関節変数の分離に基づく逆運動学の解法

佐々木 忍*

A Method of Solving the Inverse Kinematics Based on Separation of Articulated Variables

Shinobu SASAKI*

In this paper is presented a useful algorithm for solving the inverse kinematics of six-link manipulators, for which an expression related to the hand position is replaced with a set of equations for a simple optimization problem with an objective function composed of position deviations. The key point in this procedure is to depart from a customary practice of treating entire articulated variables at a time. That is, six variables are formally divided into three independent and three dependent variables. The introduction of performance index including the first three variables and its minimization technique are considered as an alternative course for obtaining desired solutions.

The results of computer simulation show that numerical solutions are sufficiently reliable under the assumption of linearization. Furthermore, for practical purposes, attempts are made to apply it effectively to the nonlinear domain paying major attention to appropriate corrections and improvements of angular displacements. Thereby, the convergence of solutions were confirmed even for considerably large initial displacements, admitting that correction itself for the unknown nonlinear characteristics must depend on the rule of thumb exclusively at the current state-of-the art. In principle, the present approach is applicable to all types of six link manipulator with rotational and revolute joints.

Key Words: inverse kinematics, six-link manipulator, performance index, optimization technique

1. はじめに

3次元空間機構のなかで、ロボット・マニピュレータの機構学は構成要素であるリンクを支持部（ベース）から直列連鎖状に結合した体系について指先位置・姿勢と関節角度との対応関係を取扱うもので、動力学的変化は考慮しないがマニピュレータの運動記述や軌道プランニング問題で重要な役割を果たす。その関係式を表現する上で、マニピュレータの各関節変数を与えて指先の位置・姿勢を求める順運動学は、座標変換法やベクトル法などの数学的手法を用いて一般的かつ容易に求まる。一方、逆問題は順運動学で確立した関係式が正弦・余弦を多数含む連立非線形方程式となるため、解析解を求めることが困難であるばかりかその数値計算もきわめて複雑である。特定の構造をもったマニピュレータについてのみ解析解が期待でき、Paulらは逆行列演算と組合せて簡単な関節角の関係式が引出せることを提案している¹⁾。

このように逆運動学では非線形超越方程式の解を求めることが中心となり、位置・姿勢を含めた6変数に対する関節解を線形近似したいわゆるヤコビ行列による逐次反復法がよく利用されてきた。この方法は計算機処理の観点からそのアルゴリズムが単純なため今日一般的に利用されているものの、解の初期値依存性やヤコビ行列の特異点存在の可能性など解を導く上で考慮すべき点がある。

こうした事情から、文献2)～5)ではヤコビ法で遭遇しがちな特異点問題に触れずにすべての実現可能な解や厳密な解が引出せる方法を提案してきた。しかし、逆問題に含まれる独立変数の個数は、一括して取扱えば概して式の煩雑さや計算負担を伴うことから、その取扱いはつねに工夫を要する。本報ではこれら関節変数を二つのグループに分け、一方を他方の変数で表現したのち、最小化探索問題に帰着させて解を誘導

* 日本原子力研究所東海研究所 茨城県那珂郡東海村白方白根 2-4

* Tokai Research Establishment, Japan Atomic Energy Research Institute, Naka-gun, Ibaraki (Received May 12, 1989)
(Revised February 5, 1990)

する。取扱う変数の偏差 2 乗ノルムとその極値化計算がアルゴリズムの基本といえる。特に、反復過程で角度の変位を直接補正・改善したことがより安定に解を得るための効果的な方法であった。以前に報告した最小化手法は根元の構造に着目して定式化を行ったが、本手法はより少ない変数系で処理できるモデルとして一般的な多関節形 6 リンク・マニピュレータに適用可能な特徴を備えている。

2. 解析モデルの記述

6 自由度を前提とする一般的なマニピュレータの運動学はつぎの方程式系で表わされる。

$$F_i = F_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \quad (i=1, \dots, 6) \quad (1)$$

