1 入出力むだ時間系に関する Bezout 方程式の一解法†

陶 山 貢 市*・玄 英 澤*・北 森 俊 行*

An Algorithm for Solving the Bezout Equation for Scalar Systems with Commensurate Time-Delays

Koichi SUYAMA*, Young Taek HYUN* and Toshiyuki KITAMORI*

This paper presents a new algorithm for solving the Bezout equation for scalar systems with commensurate time-delays. The solution is obtained over polynomials with a coefficient ring of finite Laplace transforms.

Key Words: time-delay system, Bezout equation, finite Laplace transform

1. はじめに

1 入出力むだ時間系では、伝達関数の分母・分子多項式はラプラス演算子 s と時間遅れ作用素 z の 2 変数多項式である。それらの多項式に関する Bezout 方程式の解をもとにして、有限極配置などの制御系設計ができる¹⁾。係数に有限ラプラス変換を含む多項式のクラスでその解を求める解法は文献 1), 2) が与えている。しかし、これらの解法は多くの計算を必要とする場合があり、実用上の問題点を有している。

本論文では、 z の 1 変数多項式上の Bezout 方程式に帰着させて解くという、新しい解法を与える。本解法は文献 1) の解法と比較して計算が簡単である。また、文献 2) の解法と比較しても、上述の問題点の一つの解決法として有効である。

本論文では、 $\mathbf{R}$: 実数体, $\mathbf{C}$: 複素数体, $\mathbf{R}[z]$: $\mathbf{R}$ の元を係数とする z の多項式環, $\mathbf{R}[s, z]$: $\mathbf{R}$ の元を係数とする s と z の 2 変数多項式環, などの記号を用いる。

2. 問題設定

2.1 本論文で用いる有限ラプラス変換のクラス

議論の対象とする系がもつむだ時間 L に対して

$$\Theta_0 = \{a, \theta_a, \theta_b + \theta_s, j(\theta_b - \theta_s) \mid a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{C}\} \quad (1)$$

$$\theta_b = \frac{1 - \exp[-(s-b)L]}{s-b} = \frac{1 - \exp(bL)z}{s-b} \quad (2)$$

$$z = \exp(-Ls) \quad (3)$$

と定義する。 j は虚数単位, $-$ は複素共役である。また z は形式的な時間遅れ作用素である。 Θ_0 の任意の有限個の要素の和と積によって構成される有限ラプラス変換の環を Θ とする。たとえば, $j(\theta_b - \theta_s)$ ($b = \sigma + j\omega$; $\sigma, \omega \in \mathbf{R}$) は入力 $u(t)$ に対しつぎのような出力 $y(t)$ を出す要素として実現できる。

$$y(t) = \int_0^L 2 \exp(\sigma\tau) \sin \omega\tau \cdot u(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

2.2 問題設定

伝達関数が

$$w(s, z) = \frac{b(s, z)}{a(s, z)}, \quad a(s, z), b(s, z) \in \mathbf{R}[s, z] \quad (5)$$

$$\deg_s a(s, z) = n, \deg_s b(s, z) < n$$

与えられるスペクトル可制御かつスペクトル可観測な 1 入出力系を考える。 $\deg_s(\cdot)$ は s に関する次数を表わす。文献 3) よりつぎの①, ②が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad a(s, z)q_0(s, z) + b(s, z)p_0(s, z) = \beta(s) \quad (6)$$

$$a(s, z)q'_0(s, z) + b(s, z)p'_0(s, z) = \alpha(z) \quad (7)$$

となる ($p_0(s, z), q_0(s, z), (p'_0(s, z), q'_0(s, z)) \in (\mathbf{R}[s, z])^2$, $\beta(s) \in \mathbf{R}[s], \alpha(z) \in \mathbf{R}[z]$ が存在する。□

② もし $\beta(s) = 0$ と $\alpha(z) = 0$ の零点のうち $z_i = \exp(-Ls_i)$ なる組 $(s_i, z_i) \in \mathbf{C}^2$ が存在した場合

$$[a(s_i, z_i) \ b(s_i, z_i)]^T \neq 0 \quad (8) \quad \square$$

伝達関数 (5) に対して, (6), (7) 式は $[a(s, z) \ b(s, z)]$ をそれぞれ z, s に関してはきだすことで容易に得られる。また (6) 式で一般性を失うことなく

$$\beta(s) = \prod_{k=1}^N (s - s_k)^{d_k} \quad (9)$$

と表わす。本論文では (6), (7) 式をもとに Bezout 方程式

$$a(s, z)q + b(s, z)p = 1 \quad (10)$$

を満たす $(p, q) \in (\Theta[s, z])^2$ を求める。

この Bezout 方程式 (10) の解 (p, q) をもとに, 系 (5) に対してたとえば以下のような制御系設計ができる。

(A) 系 (5) が遅れ型むだ時間系である場合: 一般

† 第 28 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (1989・7)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received January 8, 1990)

