低 SN 比信号のための反復的 Prony スペクトル推定アルゴリズム[†]

島 村 徹 也*・高 橋 進 一*・日 浦 正 俊**

Iterative Prony Spectral Estimation Algorithm for Low SNR Signals

Tetsuya SHIMAMURA*, Shin-ichi TAKAHASHI* and Masatoshi HIURA**

In this paper we propose a high resolution spectral estimation algorithm for sinusoidal signals corrupted by white noise. This algorithm could estimate the frequencies of measured signals more accurately than IFA⁹⁾ can do, under the low SN ratio.

For Hildebrand's Prony method, the AR spectral estimation procedure is extended. The proposed algorithm employs the extended Prony method iteratively and then designs a prefilter which has parallel structure by the first order filter with complex coefficients. As a result, the SN ratio of measured signals is increased and the estimation accuracy could be improved.

Key Words: Prony method, iterative filtering, low SN ratio

1. はじめに

近接した周波数をもつ正弦波信号が白色雑音中に存在するとき、これらの周波数を正確に推定する問題は、レーダー、ソナー信号処理、地震波解析など多くの分野で考察されている。周知のごとく、自己回帰 (AR) モデルを用いたパラメトリックなスペクトル推定法が Burg¹⁾ により提案され、この問題に対する有力な解決策として広く用いられている²⁾。しかしながら、信号対雑音 (SN) 比が低く、与えられたデータ数が比較的少ない場合には、この方法も多くの問題点を抱えている^{3), 4)}。

Burg 法のこれらの問題点を解決するために、Nutall⁵⁾ と Ulrych ら⁶⁾ は、AR モデル推定アルゴリズムのなかに、Levinson-Durbin 再帰式を含まない、最小 2 乗型の前向き後向き線形予測 (FBLP) 法を提案した。この方法は Burg 法の多くの問題点を解決したのに加え、Marple⁷⁾ による効果的なアルゴリズムの提案により、現代スペクトル解析法の基礎を固めたものと思われる。FBLP 法は、Kumaresan と Tufts⁸⁾ により、極低 SN 比で少ないデータが与えられた場合にも有効なアルゴリズムへと発展された。この Kumaresan・Tufts (KT) 法は、広範囲の SN 比の信号に対して、その周波数推定値が統計的に最適な推定分散を示す Cramer-Rao bound を満足することから、現在多くの研究者が、この方法に注目を集めている¹⁰⁾。

KT 法は、Prony 法^{11), 12)} と密接な関連がある。現代のスペクトル解析においては、Prony スペクトル推定法は Hildebrand¹²⁾ によって拡張された方法を指すことが多い。この Prony 法は、観測信号に雑音加わっているときには劣化した結果を与えることから、現在はスペクトル推定法としてはあまり用いられていないようである。

極端に低 SN 比での信号処理の必要性から、さらに周波数推定精度を SN 比の下方へと発展させる傾向がみられ、その一手法として、Kay は反復的フィルタリングアルゴリズム (IFA) を提案した⁹⁾。このアルゴリズムは、線形演算のみを必要とするにもかかわらず、非線形最適化手法によって得られる最尤推定 (MLE) 法¹⁴⁾ に近い結果を与え、線形演算のみが許されるスペクトル推定アルゴリズムのなかでは、最も低 SN 比の信号にまで適用可能なアルゴリズムであるといわれている。しかし、高 SN 比においては KT 法などには劣り、その修正が必要とされている。

[†] 電子情報通信学会技術研究報告 (回路とシステム研究会) で発表 (1989・3)