このうち、6 個の独立変数 $\theta_1 \sim \theta_6$ に対して三つの方程式 F_1, F_2, F_3 が指先の姿勢を、また残り三つが指先の位置を定める。指先の姿勢決定に対してたとえば球形関節は三つの軸の回転を表わすための都合よい対偶であるが、単軸回転の駆動ができないために、実際は三つの回転関節を組み合わせて使用している。このような球形関節を用いた場合の 6 リンク・マニピュレータでは、アームによる位置決め機構と手首から先の姿勢決定機構が分離できることから関節解の導出が容易になる。しかしながら、設計上の理由から通常は三つの関節が位置を決定し、残り 3 関節が独立に姿勢を決定するようなリンク機構は少なく、このことが逆問題の解法を困難にしている。三つの回転関節を組合せた構造については、三つの隣接した関節軸が 1 点で交わるか、平行かなどの幾何学的要件が閉じた解を発見する鍵になる⁶⁾。

本報ではこうした六つの関節を単純に位置決定機構と姿勢決定機構とに分離できない一般的な構造 ((1) 式) に対して、数値解法上便宜的に六つの関節変数を三つずつに分け、つまり (1) の 3 式に含まれた独立変数のなかから、三つの変数を取りだし残りを従属関係とみなしたうえで、これを (1) の残り 3 式と関連づけて評価関数の最小値から関節解を決定する。計算過程では、第 1, 第 2, 第 3 関節変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (以下基準変数と呼ぶ) を固定して残りの関節変数をこの三つで表現することにする。

さて、(1) の左辺を既知として姿勢についての 3 式 F_1, F_2, F_3 を整理して陰関数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ を

$$\begin{aligned} \theta_4 &= H_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_5 &= H_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \theta_6 &= H_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{aligned} \quad (2)$$

なる陽的な表示を行う (陰関数の存在を仮定する)。これを (1) の F_4, F_5, F_6 と関係づけると、指先位置が

基準変数のみで表わせる。この 3 変数から構成される位置方程式に対して、解を決定するアプローチはいくつか考えられるが、ここでは現在位置と目標値との偏差に着目した下記の評価関数の極値探索から所要の関節解を誘導する。

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=4}^6 \{F_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) - \underline{F}_j\}^2 \\ &= \sum_{j=4}^6 \{\Phi_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3) - \underline{F}_j\}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\underline{F}_j$ は指先での目標値とする。

これにより原問題が 3 変数の最適化問題として置き換えられたので、つぎにその効率的な解法に進む。ここで、以下使用する記号について下記の約束をする。二重添字で表記した記号のうち、偏導関数については $(\partial F_j / \partial \theta_k) = F_{jk}$, $(\partial \theta_j / \partial \theta_k) = \theta_{jk}$, $(\partial P_x / \partial \theta_j) = P_{xj}$ などと略記する。その他、 $s_i = \sin \theta_i$, $c_i = \cos \theta_i$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$; $n = (n_x, n_y, n_z)^T$, $o = (o_x, o_y, o_z)^T$, $a = (a_x, a_y, a_z)^T$; マニピュレータの指先姿勢を決定する 3 方向単位ベクトル (T は転置記号) で目標値を下線を使って $\underline{a}_x$ などで示す。: P_x, P_y, P_z ; 基準座標系における指先の位置座標を表わす。

さて、(3) 式の偏差 2 乗和を最小すなわち零にする関節解は、各因子 $\Phi_j(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を与えられた指先位置に十分近いと推定される関節変数の初期値 $\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0$ の近傍でつぎのように線形近似して引出すのがもっとも簡単で実用的である。

$$\begin{aligned} &F_j(\theta_1^0 + \Delta\theta_1, \dots, \theta_6^0 + \Delta\theta_6) - F_j^0 \\ &= F_{j1}\Delta\theta_1 + F_{j2}\Delta\theta_2 + F_{j3}\Delta\theta_3 \\ &\quad + F_{j4}\{\theta_{41}\Delta\theta_1 + \theta_{42}\Delta\theta_2 + \theta_{43}\Delta\theta_3\} \\ &\quad + F_{j5}\{\theta_{51}\Delta\theta_1 + \theta_{52}\Delta\theta_2 + \theta_{53}\Delta\theta_3\} \\ &\quad + F_{j6}\{\theta_{61}\Delta\theta_1 + \theta_{62}\Delta\theta_2 + \theta_{63}\Delta\theta_3\} \\ &= \{F_{j1} + F_{j4}\theta_{41} + F_{j5}\theta_{51} + F_{j6}\theta_{61}\}\Delta\theta_1 \\ &\quad + \{F_{j2} + F_{j4}\theta_{42} + F_{j5}\theta_{52} + F_{j6}\theta_{62}\}\Delta\theta_2 \\ &\quad + \{F_{j3} + F_{j4}\theta_{43} + F_{j5}\theta_{53} + F_{j6}\theta_{63}\}\Delta\theta_3 \\ &= \Phi_j(\theta_1^0 + \Delta\theta_1, \theta_2^0 + \Delta\theta_2, \theta_3^0 + \Delta\theta_3) - \Phi_j^0 \\ &= \Phi_{j1}\Delta\theta_1 + \Phi_{j2}\Delta\theta_2 + \Phi_{j3}\Delta\theta_3 \quad (j=4, 5, 6) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} F_j^0 &= F_j(\theta_1^0, \dots, \theta_6^0) = \Phi_j(\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0) \\ &= \Phi_j(\theta_0) = \Phi_j^0 \quad (j=4, 5, 6) \end{aligned}$$

