を与え、定理 4 ではその十分条件を与える。

【補題 1】 $S(s)$ が実有理行列とする。 $\{A, B, C\}$ が $S(s) = C(sI - A)^{-1}B$ の最小実現とする。このとき $S(s)$ が bounded real であるための必要十分条件はつぎのリカッチ方程式が正定対称解 P をもつことである。

$$PA + A^T P = -C^T C - PBB^T P \quad (32) \quad \blacksquare$$

この補題は文献 6) の bounded real の補題よりただちに証明できる。

【補題 2】¹⁰⁾ X を対称行列とし、行列 Z は $Z\xi = 0$ を満たすすべての ξ について $\xi^T X \xi = 0$ (あるいは ≤ 0) が成り立つとする。このとき十分大きな $\delta > 0$ に対し $X - \delta Z^T Z \leq 0$ が成立する。■

【補題 3】⁸⁾ $Q_1 > 0$ に対しリカッチ方程式

$$PQ_1 P = PA + A^T P + R_1$$

が正定対称解 $P = P_1$ をもてば、任意の $0 < Q_2 \leq Q_1$ と $R_2 \geq R_1$ に対してリカッチ方程式

$$PQ_2 P = PA + A^T P + R_2$$

は正定対称解 $P = P_2$ をもつ。■

《定理 3》(30) 式の $S(s)$ が安定で、ある $1 > \delta > 0$ に対し

$$(1 - \delta)I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq 0, \quad \omega \in [0, \infty] \quad (33)$$

を満たす F が存在するならば、つぎの F を含まないリカッチ方程式が $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ に対し正定対称解 P をもつような $\varepsilon^* > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} & P\{B_2 U_2 U_2^T B_2^T + \varepsilon I\}P + P[A - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T E] \\ & + [A - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T E]^T P - E^T \{V_1 \Sigma^{-2} V_1 \\ & + \frac{1}{\varepsilon} V_1^T V_2\} E + \frac{1}{\alpha^2} (C^T C) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

ここで $\operatorname{rank}(B_1) = l$ とすると $0 \leq l \leq r$ であり B_1 の特異値分解は

$$\begin{aligned} B_1 &= [V_1 \ V_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \\ &= V \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで Σ は l 次の正定対角行列、また $V \in R^{m \times m}$, $U \in R^{r \times r}$, $VV^T = V^T V = I_m$, $UU^T = U^T U = I_r$,

である。

(証明) $I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq \delta I$ であるからすべての周波数で (31) 式の左辺より δI だけ余裕をもたせた条件である。そこで

$$\bar{S}(s) = \frac{1}{\alpha} [C^T C + \mu I]^{1/2} [sI - A + FE]^{-1} \cdot \{ [B_2 - FB_1] [B_2 - FB_1]^T + \eta I \}^{1/2}$$

と定義すると, $S^T(-j\omega)S(j\omega)$ の最大固有値は μ , η に関して連続であり, この行列の固有値は $\mu = \eta = 0$ で $S^T(-j\omega)S(j\omega)$ の固有値に等しい。これより十分に小さな μ , $\eta > 0$ に対しこの伝達関数は最小実現され bounded real となる。よって補題 1 より十分に小さな $\eta > 0$, $\mu > 0$ を選ばばつぎのリカッチ方程式が正定対称解 P をもつ。

$$PA + A^T P - PFE - E^T F^T P + \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I]$$

$$+ P \{ [B_2 - FB_1] [B_2 - FB_1]^T + \eta I \} P = 0 \quad (36)$$

(36) 式に P^{-1} を左右から乗じ F について整理すると

$$FB_1 B_1^T F^T - F[EP^{-1} + B_1 B_1^T] \\ - [EP^{-1} + B_1 B_1^T] F^T + M = 0 \quad (37)$$

ここで

$$M = AP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I] \right\} P^{-1} \\ + B_2 B_2^T + \eta I \quad (38)$$