* 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

** 日本電気(株) 府中市日新町 1-10

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

** NEC Corporation, Fuchu
(Received October 9, 1989)
(Revised March 12, 1990)

本論文では、Hildebrand の Prony 法を取り上げる。観測信号に雑音を加えられたときの劣化された結果にのみ着目され、現在ほとんど用いられていないこの方法は、雑音が少ない場合には、少ないデータ数からきわめて優れた推定結果を与える可能性をもっている。本論文ではこの点に着目し、観測信号にプレフィルタをかけることにより、その雑音成分を除去したのちに Prony 法を用いる方法を提案する。このプレフィルタは、IFA の考え方に類似して、反復的にスペクトル推定法を用いて、その推定パラメータからフィルタを設計することにより達成される。本論文で提案されるこの反復的 Prony スペクトル推定アルゴリズム (IPSEA) は、従来までの最も低 SN 比、少数データに対処された IFA に比べ、さらにその SN 比の下方まで良好な結果を与える。この事実は、計算機シミュレーションにより実証される。

本論文は、まず次章で従来の Prony 法について記し、その方法の問題点を指摘する。3章では、高精度推定のための AR 推定アルゴリズムの拡張法と提案する IPSEA が示され、4章では、IPSEA が IFA と比較検討される。5章は、提案するアルゴリズムの有効性をシミュレーション実験により実証する。

2. Prony 法

Prony 法は、与えられた離散信号を、指数関数の線形結合として近似する方法で、本来スペクトル推定のために提案されたものではないが、Hildebrand によりその拡張がなされ¹²⁾、現在では、Prony 法といえは Hildebrand の方法を指すことが多い。本章では、まずこの Prony 法について記述し、後にその問題点を明らかにする。

観測された信号が $\{x_n | n=0, 1, \dots, N-1\}$ であるとする。いまこの信号は、周波数 f_m 、初期位相 ϕ_m を有する複素正弦波信号のいくつかの和からなり、さらにそれに分散 σ_w^2 の複素白色雑音 w_n が加えられたものであり、つぎのように表現されるとする。

$$x_n = \sum_{m=1}^p A_m \exp \{j(2\pi f_m n + \phi_m)\} + w_n \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

ここで、 p は複素正弦波の数、 A_m はその振幅値 (複素数値) を表わしている。また、 ϕ_m は $[0, 2\pi)$ の一様確率変数とみなす。 w_n は複素数値 $w_{Rn} + jw_{In}$ で表現され、ここで w_{Rn} 、 w_{In} はそれぞれ独立な白色雑音で、ともに分散 $\sigma_w^2/2$ を有している。Prony 法は、この x_n が与えられた場合に、そのモデルとして離散時間関数

$$x_n^* = \sum_{m=1}^p b_m Z_m^n \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

を仮定する。 x_n^* は x_n の近似値を表わしている。一般に、 b_m 、 Z_m は複素数値であることが仮定され、

$$b_m = A_m \exp(j\theta_m) \quad (3)$$

$$Z_m = \exp(\alpha_m + j2\pi f_m) \quad (4)$$

と表現される (ここでは、サンプリング周波数 1 Hz として正規化している)。(4)式において $\exp(\alpha_m)$ は damping factor と呼ばれ、当問題では 1 と仮定される。所望とする 2 乗誤差

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - x_n^*|^2 \quad (5)$$

を最小とする $\{b_m, Z_m\}$ と p を決定する問題は、非線形最小 2 乗問題に帰着され、一般に、非線形最適化手法を必要とすることになる。Prony 法は、(5)式の準最適解を、線形演算で与える手法であり、二つの連立方程式を解くことから成り立つ。

いま、多項式 $\Psi(Z)$ をつぎのように定義する。

$$\Psi(Z) = \prod_{k=1}^p (Z - Z_k) = \sum_{j=0}^p a_j Z^{p-j} \quad a_0 = 1 \quad (6)$$

ここで、 $\Psi(Z)$ は、(4)式の複素指数関数 Z_m をその解として有する。(2)式に基づいて x_{n-m}^* を表現する方法は

$$x_{n-m}^* = \sum_{m=1}^p b_m Z_m^{n-m} \quad (7)$$

である。ただし $1 \leq n-m \leq N-1$ である。(7)式の両辺に a_m を掛け、過去の $p+1$ サンプルに対して和をとることによって

$$\sum_{m=0}^p a_m x_{n-m}^* = \sum_{L=1}^p b_L \sum_{m=0}^p a_m Z_L^{n-m} \quad p \leq n \leq N-1 \quad (8)$$