したがって、(4) 式と目標値との偏差 2 乗和を最小にする $\Delta\theta_i$ ($i=1, 2, 3$) が連立方程式の解として反復操作により精度よく決定できる。以下では、こうした考えに基づいて実際的な多関節機構に適用を計る。

Fig. 1 は解析の対象としてとりあげた 6 リンク・マニピュレータの構成図であり、その運動学方程式を

Fig. 1 A six-link manipulator to be studied

(5)～(16)式に記載する。

$$n_x = -(s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) \quad (5)$$

$$n_y = (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) \quad (6)$$

$$n_z = (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - s_{23} s_4 s_6 \quad (7)$$

$$o_x = (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) c_6 + s_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) \quad (8)$$

$$o_y = (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) c_6 - s_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) \quad (9)$$

$$o_z = -(s_{23} s_4) c_6 + s_6 (s_{23} s_5 c_4 - c_{23} c_5) \quad (10)$$

$$a_x = s_1 s_{23} s_5 - s_1 c_{23} c_4 c_5 - s_4 c_1 c_5 \quad (11)$$

$$a_y = c_1 c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 c_1 - s_1 s_4 c_5 \quad (12)$$

$$a_z = -(s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}) \quad (13)$$

$$P_x = -a_6 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}) - a_5 (s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4) - (a_3 + a_4) s_1 s_{23} - a_2 s_1 s_2 \quad (14)$$

$$P_y = a_6 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) c_6 + a_6 s_6 (s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}) + a_5 (s_{23} c_1 c_5 - s_1 s_4 s_5 + s_5 c_1 c_{23} c_4) + (a_3 + a_4) s_{23} c_1 + a_2 s_2 c_1 \quad (15)$$

$$P_z = a_6 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) c_6 - a_6 s_6 (s_{23} s_4) + a_5 (c_{23} c_5 - s_{23} s_5 c_4) + (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2 + a_1 \quad (16)$$

まず, (11), (12)式から s_1, c_1 について整理した共通項を基準変数を使ってつぎのように記述する. ただし, (5)～(16)式の左辺は, 指定値として下線で記す.

$$c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 = \underline{a_y c_1 - a_x s_1} = w_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (17)$$

$$s_4 c_5 = -(\underline{a_y s_1 + a_x c_1}) = w_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) (=X_1) \quad (18)$$

また, (13), (17)式から

$$c_4 c_5 = w_1 c_{23} - \underline{a_x s_{23}} (=X_2) \quad (19)$$

$$s_5 = -(\underline{a_x c_{23} + w_1 s_{23}}) (=X_3) \quad (20)$$

が得られ, 関節角 θ_4, θ_5 と基準変数との関係が導き出せる. すなわち, (18)～(20)式から

$$\tan \theta_4 = \frac{-(a_y s_1 + a_x c_1)}{w_1 c_{23} - \underline{a_x s_{23}}} = \frac{X_1}{X_2} \quad (21)$$

$$\text{ただし, } X_2 = w_1 c_{23} - \underline{a_x s_{23}} \neq 0 \quad (22)$$

$$\tan \theta_5 = \frac{-(\underline{a_x c_{23} + w_1 s_{23}})}{(w_2/s_4)} = \frac{-s_4(\underline{a_x c_{23} + w_1 s_{23}})}{w_2} = s_4 X_3 / X_1 \quad (23)$$