(Revised February 28, 1990)

性を失わず, $a(s, z)$ は s に関してモニックである. このとき, 任意に指定した $2n$ 次のモニックな $\mathbf{R}[z]$ の特性関数をもつ出力フィードバック制御系が設計できる¹⁾. つまり有限極配置の設計ができる.

(B) 系(5)が中立型むだ時間系である場合:

$$a(s, z) = a_n(z)s^n + \dots + a_0(z), \quad a_i(z) \in \mathbf{R}[z] \quad (11)$$

で, $a_n(z) (\in \mathbf{R})$ が安定多項式である場合を考える. このとき, (A)の場合に関する文献1)の手法と同様にして, $1/a_n(z)$ というダイナミクスをもつ安定な出力フィードバック制御系を設計することができる.

3. Bezout 方程式の解法

3.1 z の 1 変数多項式上の Bezout 方程式への帰着

(6), (7)式において $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組が存在しない場合を考える.

$$\tilde{\beta}(z) = \prod_{k=1}^N [1 - \exp(Ls_k)z]^{d_k} \in \mathbf{R}[z] \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{\tilde{\beta}(z)}{\beta(s)} = \prod_{k=1}^N (\theta_{s_k})^{d_k} \in \Theta \quad (13)$$

とおく. ここで s_k ($k=1, \dots, N$) は $\beta(s)$ の d_k 位の零点である. この γ を(6)式の両辺にかけると

$$a(s, z)\gamma q_0(s, z) + b(s, z)\gamma p_0(s, z) = \tilde{\beta}(z) \quad (14)$$

となる. ここで $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組が存在しないという仮定から, $\alpha(z)$ と $\tilde{\beta}(z)$ は $\mathbf{R}[z]$ 上で既約である. したがって,

$$\alpha(z)v_1(z) + \tilde{\beta}(z)v_2(z) = 1 \quad (15)$$

を満たす $(v_1(z), v_2(z)) \in (\mathbf{R}[z])^2$ が存在する. これを用いて(7)式 $\times v_1(z)$ + (14)式 $\times v_2(z)$ を考え, つぎのようにする.

$$p = p'_0(s, z)v_1(z) + \gamma p_0(s, z)v_2(z) \quad (16)$$

$$q = q'_0(s, z)v_1(z) + \gamma q_0(s, z)v_2(z) \quad (17)$$

この $(p, q) \in (\Theta[s, z])^2$ は Bezout 方程式(10)の解である.

Bezout 方程式(10)を容易に解ける $\mathbf{R}[z]$ 上の Bezout 方程式(15)に帰着できた. 以下にまとめておく.

[アルゴリズム 1]

1) (12)式の $\tilde{\beta}(z)$ と(13)式の γ を計算する.

2) $\mathbf{R}[z]$ 上の Bezout 方程式(15)の解 $(v_1(z), v_2(z))$ を求める.

3) (16), (17)式により (p, q) を計算する. $\square$

3.2 $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組に対する考慮

(6), (7)式において $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組²⁾ (s_i, z_i) ($i=1, \dots, M$; $M \leq N$) が存在すれば, (7)式の $\alpha(z)$ と(12)式の $\tilde{\beta}(z)$ は z_i を共通零点としてもち, $\mathbf{R}[z]$ 上で既約ではない. し

たがって, 前節の議論をそのまま用いることはできない.