となる。(8)式において、 $Z_L^{n-m} = Z_L^{n-p} Z_L^{p-m}$ を考慮するなら

$$\sum_{m=0}^p a_m x_{n-m}^* = \sum_{L=1}^p b_L Z_L^{n-p} \sum_{m=0}^p a_m Z_L^{p-m} = 0 \quad (9)$$

となる。(9)式の右辺の零は、(6)式が多項式 $\Psi(Z_L)$ から明らかである。(9)式はここで

$$x_n^* = - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m}^* \quad p \leq n \leq N-1 \quad (10)$$

を与える。近似誤差を $e_n = x_n - x_n^*$ とし、(10)式に代入することにより、移動平均誤差がつぎのように定義される。

$$e_n = \sum_{m=1}^p a_m e_{n-m} \quad p \leq n \leq N-1 \quad (11)$$

すると

$$x_n = - \sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} + e_n \quad (12)$$

となる。したがって Prony 法は、 $\sum |e_n|^2$ を最小にすることによって得られる最適解を与えるのではなく、 $\sum |\varepsilon_n|^2$ を最小にする準最適解を与えることになる。

一度 Z_m が(6)式の多項式の解として求められたならば、(2)式は未知数 b_m の線形方程式になる。行列表現を用いて

$$\Phi B = X^* \quad (13)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1^{N-1} & Z_2^{N-1} & \dots & Z_p^{N-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]^T \quad (15)$$

$$X^* = [x_0^* \ x_1^* \ \dots \ x_{N-1}^*]^T \quad (16)$$

とすれば、 $\sum |x_n - x_n^*|^2$ の最小 2 乗解は

$$B = [\Phi^H \Phi]^{-1} \Phi^H X \quad (17)$$

となる。ここで (H) は複素共役転置を表わしている。

以上をまとめると Prony 法は、

1. 最小二乗法によるパラメータ a_m の決定
2. a_m からなる多項式の解の計算
3. 得られた Z_m から b_m の計算

の 3 ステップからなる。最終的には、

$$f_m = \tan^{-1} [\text{Im}(Z_m) / \text{Re}(Z_m)] / 2\pi \quad (18)$$

$$\phi_m = \tan^{-1} [\text{Im}(b_m) / \text{Re}(b_m)] \quad (19)$$

として、複素正弦波の周波数と初期位相が得られる。付加的に、

$$A_m = |b_m| \quad (20)$$

$$\alpha_m = \ln(|Z_m|) \quad (21)$$

も得られる。

上述した Prony 法をスペクトル推定法としてみた場合、その周波数推定は、(12)式に帰着される。式(12)から得られる AR 係数 a_m により、その根 Z_m が決定され、(18)式により f_m が得られるためである。しかし、(12)式は、 ε_n が(11)式で表わされるように、もし白色雑音が x_n 中に存在する場合には、 e_n がその雑音に対応するため、 ε_n は一般に有色雑音とみなされる。(12)式の解法は、よく知られる共分散法¹⁵⁾が普通用いられるため、その解は ε_n を白色化する a_m を与える。したがって、 ε_n が無視できないような場合、(12)式から得られる解は満足しうるものではなく、一般に Prony 法は雑音が存在する場合には用いられない。付加雑音の影響は、 b_m に大きく反映されることがよく知られている。この問題を克服するために本論文では、次章で IPSEA を提案する。

3. IPSEA

本章では、本論文で提案する反復的 Prony スペクトル推定アルゴリズム (IPSEA) を記述する。そのア

ルゴリズムの導入の前に、従来の Prony 法の精度を向上させる一手法を述べる。

2章で記したように、Prony 法による周波数推定値は、(12)式によって決定される。与えられたデータ x_n が $n=0, 1, \dots, N-1$ と限定された場合、(12)式の解法は本質的に共分散法に対応しており、与えられたデータ以外の信号は用いず、その推定値を求めるのが普通である。しかし、共分散法は、共分散行列の要素である共分散関数を、 x_n から推定しなければならない。多くのデータ数が用いられた場合、その推定は高精度であることはよく知られているが、データ数が少ないとき、その推定は確信されるものではない。そこで、ここでは、AR 係数 a_m の推定アルゴリズムを共分散法に限定せず、少数データにおいて有効である Burg 法¹⁾を用いることにする。