$$\text{ただし, } X_1 = -(\underline{a_y s_1 + a_x c_1}) \neq 0 \quad (24)$$

が直ちに求まる. 残るは θ_6 で, これを含む式としてたとえば(5)式の c_6, s_6 の係数

$$A = s_1 s_{23} c_5 + s_4 s_5 c_1 + s_1 s_5 c_{23} c_4 \quad (25)$$

$$B = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23} \quad (26)$$

に着目する. この A, B は上で求めた関節角の値から計算できるが, また(8)式と関連づけると

$$A = -\underline{n_x c_6 + o_x s_6} \quad (27)$$

$$B = \underline{n_y s_6 + o_x c_6} \quad (28)$$

とも表現できることから,

$$\tan \theta_6 = \frac{B n_x + A o_x}{B o_x - A n_x} = \frac{X_4}{X_5} \quad (29)$$

$$\text{ただし, } X_5 = B o_x - A n_x \neq 0 \quad (30)$$

と表わされる.

このように, 姿勢の関係式から $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ が基準変数で表わされたので, つぎに(4)式に従ってマニピュレータの指先位置 P_x, P_y, P_z を初期値 θ_0 の近傍で線形近似する. すなわち,

$$P_x(\theta_0 + \Delta\theta) = P_x(\theta_0) + L_1 \Delta\theta_1 + L_2 \Delta\theta_2 + L_3 \Delta\theta_3$$

$$P_y(\theta_0 + \Delta\theta) = P_y(\theta_0) + M_1 \Delta\theta_1 + M_2 \Delta\theta_2 + M_3 \Delta\theta_3$$

$$P_z(\theta_0 + \Delta\theta) = P_z(\theta_0) + N_1 \Delta\theta_1 + N_2 \Delta\theta_2 + N_3 \Delta\theta_3 \quad (31)$$

ただし, $\theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0)$ とする.

ここに, 微小変位の各係数 L_i, M_i, N_i は, つぎのように定まり, また $(\partial P_x / \partial \theta_i)$ などは(35)式を用いる. θ_{ki} ($k=4, 5, 6; i=1, 2, 3$) については付録にまわす.

$$L_i = P_{xi} + \sum_{k=4}^6 P_{xk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (32)$$

$$M_i = P_{yi} + \sum_{k=4}^6 P_{yk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (33)$$

$$N_i = P_{zi} + \sum_{k=4}^6 P_{zk} \theta_{ki} \quad (i=1, 2, 3) \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{x1} &= -P_y \\ P_{x2} &= -G(d_3, k_2, -a_6 s_6, s_{23} s_4, d_2, 1) s_1 \\ P_{x3} &= P_{x2} + a_2 s_1 c_2 \\ P_{x4} &= -G(d_3, k_5 s_5, a_6 s_6, k_7, 0, 0) \\ P_{x5} &= -G(d_3, k_9, 0, 0, 0, 0) \\ P_{x6} &= G(a_6, \underline{o_x}, 0, 0, 0, 0) \\ P_{y1} &= P_x \\ P_{y2} &= -P_{x2} c_1 / s_1 \\ P_{y3} &= P_{y2} - a_2 c_1 c_2 \\ P_{y4} &= -G(d_3, k_6 s_5, a_6 s_6, s_1 s_4 - c_1 c_{23} c_4, 0, 0) \\ P_{y5} &= G(d_3, \underline{a_y}, 0, 0, 0, 0) \\ P_{y6} &= G(a_6, \underline{o_y}, 0, 0, 0, 0) \\ P_{z1} &= 0 \\ P_{z2} &= -G(d_3, k_4, a_6 s_6, s_4 c_{23}, d_1, 1) \\ P_{z3} &= P_{z2} + a_2 s_2 \\ P_{z4} &= G(d_3, s_4 s_5, -a_6 s_6, c_4, 0, 0) s_{23} \\ P_{z5} &= -G(d_3, k_3, 0, 0, 0, 0) \\ P_{z6} &= G(a_6, \underline{o_z}, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ただし、関数 G はつぎのように定める。各パラメータは付録に記載する。

$$G(a, b, c, d, e, f) = ab + cd + ef \quad (36)$$

以上でマニピュレータの指先位置の基準変数に関する線形化を行った。そこで、(31)式の各計算値と与えられた指先目標値との偏差を 2 乗ノルムで表わし、この値を一つの収束判定基準が満たされるまで更新を続け所要の関節解を導く。目的の評価関数は

$$J = \{P_x(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P_x}\}^2 + \{P_y(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P_y}\}^2 + \{P_z(\theta_0 + \Delta\theta) - \underline{P_z}\}^2 \quad (37)$$