証明の基本方針は (37) 式の左辺を F の関数とみなして左辺の最大固有値が小さくなる F を求める。このとき左辺は半負定であるから, この F を含まない行列不等式より (34) 式を導出する。行列 B_1 の特異値分解が (35) 式で与えられ,

$$\hat{F} = [F_1, F_2] = FV$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = V^T [EP^{-1} + B_1 B_1^T] \quad (39)$$

とくと (37) 式は

$$\hat{F} \begin{bmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{F}^T - \hat{F} V^T [EP^{-1} + B_1 B_1^T] \\ - [EP^{-1} + B_1 B_1^T]^T V \hat{F}^T + M = 0$$

であるから展開すれば

$$F_1 \Sigma^2 F_1^T - F_1 R_1 - F_2 R_2 \\ - R_1^T F_1^T - R_2^T F_2^T + M = 0 \quad (40)$$

となる。まず F_1 について左辺を最小化する。(40) 式は

$$(F_1 - R_1^T \Sigma^{-2}) \Sigma^2 (F_1 - R_1^T \Sigma^{-2})^T - R_1^T \Sigma^{-2} R_1 \\ - F_2 R_2 - R_2^T F_2^T + M = 0$$

より

$$F_1 = R_1^T \Sigma^{-2} \quad (41)$$

のとき

$$-R_1^T \Sigma^{-2} R_1 - F_2 R_2 - R_2^T F_2^T + M = 0$$

が保証される。さらに補題 2 を上式に適用し

$$F_2 = \frac{1}{2\varepsilon} R_2^T \quad (42)$$

とすると, ある $\varepsilon^* > 0$ が存在し任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ に対して

$$-R_1^T \Sigma^{-2} R_1 - \frac{1}{\varepsilon} R_2^T R_2 + M \leq 0$$

が成り立つ。これより

$$- [R_1^T \ R_2^T] \Theta \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + M \leq 0 \quad (43)$$

ただし

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Sigma^{-2} & 0 \\ 0 & (1/\varepsilon)I \end{bmatrix} \quad (44)$$

(43) 式の両辺に P を左右から乗じて (38), (39) 式をもちいると

$$- [E + B_1 B_1^T P]^T V \Theta V^T [E + B_1 B_1^T P] + PA \\ + A^T P + \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I] + P [B_2 B_2^T \\ + \eta I] P \leq 0 \quad (45)$$

上式を P について整理すると

$$P \{ B_2 [I - B_1^T V \Theta V^T B_1] B_2^T + \eta I \} P \\ + P [A - B_2 B_1^T V \Theta V^T E] \\ + [A - B_2 B_1^T V \Theta V^T E]^T P \\ - E^T V \Theta V^T E + \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I] \leq 0$$

さらに $I - B_1^T V \Theta V^T B_1 = U_2 U_2^T$, $B_1^T V \Theta V^T = U_1 \Sigma^{-1} V_1^T$ に注意すると

$$P \{ B_2 U_2 U_2^T B_2^T + \eta I \} P + P [A - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T E] \\ + [A - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T E]^T P - E^T \{ V_1 \Sigma^{-2} V_1^T \\ + \frac{1}{\varepsilon} V_2 V_2^T \} E + \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I] = -Q \leq 0 \quad (46)$$

ここに (46) 式のように左辺の値を Q とおいた。この式を P に関するリカッチ方程式とみなせば, (46) 式はこの方程式に正定解があることを保証している。(46) 式は (34) 式の左辺 $= -Q - (\eta - \varepsilon)P^2 - (\mu/\alpha^2)I$ と表わされる。この式を補題 3 の最初のリカッチ方程式に対応させると Q_1 , R_1 は $Q_1 = B_2 U_2 U_2^T B_2 + \varepsilon I > 0$, $R_1 = -(1/\alpha^2)C^T C - Q - (\eta - \varepsilon)P^2 - (\mu/\alpha^2)I$ となる。 $-Q - (\eta - \varepsilon)P^2 - (\mu/\alpha^2)I \leq 0$ を満たす十分に小さい $\varepsilon > 0$ が存在するので $R_2 = -(1/\alpha^2)C^T C$ とおくと, この ε に対して $R_2 \geq R_1$ である。よって補題 3 を適用すればこの $Q_2 = Q_1$ と R_2 に対して 2 番目のリカッチ方程式が正定解をもつ。すなわち, (34) が正定解をもつことが示された。