Burg 法を用いる理由は、また、得られた AR 係数多項式が安定であることが保証されるためである。ここで提案する IPSEA はプレフィルタを必要とするが、この安定性の保証は本手法に不可欠な条件であり、比較的少ない演算量で良好な結果を与える Burg 法が有効と思われる。

つぎに、提案する IPSEA を記す。この方法は、観測信号 x_n に含まれる白色雑音 w_n をプレフィルタを用いて除去することにより、その信号の SN 比を向上させた後に、2章で述べた Prony スペクトル推定法を用いて、複素正弦波の周波数を高精度に推定するものである。

まず、 x_n から Prony 法を用いて Z_m , b_m を決定する。この Z_m , b_m は(2)式に対応しているが、(2)式は、 Z 変換を施すことにより極 Z_m , 留数 b_m を有する伝達関数

$$H(Z) = \sum_{m=1}^p \frac{b_m Z}{Z - Z_m} \quad (22)$$

で表現される。これは、複素係数 1 次フィルタの並列構造である。Prony 法で推定された Z_m , b_m を用いれば、(22)式が直接設計される。その得られたフィルタをプレフィルタとし、 x_n を用いてフィルタリングさせることにより得られた信号を入力信号として、Prony 法を用いて Z_m , b_m を推定する。そして再びプレフィルタを構成する。このアルゴリズムを繰り返すことにより、良好なプレフィルタが構成され、最終的に得られたプレフィルタからの出力信号は、与えられた x_n より SN 比が大幅に改善されることになる。

IPSEA をまとめると以下ようになる。

1. Prony 法による極 Z_m , 留数 b_m の推定
2. プレフィルタ

$$H^{(k)}(Z) = \sum_{m=1}^p \frac{b_m^{(k)} Z}{Z - Z_m^{(k)}} \quad (23)$$

の構成

3. x_n を $H^{(k)}(Z)$ によってフィルタリング

4. 1. に戻る

ここで (k) は反復回数を示している。

IPSEA は, Kay によって提案された IFA に類似している。次章では, IFA と本手法との比較を示す。

4. IPSEA と IFA の比較

IFA⁹⁾は, Kay によって提案された方法で, 3 章で述べた IPSEA と類似している。その相違点は, 構成されるプレフィルタにあり, AR 係数推定手法は両者ともに Burg 法を用い, プレフィルタの反復方法などは同一である。

IFA は, Burg 法から得られる AR 係数 a_m を直接フィルタ係数として

$$H^{(k)}(Z) = \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^p a_m^{(k)} Z^{-m}} \quad (24)$$

を構成する。ここで, $a_m^{(k)}$ は, 反復回数 k での AR 係数推定値を示している。したがって, 多項式 (6) の解の計算, 留数計算式 (17) を必要とする IPSEA は, 1 回の反復における演算量に関しては, IFA に比べ大幅に増加する。しかし, IPSEA は, 少ない反復回数においても良好な結果を与える場合があることが 5 章のシミュレーションで示される。

IFA の (24) 式に対する IPSEA の (23) 式のプレフィルタは, 一見したところ同一の効果を与えるように思われるが, (23) 式には二つの有効性がある。まずその一つは, 与えられたデータ信号が少ない場合に明らかにされる。それは, フィルタリングの初期状態に関連している。

たとえば, $p=2$ の場合, 入力 x_n に対するフィルタ (24) 式の出力 $y_n^{(k)}$ は

$$y_n^{(k)} = a_1^{(k)} y_{n-1}^{(k)} + a_2^{(k)} y_{n-2}^{(k)} + x_n \quad (25)$$