となり、これを展開してつぎのようになる。

$$J = \sum_{i,j=1}^3 R_{ij} \Delta\theta_i \Delta\theta_j - 2 \sum_{i=1}^3 b_i \Delta\theta_i + M \quad (38)$$

ここに、

$$\begin{aligned} M &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad m_1 = P_x(\theta_0) - \underline{P_x}, \\ m_2 &= P_y(\theta_0) - \underline{P_y}, \quad m_3 = P_z(\theta_0) - \underline{P_z}, \end{aligned} \quad (39)$$

$\underline{P_x}$, $\underline{P_y}$, $\underline{P_z}$ は指先の目標位置。

したがって、関数 J を極小にする各関節変数の微小変位は、(38)式の導関数を零にしておくこと $(\partial J / \partial \Delta\theta_i)_0 = 0$ ($i=1, 2, 3$) でつぎの 3 元連立方程式の解として求まる。

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= G(L_1, L_1, M_1, M_1, N_1, N_1) \\ R_{12} &= G(L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2) = R_{21} \\ R_{13} &= G(L_1, L_3, M_1, M_3, N_1, N_3) = R_{31} \\ R_{22} &= G(L_2, L_2, M_2, M_2, N_2, N_2) \\ R_{23} &= G(L_2, L_3, M_2, M_3, N_2, N_3) = R_{32} \\ R_{33} &= G(L_3, L_3, M_3, M_3, N_3, N_3) \\ b_1 &= -G(m_1, L_1, m_2, M_1, m_3, N_1) \\ b_2 &= -G(m_1, L_2, m_2, M_2, m_3, N_2) \\ b_3 &= -G(m_1, L_3, m_2, M_3, m_3, N_3) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

方程式の係数は対称行列を構成し、解はガウス・ザイデル法や掃きだし法などで簡単に求めることができる。このようにして算出された各増分値 $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ により関節角の初期推定値 θ_i^0 が

$$\theta_i = \theta_i^0 + \Delta\theta_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (42)$$

と更新されるとともに、(21), (23), (29)式から残りの関節角が決定する。この時点で、関節解を線形化しない原式(3)に代入してノルムの大きさを再計算する。その大きさが指定された収束半径内にあれば解として採択され、そうでない場合は、(42)式の θ_i を初期値として一連の操作を最初に戻って繰返す。以上が計算手順の概要である。

3. 結果と検討

3.1 数値実験

開発したアルゴリズムの性能を評価する実験を実施した。Fig. 2 は、2 点 A $(-0.10, 0.35, 1.63)$, B $(-0.10, 0.35, 1.83)$ (m) 間を指先方向を一定 ($n_z = \underline{o_x} = \underline{a_y} = 1$) にして移動したときの関節挙動を示す。この場合、 $\theta_1 = 2.0$, $\theta_2 = 1.0$, $\theta_3 = 80.0$ (deg) を初期推定値として出発点 A での関節解が反復回数 1 回で求まった。以後一つ前の時点における収束値を利用して、軌道 AB 間を 40 個に分割した各点での関節解が終端 B まで繰返し 1 回で計算された。ちなみに、計算では指先位置誤差が 0.1 (mm) 以内に到達すれば収束と判定した。また、同一経路を 20 個に分割した場合も各

Fig. 2 Calculated results of articulated variables

点が1回の反復計算で算出できた。

ところで、本法は3変数からなる評価関数を便宜的に線形化して解を導いているため、微小変位に対するモデルの性能や適用限界について把握しておく必要がある。そこで、点Aにおける厳密な関節解を基準として初期値がそこから変動するようすを検討した。実施した計算例によれば、 $\theta_1 = 2.7533$, $\theta_2 = 0.1502$, $\theta_3 = 85.7259$ (deg) (以下これを基準値と呼ぶ) からのずれはおおむね指先の位置と目標値との隔たりが10 cm以内であればただか4回以内で収束を達成した。もちろんこれは安定な挙動を与えた例であって、マニピュレータの任意姿勢に対して与える初期値や評価関数の非線形特性に依存して収束状況は変わりうるであろう。線形理論に基づいた解探索法ではこのように適用範囲がおのずと規定されてしまうので、それを拡大させて利用できれば重宝である。現在のアルゴリズムでも初期変位を大きくとれば当然数値的不安定性を引き発散してしまう。つぎに、解を安定に得るための検討について簡単に触れる。