定理 3 の証明で求めた F は

$$\begin{aligned}
 F &= \hat{F} V^T \\
 &= B_2 B_1^T V_1 \Sigma^{-2} V_1^T \\
 &\quad + P^{-1} E^T \left[V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + \frac{1}{2\varepsilon} V_2 V_2^T \right] \quad (47)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

《定理 4》 リカッチ方程式 (34) に $\varepsilon > 0$ に対して正定解 P があれば F と十分小さい $\delta > 0$ が存在し (30) 式の $S(s)$ が (33) 式を満たす。 F の一つは (47) 式で与えられる。 ■

(証明) $Q = \varepsilon P^2 - \eta P^2 - (\mu/\alpha)I > 0$ を満たす十分に小さい $\eta > 0$, $\mu > 0$ が存在するので (46) 式が成り立つ。 F を (47) 式のようにおくと (34) 式は

$$\begin{aligned}
 P(A - FE) + (A - FE)^T P + \frac{1}{\alpha^2} [C^T C + \mu I] \\
 + P[B_2 - FB_1][B_2 - FB_1]^T + \eta I \} P + Q = 0 \quad (48)
 \end{aligned}$$

と表わせる。このことは定理 3 の証明で (47) 式の F が (36) 式の左辺をなるべく小さくする F として求められたことから明らかである。 $\eta > 0$, $\mu > 0$ であるから $C^T C + \mu I + \alpha^2 Q > 0$, $[B_2 - FB_1][B_2 - FB_1]^T + \eta I > 0$ であるのでこれらは正則となり補題 1 の最小実現の条件が満たされる。補題 1 より

$$\begin{aligned}
 \bar{S}(s) &= \frac{1}{\alpha} [C^T C + \mu I + \alpha^2 Q]^{1/2} [sI - A + FE]^{-1} \\
 &\quad \cdot \{ [B_2 - FB_1][B_2 - FB_1]^T + \eta I \}^{1/2}
 \end{aligned}$$

が bounded real となる。ある周波数 ω_0 以上では適当な $\delta_1 > 0$ に対して $(1 - \delta_1)I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq 0$ である。また、 μ , η , Q は $\bar{S}(s)$ の H^∞ ノルムを大きくし、 $\omega \in [0, \omega_0]$ では $\sigma_{\min} [j\omega I - A + FE]^{-1} > 0$ であるから十分に小さい $0 < \delta < \delta_1$ に対し $(1 - \delta)I - S(-j\omega)^T S(j\omega) \geq 0$ が成り立つ。 ■

定理 3, 4 の証明から (34) 式の二つの ε に働きの違いがあることを注意する。すなわち、初項の ε は可制御可観測性などに関する条件をまとめたものであり、第 4 項の ε は行列 B_1 がフルランクでない場合に現れるパラメータである。

《定理 5》 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ が最小位相系で左可逆であれば、任意に小さい α に対して (34) 式の正定対称解が得られるような $\varepsilon > 0$ が存在する。 ■

(証明) 定理の条件が成り立てば文献 12) で最小次元オブザーバの場合に完全観測の性質から LTR が漸近的に達成できることが示されている。これにより $\|(I + G_1)^{-1}G_1\|^\infty$ を任意に小さくできる F が存在することが保証される。よって定理 3 より任意に小さい α に対して (34) 式の正定解が存在するような $\varepsilon > 0$ が存在する。 ■