と表わされる。(25)式において, $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ が入力されたとき, $n=0$ 時点では

$$y_0^{(k)} = a_1^{(k)} y_{-1}^{(k)} + a_2^{(k)} y_{-2}^{(k)} + x_0 \quad (26)$$

となり, $y_{-1}^{(k)} = y_{-2}^{(k)} = 0$ として処理されなければならない。したがって, $y_0^{(k)} = x_0$ となり, 本来のフィルタリングがなされていない。この影響は, $x_1, x_2, \dots$ と入力されるにつれて少なくなるが, $N-1$ が比較的小さい場合, $y_n^{(k)}$ は多分に所望とするフィルタ出力ではなくなる。一方, IPSEA においては, 同様に $y_n^{(k)}$ は

$$y_n^{(k)} = Z_1^{(k)} y_{n-1} + b_1^{(k)} x_n \quad (27)$$

$$y_{2n}^{(k)} = Z_2^{(k)} y_{2n-1} + b_2^{(k)} x_n \quad (28)$$

$$y_n^{(k)} = y_{1n}^{(k)} + y_{2n}^{(k)} \quad (29)$$

として求められる。ここで, $y_{1n}^{(k)}, y_{2n}^{(k)}$ はそれぞれ, 並列フィルタからの出力に対応している。(27), (28)式においても $n=0$ 時点における $y_{1n-1} = y_{2n-1} = 0$ の影響は現れるが, (25)式に比較するとその影響は少ない。このフィルタリングによる初期状態の影響は, 次数 p が増加したとき, すなわち, x_n に含まれる複素正弦波の数が多くなるにつれて大きくなる。

プレフィルタの相違点のもう一つは, IPSEA における (23) 式中の留数 b_m にある。IFA においても, (24) 式を部分分数展開し, (23) 式に類似した並列構成をすることが可能であるが, そのようにして得られた留数に比べ, (23) 式の留数 b_m は, 入力観測信号の情報を多く含んでいる。なぜなら, x_n と推定極 Z_m より (17) 式によって b_m は決定されるためである。したがって, (23) 式は結局, 展開すれば, 分母 p 次, 分子 $p-1$ 次の自己回帰移動平均 (ARMA) モデル表現となる。

観測信号に対して AR モデルを当てはめるより, ARMA モデルを当てはめることにより, 正弦波周波数の推定精度が向上しうることについては, いままでいくつかの報告があるが^{16), 17)}, IPSEA と IFA の場合においても, それと類似した傾向がある。Prony 法による ARMA モデリングの優位性は, 特に低 SN 比の信号に対して顕著に現われる。この IPSEA の性質は次章のシミュレーション結果で明示される。

5. シミュレーション

本章では, 本論文で提案する IPSEA を, シミュレーション実験により IFA と比較し, その性質を明らかにする。

(1) 式で表現される信号が, $N=25, P=2, A_1=A_2=1.0, f_1=0.5, f_2=0.52, \phi_1=0.0, \phi_2=\pi/4$ の複素正弦波と, 分散 σ_w^2 の複素白色雑音の和から構成された場合を取り上げる。このデータは, 文献 (8), (9) をはじめとして広く用いられている。SN 比を $10 \log (1/\sigma_w^2)$ と定義し, 分散 σ_w^2 を SN 比が -5 dB から 20 dB の範囲にわたるよう生成した。これらのそれぞれの SN 比において, IPSEA と IFA をそれぞれシミュレートした。ただし, 白色雑音の不規則性のためにその推定値はばらつきをもつので, その平均的な値を算出するため, 同一の SN 比において, それぞれ独立な複素白色雑音を生成し, 40 回の平均をとった。

Fig. 1 は, 反復回数を 15 回とした場合の IFA と

IPSEA の周波数推定の平均 2 乗誤差とその分散特性を表わしている。ただし、縦軸にはそれぞれの逆数の対数値をとってあることに注意されたい。これらの図より、IPSEA は、3 dB 以上の SN 比では IFA に劣るが、それ以下の低 SN 比においては偏差、分散特性とも良好な結果を与えており、CR bound から急激に外れるポイントが 4~5 dB ほど改善されていることがわかる。しかし、高 SN 比においては極端な劣化がみられる。この原因とその改善策については後に記すことにする。