3.2 収束(安定)解に寄与する補正操作

前述したように、線形領域から逸脱する関節変位についても目標値に接近できないものはいくつかのサンプル・ケースを調べ、解到達への一つの試みを行った。繰返し計算では、最初のステップにおける $\Delta\theta$ の大小が以後の解挙動への鍵を握っているの、この初期段階における相対的大きさある程度抑え、適切に改善・補正することが有力と考えた。結果が示すように、この操作後は $\Delta\theta$ の値が多少大きくても最小化手法が有効に働いて目標値との隔たりをさして障害とせず目標値へむけて急速に収束する傾向が示された。つまり、こうした数値的発散傾向にブレーキをかける操作は、従来の線形近似による解の探索能力を向上させる突破口として意義がある。具体的には、関節変位をつぎのように補正して計算を行った。

- i) 初期変位が300 (mm) 以内の場合 ($i=1, 2, 3$)

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 1.5 \quad (|\Delta\theta_i| > 1(\text{deg}))$$

- ii) それを越える場合 ($i=1, 2, 3$)

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 1.5 \quad (10(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 1(\text{deg}))$$

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 2.0 \quad (30(\text{deg}) > |\Delta\theta_i| > 10(\text{deg}))$$

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_i / 3.0 \quad (|\Delta\theta_i| > 30(\text{deg}))$$

その結果を Fig. 3 にまとめる。初期推定値として図のA, B, Cは、一つの関節値を変動させ他を基準値に固定した三つの計算カテゴリーで、 $\times$, $\bullet$, $\square$ の印で表わす。その上の数値は収束回数を示す。たとえば、点Pは基準値から θ_1 を30 (deg), 点Qは θ_2 を-20 (deg), 点Rは θ_3 を-50 (deg) 変動させたサ

Fig. 3 Convergence characteristics 1

ンプルで、縦軸に示した指先目標値との隔たり D に対して収束解がそれぞれ4, 4, 6回で得られたことを表わしている。補正前に成立した斜線領域に比べどのケースも線形化モデルの制限棒を大きく改善している。 $\square$ 印のプラス方向への変化は90 (deg)の物理的制限に近づくため描いてない。 $\bullet$ 印の-30 (deg)以下も同様である。計算開始時に目標値との隔たりが約350 mm以内であれば、この補正により評価関数の各項を構成する偏差が単調に零に漸近することを示した。それを越えた場合も基準値から単一軸を変動させたものについては、(3.3節で述べる2軸の収束した挙動は例外的としても) 6, 7回で安定収束を達成した。

つぎに、これら個別の変動テストに続いて、各関節を同時に変化させた場合の様相は複雑である。これまでに述べた関節角に対する拘束条件を考慮に入れて実施したテスト計算 (Table 1 参照) では10回以内に安定な解が得られた。本モデルは相当大的な角度変位に対しても十分耐えて、指先での隔たりが400 (mm)以内で正常解が引出された。3.1節に示した軌道計算もこのカテゴリーに入り、第3軸の変動が最初5.7 (deg)であった他は毎回すべて1 (deg)以内で変化するため最後まで問題なく解が引出された。なお、収束した解の精度は厳密解と対比して小数点以下3位まで

Table 1 Convergence characteristics 2

θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	θ_3 (deg)	Number of iterations	Initial deviation (mm)
2.7533	0.1502	85.7259	—	5×10^{-4} ** Reference
12.7533	10.1502	75.7259	4	180.55
22.7533	20.1502	65.7259	4	309.10
22.7533	-19.8498	65.7259	6	342.13
32.7533	-19.8498	75.7259	8	288.78
-7.2467	-9.8498	75.7259	5	244.52
-17.2467	20.1502	65.7259	6	443.31