4. オブザーバの設計アルゴリズム

定理 3, 定理 4 から 2 章のオブザーバ設計問題の解がつぎの定理で与えられる。

《定理 6》 ある十分に小さい $\delta > 0$ が存在し

$$\|\bar{C}(sI - \bar{A}_{22} + F\bar{A}_{12})^{-1}[B_2 - FB_1]\|^\infty \leq (I - \delta)\alpha \quad (49)$$

が成り立つ F が存在するための必要十分条件は、つぎのリカッチ方程式が正定対称解をもつような $\varepsilon > 0$ が存在することである。

$$\begin{aligned}
 P\{B_2 U_2 U_2^T B_2^T + \varepsilon I\} P + P[\bar{A}_{22} - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T \bar{A}_{12}] \\
 + [\bar{A}_{22} - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T \bar{A}_{12}]^T P \\
 - \bar{A}_{12}^T \left\{ V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + \frac{1}{\varepsilon} V_2 V_2^T \right\} \bar{A}_{12} \\
 + \frac{1}{\alpha^2} (\bar{C}^T \bar{C}) = 0 \quad (50)
 \end{aligned}$$

(50) 式の解 P を用いてオブザーバゲイン F の一つは

$$\begin{aligned}
 F &= B_2 B_1^T V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + P^{-1} \bar{A}_{12}^T \\
 &\quad \cdot \left[V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + \frac{1}{2\varepsilon} V_2 V_2^T \right] \quad (51)
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここで V_1 , V_2 , Σ , U_1 , U_2 は (35) 式の $B_1 (=CB)$ の特異値分解で定義される。 ■

(51) 式より F の計算に P の逆行列の計算が必要である。これを避けるために $A = P^{-1}$ とおいて (50) 式の両側から A を乗すると

$$\begin{aligned}
 B_2 U_2 U_2^T B_2^T + \varepsilon I + [\bar{A}_{22} - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T \bar{A}_{12}] A \\
 + A [\bar{A}_{22} - B_2 U_1 \Sigma^{-1} V_1^T \bar{A}_{12}]^T \\
 + A \{ -\bar{A}_{12}^T [V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + \frac{1}{\varepsilon} V_2 V_2^T] \bar{A}_{12} \\
 + \frac{1}{\alpha^2} \bar{C}^T \bar{C} \} A = 0 \quad (52)
 \end{aligned}$$

が得られる。明らかにこのリカッチ方程式に正定解 A が存在することと (50) 式に正定解 P が存在することとは等価である。この A を用いるとオブザーバゲインは

$$\begin{aligned}
 F &= B_2 B_1^T V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + A \bar{A}_{12}^T \\
 &\quad \cdot \left[V_1 \Sigma^{-2} V_1^T + \frac{1}{2\varepsilon} V_2 V_2^T \right] \quad (53)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

以上よりオブザーバゲイン計算のためのアルゴリズムが得られる。

オブザーバゲインの計算

(10) 式の T が正則になるように C^* を選び、(11) 式で A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , B_1 , B_2 を計算する。 $\hat{C}$ を (15) 式で $\bar{C}$, $\bar{A}_{22}$, $\bar{A}_{12}$ を (27) 式で計算する。望ましい安定余裕が得られるように (23) 式を参考にして α を決める。 (35) 式のように B_1 を特異値分解し V_1 , V_2 ,

U_1, U_2, Σ を求める. $B_1(=CB)$ が行フルランクであれば (52) 式で $V_2=0$ としたリカッチ方程式を解き (53) 式で $V_2=0$ とした式で F を求める. B_1 が行フルランクでない場合には, 計算精度を考慮しながら十分に小さい $\varepsilon > 0$ を与え (52) 式に正定解 A があれば, なるべく小さいオブザーバゲイン F を求めるために正定解が存在する範囲でなるべく大きい ε を探しオブザーバゲインを (53) 式で決める. 正定解がなければ (28) 式を満たす F が存在しないと考えられるので α の値を少し大きくして再び以上の方法を適用する. こうして F が求まれば (13), (14) 式のオブザーバの係数は (15) 式で与えられる. ■

定理 5 よりプラントが最小位相のとき任意に小さい $\alpha > 0$ に対しオブザーバが構成できることが保証される.