つぎに、 $N=25$, $P=2$, $A_1=A_2=1.0$, $\phi_1=0.0$, $\phi_2=\pi/4$ として、 $(f_1, f_2)=(0.5, 0.52)(0.30, 0.32)$ のそれぞれの場合に、(1)式に基づいてデータを生成した。反復回数を今度は 20 回とした場合の IFA と IPSEA による周波数推定値の平均 2 乗誤差特性の比

(a) Mean square error characteristic

(b) Variance characteristic

Fig. 1 Comparison of IPSEA to IFA - typical example ($(f_1, f_2)=(0.5, 0.52)$, $(\phi_1, \phi_2)=(0.0, \pi/4)$, $N=25$, iteration number =15)

較を **Fig. 2** は示している。Fig. 2 より、低 SN 比条件下での隣接した二つの周波数を同時に推定するという問題に関しては、周波数値にかかわらず、IPSEA は IFA より有効であることがわかる。また、特に Fig. 2(a)を Fig. 1(a)と比較すると、その違いは反復回数の 20 回と 15 回であるので、反復回数を多くすることにより IPSEA の収束に安定性が増すことにも気づく。

Fig. 2(a)と Fig. 1(a)は、観測信号が低 SN 比でかつ少数の場合、IPSEA の収束の安定性を確保するためには多くの反復回数が必要であることを示唆している。これは Prony 法に含まれる留数推定 ((17)式)に主な原因がある。データ数が減少するにつれて留数推定の結果が劣化することは明らかであり、IPSEA では、反復的フィルタリングにこの留数推定値を用いるため、留数の推定精度の劣化が直接 AR モデルの推定に影響されるのである。必然的に、安定した留数推定値を与えるためには多くの反復を必要とすることに

(a) $f_1=0.5$, $f_2=0.52$ (b) $f_1=0.3$, $f_2=0.32$

Fig. 2 Dependency on the frequencies

なる。しかし、最近のプロセッサやアルゴリズムなどの目ざましい発達を考慮すれば、アルゴリズムに費やされる計算量より、低 SN 比信号に対する周波数推定の可能性に着目することが重要であると思われる。

つぎに、前例のなかの $(f_1, f_2) = (0.50, 0.52)$ の場合を取り上げ、初期位相 ϕ_2 を変化させたときの IPSEA と IFA の性質を調べた。Burg 法の初期位相依存性は、先の例と併せて、初期位相が $0.0, \pi/8, \pi/4$ の正数倍のときに顕著に現象が現れることがよく知られているため、ここではこれらの初期位相値を選出した。Fig. 3(a)(b)は $\phi_2 = \pi/8, 0.0$ の場合の結果である。Fig. 3 を Fig. 2(a)と比較することにより、再び IPSEA の低 SN 比信号における優位性（急激に特性が劣化する SN 比の値の低減）が伺える。IFA は初期位相に影響されやすいが、IPSEA は比較的依存しないことがわかる。これは、Prony 法が留数推定を含むことにより、入力信号の初期位相の情報をプレフィルタに伝達することが可能であるためと考

えられる。

最後に、Fig. 4(a)(b)は、Fig. 2(a)と同一のデータを用いた IPSEA の、反復回数 2, 3 回と限定した場合のそれぞれの結果を示している。これらの図は、高 SN 比の場合には、収束値に達する前にその反復を打ち切ることにより、より良い結果が得られることを示している。Fig. 2(a)と Fig. 4 を比較することにより、IPSEA は、高 SN 比では反復回数が少ないほうが、低 SN 比では反復回数が多いほうが良好である傾向があることがわかる。

IPSEA のこの性質はつぎのように説明される。IPSEA は本質的に、IFA に比べフィルタリングの初期零状態の影響を受けないアルゴリズムである。しかし、この性質は高 SN 比の信号に対しては表面に現れない。それは、高 SN 比の信号に対して IPSEA を適用した場合、高 SN 比といえども存在する雑音成分のために、アルゴリズムの初期の反復時において、そ