一致していた。

3.3 解の特異性について

最後に、解の摘出が困難な場合について言及すると、本アルゴリズムを導く過程で陰関数が求まる条件(22), (24), (30)を与えたが、初期値設定や計算途中においてもこの条件を念頭におかないと解が得られないことになる。たとえば、Fig. 2 の計算に用いた姿勢に対して、 $\theta_1=0$ や 90 (deg) の近傍では特異状態となり、また第 2, 第 3 の関節角の和が 90 (deg) で陰関数が成立せず、正常解を与えない。近傍についても発散傾向を示した。Fig. 3 (の右半面) に示した●印は、 θ_2 のわずかな変動に対して第 2, 第 3 の関節角の和が 90 (deg) の近傍に留るために 4, 5, 6 軸の関節角が大きく変化し、結果として指先の隔たりを 700 (mm) 以上に見積もった。この場合、収束解は得られたが、解に到達するまでの過程で顕著な振動現象がみられた。

以上、最小化手法、線形近似、補正操作など一連の取扱いを通して首尾よく解が求められた。現在の限られたテストランからグローバルな性能評価を下すことは難しいが、発散要因となる初期変位の大きさについて直接制御さえすれば正常解に到達できる見通しが示唆された。例示したように、指先目標値と 30~50 cm の隔たりに対して精度 0.1 mm, 反復回数 10 回内で達成できれば十分実用に供すると考えられる。評価関数の最適計算で誘導された関節角の変位を未知の非線形特性を有するマニピュレータの位置・姿勢に適用する場合、自動的に変動幅 $\lambda \Delta \theta (0 < \lambda < 1)$ を改善していく方法が決定できればはなはだ都合である。しかし、この統一的な表現に苦慮することにでもなれば、むしろ最初から(3)式の非線形方程式を直接解くことに努力目標をおいたほうがよいかもしれない。要は簡単な操作で不安定解の回避に重点をおいて実践したことが本報の主目的である。

4. おわりに

マニピュレータの逆運動学に対する実用的な計算手法を提案した。その特徴を要約すると

(1) 6 変数を一挙に取扱う煩雑さを回避するため、独立変数を形式的に三つにへらし偏差 2 乗からなる評価関数と関連づけ、線形最適化手法とカップリングさせた解の誘導手順は、きわめて単純である。

(2) 初期の推定値が線形化の常識を超えた場合でも、 $\Delta \theta$ の補正を行うことで極値探索による手法が効果的に寄与して(反復回数を増加することなく)高精度な解が期待できる。

(3) (2)式の内容は、6 リンク・マニピュレータの特別な関節構造について表現したものでないで、本概念は原理的にあらゆるタイプの 6 リンク・マニピュレータに適用可能である。

(4) ヤコビアン計算に比べ処理が容易であるが、陰関数が成立しない条件は念頭におく必要がある。線形化の宿命である初期値依存性や微小領域での取扱いなどヤコビ手法で経験する類似の問題点を最適化と変位補正により高精度な解に到達できたことは利点であろう。

参 考 文 献

- 1) R.C. Paul: Robot Manipulators-Mathematics, Programming and Control, MIT Press (1981)
- 2) 佐々木 忍: 多項式表現を用いた 6 リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, **23**-5, 485/490 (1987)
- 3) 佐々木 忍: 改良された多項式表現による 6 リンク・マニピュレータの逆問題計算法, 計測自動制御学会論文集, **24**-2, 204/206 (1988)
- 4) 佐々木 忍: 多関節形ロボット・マニピュレータの逆運動学方程式に最小化手法を適用した新しい解法, 計測自動制御学会論文集, **23**-3, 274/280 (1987)
- 5) 佐々木, 篠原: ベクトル幾何学および多項式表現による 6 リンク・マニピュレータの逆問題解法, 計測自動制御学会論文集, **24**-5, 540/542 (1988)
- 6) D. L. Pieper: The Kinematics of Manipulators under Computer Control, AIM 72 (1968)

《付録 微分係数の計算》

(1) 関節変数 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ の微分値

評価関数の最小値を計算するために、 $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ の基準変数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ に関する偏導関数を算出する。