6. 数 値 例

〔例 1〕 文献 11) で扱ったつぎのシステムを考える.

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (54)$$

出力行列として三つの場合を考える. 制御対象の伝達関数も併記する.

$$\text{Case 1) } y = [2 \ 1]x$$

$$G(s) = (s+2)/[(s+1)(s+3)]$$

$$\text{Case 2) } y = [2 \ -1]x$$

$$G(s) = (-s+2)/[(s+1)(s+3)]$$

$$\text{Case 3) } y = [2 \ -0.1]x$$

$$G(s) = (-0.1s+2)/[(s+1)(s+3)]$$

Case 1 は最小位相系, Case 2, Case 3 は非最小位相系であり特に Case 2 はステップ応答のアンダーシュートが大きく制御しにくい系である. (54) 式の系に LQ 理論を適用して評価関数:

$$J = \int_0^\infty x^T V x + u^2 dt \quad (55)$$

$$V = \begin{bmatrix} 2800 & 478 \\ 478 & 80 \end{bmatrix}$$

を最小にする状態フィードバックは

$$u = [-50 \ -10]x \quad (56)$$

で与えられる.

設計した結果を Table 1 に示す. どの場合もすべて $CB \neq 0$ であるから V_2, U_2 の項はない. $C^* = [0, 1]$ とする.

Case 1) 最小位相系であるから任意の $1 > \alpha > 0$ でオブザーバを設計できる. 実際にリカッチ方程式は $\varepsilon - 4\lambda + [(15/\alpha)^2 - (14.5)^2]\lambda^2 = 0$ であり λ^2 の係数が

Table 1 Example

	Design parameters	Observer gain	Pole of observer	H^∞ norm of $[I+G_1]^{-1}G_1$
Case 1	a) $\alpha=0.1$	$F=1.0026$	-2.0377	0.01915
	b) $\alpha=0.5$	$F=1.0841$	-3.2193	0.39180
Case 2	a) $\alpha=0.83$	$F=5.0599$	-255.55	0.82997
	b) $\alpha=0.9$	$F=1.5784$	-107.58	0.83883
Case 3	a) $\alpha=0.1$	$F=49.698$	-124.17	0.09846
	b) $\alpha=0.5$	$F=8.2809$	-24.148	0.16303

$1 > \alpha > 0$ で正であるので十分小さい ε を選べば常に $\lambda > 0$ の解をもつ. $\alpha=0.1, 0.5$ について設計した. そのときのオブザーバゲイン, オブザーバの極, コンローラの極を示した. 周波数に関する $[I+G_1]^{-1}G_1$ のゲインの最大値は $\alpha=0.1, 0.5$ に対してそれぞれ 0.01916, 0.3918 である. これに比べ文献 11) のフルオーダーオブザーバの場合には 0.0998, 0.484 となり指定した値に非常に近い. これは, H^∞ 最適制御問題を満たす解が多数あるなかでここでは (40) 式を F_1 に関して最小化する F を用いたことによる. このため本方法のままでは正確に回復度を指定できず H^∞ ノルムが指定値より十分すぎるほど小さくなりうる. これは H^∞ ノルム以外の条件を付加できる自由度が残されていることを意味するので, そのような問題を検討することは今後の課題である. これは以下の場合にも当てはまる.

Case 2) 非最小位相系であるので α は任意に小さくとれない. 実際にリカッチ方程式は $\varepsilon + 4\lambda + [(1225)/\alpha^2 - 1806.25]\lambda^2 = 0$ であるから $\lambda > 0$ の解をもつには λ^2 の係数が負であることが必要十分であるから, $\alpha > 0.8235$ となる. $\alpha=0.83, 0.9$ について結果を表に載せた. 周波数に関する $[I+G_1]^{-1}G_1$ のゲインの最大値は $\alpha=0.83, 0.9$ に対してそれぞれ 0.8299, 0.8388 である.