(a) $f_1=0.5, f_2=0.52, \phi_2=\pi/8$

(b) $f_1=0.5, f_2=0.52, \phi_2=0.0$

Fig. 3 Dependency on the initial phases

(a) $f_1=0.5, f_2=0.52, \text{iteration number}=2$

(b) $f_1=0.5, f_2=0.52, \text{iteration number}=3$

Fig. 4 Mean square error characteristic of IPSEA-dependency on the iteration number

の留数推定値が大きな変動をもち、その変動が直接、AR 係数推定、すなわち周波数推定に影響してしまうためである。Prony 法から作り出される ARMA スペクトル自体が狭帯域性を有するため、フィルタリングが推定値の変動によって不正確になれば、存在する正弦波信号を抽出することに失敗し、最終的に得られる周波数推定値は、大幅な偏差をもってしまうわけである。一方、IFA の場合は、IPSEA より広帯域性を有する全極型のフィルタリングを使用しているため、推定値が変動する、アルゴリズムの初期反復時においても、正弦波信号を抽出することが可能である。したがって、高 SN 比の信号に適用する場合は、IPSEA は IFA より、反復回数を多くすることによって、確からしい推定結果を期待することはできないことになる。しかし、Fig. 4 のように、IPSEA においても、反復回数を少なくすることによって、高 SN 信号に対しても良好な結果を得ることが可能である。

一方、低 SN 比の信号に対して IPSEA を適用した場合は、Prony 法による ARMA スペクトルが十分広帯域のものから反復が始まるため、留数推定値の変動によっても、フィルタリングにより存在する正弦波信号を失うことはない。アルゴリズムが反復されるごとに、フィルタ特性が狭帯域になっていき、最終的には、留数推定値を含んだ ARMA 形のプレフィルタからの出力が、IFA による AR 形のそれよりも SN 比が改善されるために、良好な結果が得られるわけである。ここで注意されたい点は、IPSEA が IFA より反復回数を多く取ることが可能であることである。それは、フィルタリングの初期零状態の影響が、IPSEA は IFA より少ないことに起因している。初期零状態の悪影響は、フィルタリングが繰り返されるにつれて、推定値の偏差となって現れる¹³⁾。したがって、低 SN 比の信号に対して、IPSEA が IFA を大幅に上回る結果を与えるのは、プレフィルタの並列構成による、初期零状態の影響の低減の顕著な現れであろう。なぜなら、低 SN 比の信号に対して、反復的フィルタリング手法を用いた場合は、多くの反復が必要であるからである。観測信号が低 SN 比の場合には、推定される AR モデルからなるプレフィルタ ((23)式) の極は、低 SN 比ほど単位円の中心近くに存在し、SN 比が向上するにつれて単位円に近づいていく⁴⁾。したがって、推定精度を向上させるためには、反復の回数を多くし、信号の SN 比を十分増大させる必要があるわけである。

本章で示した例は、多くの計算機シミュレーションを行った結果のなかで典型的なものである。限定され

た正弦波の周波数に対しての結果のみをここでは示したが、他の種々の周波数値の場合に対してもわれわれは同様の結果を得ている。また、本章で示した例は、すべて Burg 法を AR 推定として用いたが、比較のために、共分散法²⁾、FBLP⁵⁾⁻⁷⁾法をも用いてその推定結果を比較したところ、Burg 法が正弦波信号の周波数推定に最も正確であったこともここに付記しておく。

以上のシミュレーション結果より、少ないデータのみが与えられる条件下で、白色雑音中の二つの正弦波信号の周波数を推定する場合（本例題のように、データ数 $N:1$ /(周波数の差) が $1:2$ 程度の場合）、その観測信号が 0 dB 前後であれば、IPSEA を 20 回前後の反復回数とともに使用することを特に推奨できるといえる。なぜなら、このような条件下における周波数推定は、非線形最適化手法を用いなければ、従来までに達成されなかったためである。5 dB 以上の信号に対しては、KT 法などを用いることにより高精度な推定結果が得られるが、IPSEA を用いても、反復回数を 0~5 回程度とすることにより、KT 法とほぼ同様に CR bound をほぼ満足する結果を得ることができる。しかし、高 SN 比の信号の場合は、反復回数により IPSEA の推定結果が大きく変化してしまうため、その最適な反復回数を決定することが必要とされる。しかし、残念ながら本論文では、その最適反復回数を決定する方法を考案する段階にまでは至っていない。