まず、(18)~(20)式の X_1, X_2, X_3 について

$$X_{11} = -(\underline{a}_y c_1 - \underline{a}_x s_1) = -w_1, \quad X_{12} = X_{13} = 0$$

$$X_{21} = -(\underline{a}_y s_1 + \underline{a}_x c_1) c_{23} = X_1 c_{23}$$

$$X_{22} = -(\underline{a}_y c_1 - \underline{a}_x s_1) s_{23} - \underline{a}_x c_{23} \\ = -w_1 s_{23} - \underline{a}_x c_{23} = X_3$$

$$X_{23} = X_2$$

$$X_{31} = (\underline{a}_y s_1 + \underline{a}_x c_1) s_{23} = -X_1 s_{23}$$

$$X_{32} = \underline{a}_x s_{23} - (\underline{a}_y c_1 - \underline{a}_x s_1) c_{23} = -X_2$$

$$X_{33} = X_3 \quad (\text{A. 1})$$

から, θ_4 の微分演算は, (21) 式の両辺の対数をと
上の結果を利用すると簡単である. すなわち,

$$\theta_{41} = -s_4 c_4 \{ (w_1/X_1) + (X_1 c_{23}/X_2) \} \quad (\text{A. 2})$$

$$\theta_{42} = -s_4 c_4 (X_3/X_2) \quad (\text{A. 3})$$

$$\theta_{43} = \theta_{42} \quad (\text{A. 4})$$

(23) 式の θ_5 の微分も同様にして算出する.

$$\theta_{51} = s_5 c_5 \{ -(X_1 s_{23}/X_3) + (w_1/X_1) + (\cot \theta_4) \theta_{41} \} \quad (\text{A. 5})$$

$$\theta_{52} = s_5 c_5 \{ -(X_2/X_3) + (\cot \theta_4) \theta_{42} \} \quad (\text{A. 6})$$

$$\theta_{53} = \theta_{52} \quad (\text{A. 7})$$

最後に, θ_6 についての計算は (29) 式から

$$(1/s_6 c_6) \theta_{6i} = (1/X_4) X_{4i} - (1/X_5) X_{5i}$$

$$\text{ただし, } X_4 = B \underline{n}_x + A \underline{o}_x, \quad X_5 = B \underline{o}_x - A \underline{n}_x \quad (\text{A. 8})$$

を導きつぎのように定まる (A, B は (25), (26) 式

を参照).

$$\theta_{6i} = s_6 c_6 (h_{2i-1} - h_{2i}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{A. 9})$$

以下, 各項の計算値をまとめて記述する.

$$h_1 = (\underline{n}_x B_1 + \underline{o}_x A_1)/X_4, \quad h_2 = (\underline{o}_x B_1 - \underline{n}_x A_1)/X_5$$

$$h_3 = (\underline{n}_x B_2 + \underline{o}_x A_2)/X_4, \quad h_4 = (\underline{o}_x B_2 - \underline{n}_x A_2)/X_5$$

$$h_5 = (\underline{n}_x B_3 + \underline{o}_x A_3)/X_4, \quad h_6 = (\underline{o}_x B_3 - \underline{n}_x A_3)/X_5$$

$$A_1 = (\partial A / \partial \theta_1) = k_8 + k_9 \theta_{51} + k_5 s_5 \theta_{41}$$

$$A_2 = (\partial A / \partial \theta_2) = k_2 s_1 + k_9 \theta_{52} + k_5 s_5 \theta_{42} \quad (\text{A. 10})$$

$$A_3 = (\partial A / \partial \theta_3) = k_2 s_1 + k_9 \theta_{53} + k_5 s_5 \theta_{43}$$

$$B_1 = (\partial B / \partial \theta_1) = -k_6 - k_7 \theta_{41}$$

$$B_2 = (\partial B / \partial \theta_2) = -s_1 s_{23} s_4 - k_7 \theta_{42}$$

$$B_3 = (\partial B / \partial \theta_3) = -s_1 s_{23} s_4 - k_7 \theta_{43}$$

また, 本報で使用したパラメータはつぎのようである.

$$d_1 = (a_3 + a_4) s_{23} + a_2 s_2, \quad d_2 = (a_3 + a_4) c_{23} + a_2 c_2$$

$$d_3 = a_6 c_6 + a_5, \quad k_1 = c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5$$

$$k_2 = c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5 c_4, \quad k_3 = s_{23} c_4 c_5 + s_5 c_{23}$$

$$k_4 = s_{23} c_5 + s_5 c_{23} c_4, \quad k_5 = c_1 c_4 - s_1 s_4 c_{23}$$

$$k_6 = s_1 c_4 + s_4 c_1 c_{23}, \quad k_7 = s_4 c_1 + s_1 c_{23} c_4$$

$$k_8 = k_4 c_1 - s_1 s_4 s_5, \quad k_9 = k_1 s_1 + s_4 c_1 c_5 \quad (\text{A. 11})$$