Case 3) 非最小位相系であるが, Case 2 に比べてステップ応答のアンダーシュートはほとんどなく最小位相系の応答に近い系である. リカッチ方程式は $\varepsilon + 265\lambda + [(12.5/\alpha)^2 - (149.15)^2]\lambda^2 = 0$ であるから $\lambda > 0$ の解をもつには λ^2 の係数が負であることが必要十分である. これより, $\alpha > 0.08146$ となる. $\alpha=0.5, 0.1$ について結果を表に載せた. 周波数に関する $[I+G_1]^{-1}G_1$ のゲインの最大値は $\alpha=0.5, 0.1$ に対してそれぞれ 0.163036, 0.09846 である. 文献 11) のフルオーダーオブザーバの場合では α が 0.4 で解が存在したが 0.3 では存在しなかった. これらは数値計算で求めたので正確な値はわからないがこの場合では最小次元オブザーバのほうが回復度がより改善できると思われる.

7. あとがき

最適制御系に最小次元オブザーバを付加した併合系のロバスト安定余有を回復する最小次元オブザーバの設計法を与えた。文献 11) の結果を最小次元オブザーバに拡張したものである。オブザーバ併合系のプラント入力側からみた開ループ伝達関数と最適状態フィードバック系のそれとの差の H^∞ ノルムが指定した値以下になるようなオブザーバの設計問題を提起し定理 6 で存在の必要十分条件を与えた。この解は文献 13) の結果で直達項をゼロとした結果に一致するが、より見通しのよい別証明を与えた。本方法は指定値を調整することで LTR の回復度が指定でき、最小位相系の漸近的性質を用いていないので最小位相系だけでなく非最小位相系にたいしても LTR 法の意味付けが明確である。また、得られたコントローラは安定性が保証される。設計法は、回復度を示すスカラー値を与えリカッチ方程式を解き正定解が存在すればオブザーバゲインが存在するのでこれを計算する方法である。最後に例題で本方法の有効性を示した。

査読者の数々の貴重なご意見やご指摘に対し感謝いたします。

参考文献

- 1) J. C. Doyle and G. Stein: Robustness with Observers, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24-4**, 607/611 (1979)
- 2) H. Kwakernaak: Optimal Low-Sensitivity Linear Feedback Systems, Automatica, **5**, 279/285 (1969)
- 3) J. C. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design; Concepts for Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-1**, 4/16 (1981)
- 4) G. Stein and M. Athans: The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32-2**, 105/114 (1987)
- 5) 木村, 杉山: 完全制御と完全観測を用いたロバスト制御系の設計法, 計測自動制御学会論文集, **18-10**, 955/960 (1982)
- 6) B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd: Network Analysis and Synthesis, Chapter 7, Prentice-Hall, Inc. (1973)
- 7) I. R. Petersen: Disturbance Attenuation and H^∞ Optimization: A design Method Based on the Algebraic Riccati Equation, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32-5**, 427/429 (1987)
- 8) P. P. Khargonekar, I. P. Petersen and K. Zhou: Robust Stabilization and H^∞ Optimal Control, Department of Electrical Eng., University of Minnesota (1987)
- 9) J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis: State-Space Solutions to Standard H_2 and H^∞ Control Problems, Proc. 1988 American Control Conference, 1691/1696 (1988)
- 10) D. H. Jacobson: Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory, Academic Press, London (1977)
- 11) 佐伯正美: 指定した回復度を満たす Loop Transfer Recovery 設計法, 計測自動制御学会論文集, **25-6**, 667/674 (1989)
- 12) 安田, 小屋, 池田: ロバスト性の回復を考慮した最小次元オブザーバの構成, 第 6 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 113/116 (1983)
- 13) K. Zhou and P. P. Khargonekar: An Algebraic Riccati Equation Approach to H^∞ Optimization, Systems and Control Letters, **11**, 85/91 (1988)