6. おわりに

本論文では、隣接した周波数をもつ正弦波信号が白色雑音中に存在するとき、これらの周波数を正確に推定する一手法として、反復的 Prony スペクトル推定法を導いた。本手法は、プレフィルタに並列型構成を用いることにより、フィルタリングの初期零状態の影響を低減し、観測信号が有する情報量を最大限に利用しつつ、また、Prony 法の少ないデータ数に対する優位性を積極的に活用した方法である。高 SN 比で比較的少ない反復、低 SN 比で多くの反復を用いることにより、良好な結果を与え、特に極低 SN 比の信号に対しては、線形演算のみを用いる手法のうちで最も低 SN 比の信号にまで対応されてきた IFA よりも有効であることを計算機シミュレーションを通して示した。本手法の理論的な解析や最適反復回数決定法の考案は今後の課題である。

参考文献

- 1) J. P. Burg: Maximum Entropy Spectral Analysis,

- The 37th Annu. Meet. SEQ, Oklahoma City, OK (1967)
- 2) S. M. Kay and L. Marple: Spectral Analysis-a Modern Perspective, Proc. IEEE, **69**-11, 1380/1419 (1981)
 - 3) W. Y. Chen and G. R. Stegen: Experiments with Maximum Entropy Power Spectra of Sinusoids, J. Geophys. Res., **79**-20, 3019/3022 (1974)
 - 4) S. M. Kay: The Effects of Noise on the Autoregressive Spectral Estimator, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, **ASSP**-27-5, 478/485 (1979)
 - 5) A. H. Nuttall: Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques, Naval under-Water System Center (NUSC) Scientific and Engineering Studies, Spectral Estimation, NUSC, New London (1976)
 - 6) T. J. Ulrych and R. W. Clayton: Time Series Modelling and Maximum Entropy, Phys. Earth Planet. Interiors, **12**, 188/200 (1976)
 - 7) L. Marple: A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm, IEEE Trans., **ASSP**-28-4, 441/454 (1980)
 - 8) R. Kumaresan and D. Tufts: Singular Value Decomposition and Improved Frequency Estimation Using Linear Prediction, IEEE Trans., **ASSP**-30-4, 671/675 (1982)
 - 9) S. M. Kay: Accurate Frequency Estimation at Low Signal-to-Noise Ratio, IEEE Trans., **ASSP**-32-3, 540/547 (1984)
 - 10) M. A. Rahman: Total Least Squares Approach for Frequency Estimation Using Linear Prediction, IEEE Trans., **ASSP**-35-10, 1440/1454 (1987)
 - 11) G. R. B. Prony: Essai Experimentale et Analytique, J. Ecole Polytechnique (Paris), 24/76 (1795)
 - 12) F. B. Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis, New York, McGraw-Hill (1956)
 - 13) K. K. Paliwal: Some Comments about the Iterative Filtering Algorithm for Spectral Estimation of Sinusoids, Signal Processing, **10**, 307/310 (1986)
 - 14) G. E. P. Box and G. M. Jenkins: Time Series Analysis Forecasting and Control (Revised Edition), Holden-day, Oakland, California (1976)
 - 15) J. D. Markel and A. H. Gray: Linear Prediction of Speech, Springer-Verlag, Berlin (1978)
 - 16) J. A. Cadzow: ARMA Time Series Modeling: an Effective Method, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, **AES**-19-1, 49/53 (1983)
 - 17) J. A. Cadzow, B. Baseghi and T. Hsu: Singular-Value Decomposition Approach to Time Series Modelling, Proc. IEE, **130**-F, 202/210 (1983)
-