そこで, $\beta(s)$ をつぎのように二つの部分に分ける.

$$\beta(s) = \beta'(s)\hat{\beta}(s), \quad \beta'(s), \hat{\beta}(s) \in \mathbf{R}[s]: \text{モニック} \quad (18)$$

$$\beta'(s) = \prod_{i=1}^M (s - s_i)^{d_i} \quad (19)$$

$z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組を構成する s_i ($i=1, \dots, M$) に対して, $\beta'(s)$ はそれらを零点にもつ部分である. そして, (6)式の $(p_0(s, z), q_0(s, z))$ から

$$a(s, z)\hat{q} + b(s, z)\hat{p} = \hat{\beta}(s) \quad (20)$$

を満たす $(\hat{p}, \hat{q}) \in (\Theta[s, z])^2$ を求める. この(20)式右辺の $\hat{\beta}(s)$ と(7)式右辺の $\alpha(z)$ に関しては $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす零点の組が存在しない. したがって, (20)式と(7)式に関して前節の議論が適用でき, アルゴリズム 1 を用いることができる.

$(p_0(s, z), q_0(s, z))$ から $(\hat{p}, \hat{q})$ を求める手法は文献1)より得られる. ここでは以下にアルゴリズムだけを示す.

[アルゴリズム 2]

$$a(s, z)q_1(s, z) + b(s, z)p_1(s, z) = \beta(s) \quad (21)$$

かつ, $s = s_i$ ($i=1, \dots, M$) において

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m \partial z^n} p_1(s_i, z_i) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m \partial z^n} q_1(s_i, z_i) = 0 \quad (22)$$

$$z_i = \exp(-Ls_i)$$

$$(m, n): m, n=0, 1, \dots, d_i-1 \text{ かつ } m+n \leq d_i-1$$

となる $(p_1(s, z), q_1(s, z)) \in (\mathbf{R}[s, z])^2$ を以下の 1)~3)の手順により求める.

$$1) \quad p_1(s, z) = p_0(s, z) - r(s, z)\alpha(s, z) \quad (23)$$

$$q_1(s, z) = q_0(s, z) + r(s, z)b(s, z) \quad (24)$$

として, 条件(22)を $(s, z) = (s_i, z_i)$ における $r(s, z)$ に対する補間条件に直す.

2) 1)の補間条件を満たす $r(s, z) \in \mathbf{R}[s, z]$ を求める.

3) (23), (24)式の $p_1(s, z)$, $q_1(s, z)$ を計算する. つぎに, $p_1(s, z)/\beta'(s)$ を以下の 4)~6)のようにして $\Theta[s, z]$ のクラスで構成し, $\hat{p}$ とする.

4) $p_1(s, z)/\beta'(s)$ を真にプロパーな部分 $\eta(s, z)/\beta'(s)$ とそれ以外の部分 $\xi(s, z)$ とに分ける.

5) $\eta(s, z)/\beta'(s)$ を部分分数展開して, 各項を $\Theta[z]$ のクラスで構成する.

6) 5)に $\xi(s, z)$ を加えて, $\hat{p}$ とする.

同様に, $q_1(s, z)/\beta'(s)$ から $\hat{q}$ を構成する. $\square$

3.3 考 察

文献2)では(7)式を用い, 状態空間上の実現を考え

た議論をもとにして、Bezout 方程式 (10) の解を求めている。一方、文献 1) の解法は (6) 式を用いる。(18) 式で $\beta'(s) = \beta(s)$, $\hat{\beta}(s) = 1$ とし、 $\beta(s)$ のすべての零点についてアルゴリズム 2 の操作を行う。得られる $(\hat{p}, \hat{q})$ がそのまま Bezout 方程式 (10) の解 (p, q) となる。どちらの解法も、はきだしたときに右辺に残る多項式 $(\alpha(z)$ あるいは $\beta(s))$ の次数が高い場合に多くの計算を必要とする。

本論文で与えた解法は (6), (7) 式の両方を用い、Bezout 方程式 (10) を容易に解ける $\mathbf{R}[z]$ 上の Bezout 方程式 (15) に帰着させる。その際、 $\beta(s)$ の零点のうち $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組を構成するものだけに対してアルゴリズム 2 を用いる。したがって、文献 1) の解法と比較して、アルゴリズム 2 の複雑な計算を軽減できる。また、本解法では $\alpha(z)$ の次数は計算に直接関係しないため、文献 2) の解法と比較して、 $\alpha(z)$ の次数が高い場合、あるいは $z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組が存在しない場合 (次章の数値例 1 参照) には有効である。

4. 数 値 例

[数値例 1] (文献 2) の例)

$$a(s, z) = s^2 - z, \quad b(s, z) = zs, \quad z = \exp(-Ls)$$

はきだした式

$$p_0(s, z) = 1, \quad q_0(s, z) = s, \quad \beta(s) = s^3 \rightarrow s_1 = 0 \quad (d_1 = 3)$$

$$p'_0(s, z) = -z, \quad q'_0(s, z) = s, \quad \alpha(z) = z^2 \rightarrow z_1 = 0$$

$z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組は存在しない。アルゴリズム 1 を直接用いる。

- 1) $\tilde{\beta}(z) = (1-z)^3, \quad \gamma = (\theta_0)^3$
- 2) $v_1(z) = 3z^2 - 8z + 6, \quad v_2(z) = 3z + 1$
- 3) $p = (3z^2 - 8z + 6) \cdot s + (\theta_0)^3 \cdot 1 \cdot (3z + 1)$
 $q = (3z^2 - 8z + 6) \cdot (-z) + (\theta_0)^3 \cdot s \cdot (3z + 1)$

[数値例 2]

$$a(s, z) = s^2 + (z+3)s + z(z+2), \quad b(s, z) = s + z,$$

$$z = \exp(-Ls)$$

はきだした式

$$p_0(s, z) = -(z+2), \quad q_0(s, z) = 1, \quad \beta(s) = s(s+1)$$

$$\rightarrow s_1 = 0 (d_1 = 1), \quad s_2 = -1 (d_2 = 1)$$

$$p'_0(s, z) = -(s+3), \quad q'_0(s, z) = 1, \quad \alpha(z) = z(z-1)$$

$$\rightarrow z_1 = 1, \quad z_2 = 0$$

$z_i = \exp(-Ls_i)$ を満たす $\beta(s)$, $\alpha(z)$ の零点の組は $(s_1, z_1) = (0, 1)$ だけである。したがって、まず

$$\beta'(s) = s, \quad \hat{\beta}(s) = s + 1$$

として、アルゴリズム 2 を用いる。

- 1) $r(0, 1) = 1$
- 2) $r(s, z) = 1$
- 3) $p_1(s, z) = s^2 + (z+3)s + (z-1)(z+2),$
 $q_1(s, z) = -s - z + 1$

$\hat{p}$ に関して

$$4) \quad \xi(s, z) = s + (z+3), \quad \eta(s, z) = (z-1)(z+2)$$

$$5) \quad \frac{\eta(s, z)}{\beta'(s)} = -\frac{1-z}{s}(z+2) = -\theta_0(z+2)$$

$$6) \quad \hat{p} = s + (z+3) - \theta_0(z+2)$$

$\hat{q}$ に関して

$$4) \quad \xi(s, z) = -1, \quad \eta(s, z) = -z + 1$$

$$5) \quad \frac{\eta(s, z)}{\beta'(s)} = \frac{1-z}{s} = \theta_0$$

$$6) \quad \hat{q} = -1 + \theta_0$$

さらに、アルゴリズム 1 を用いる。

- 1) $\tilde{\beta}(z) = 1 - \exp(-L) \cdot z, \quad \gamma = \theta_{-1}$
- 2) $v_1(z) = \frac{1}{\exp L(\exp L - 1)}, \quad v_2(z) = \frac{1}{\exp L - 1} z + 1$
- 3) $p = -(s+3) \cdot \frac{1}{\exp L(\exp L - 1)} + \theta_{-1}[s + (z+3) - \theta_0(z+2)] \cdot \left[\frac{1}{\exp L - 1} z + 1 \right]$
 $q = 1 \cdot \frac{1}{\exp L(\exp L - 1)} + \theta_{-1}(-1 + \theta_0) \cdot \left[\frac{1}{\exp L - 1} z + 1 \right]$

5. お わ り に

1 入出力むだ時間系の伝達関数の分母・分子多項式に対する Bezout 方程式の新しい解法を与えた。

本解法は多項式行列の Bezout 方程式の解法へ拡張することができる。多入出力むだ時間系に対する制御系設計法とあわせ、稿を改めて報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) 陶山, 玄, 北森: 入出力関係に基づく 1 入出力むだ時間系の有限極配置, 計測自動制御学会論文集, **25-9**, 990/996 (1989)
- 2) E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannenbaum: Proper Stable Bezout Factorizations and Feedback Control of Linear Time-Delay Systems, Int. J. Control, **43-3**, 837/857 (1986)
- 3) 玄, 新, 大久保: 2-D 既約分解表現に基づいたむだ時間系における可制御・可観測性の必要十分条件, 計測自動制御学会論文集, **23-5**, 535/537 (1987)