可変係数付き幾何計画問題に対する近似最適化法[†]

吉 田 要*

An Approximate Optimization Method of Geometric Programming Problem with Variant Coefficients

Kaname YOSHIDA*

We often encounter the optimization problems with variant coefficients or the problems whose structure are same as each other but different only coefficients, and are usually required to solve them quickly. In the present paper we deal with the geometric programming problems with variant coefficients. In geometric programming, if the degree of difficulty of the given problem is 0, the dual problem to the given problem has only one feasible solution i.e. optimal solution excluding coefficients which can be easily obtained by solving a simultaneous linear equation.

So we try to apply the approximate decomposition method for the given problem and decompose it into a set of 0 degree of difficulty subproblems. A equation, whose solution is the approximate optimum of the given problem, can be derived from the optimums of the subproblems. The equation is constructed with the variant coefficients, therefore we can use the equation to obtain an approximate optimum by substituting any values into the coefficients.

Moreover we can easily and quickly solve the equation. At last we check our method to apply some numerical examples and show the usefulness of this method.

Key Words: variant coefficients, approximate optimization, decomposition, geometric programming

1. はじめに

一般的なシステム最適化問題では、問題に含まれる係数だけが異なり、しかもその係数の値を前もって知ることができない問題が少なくない。たとえば、状況

が刻々と変わり、それに対応して制約関数や評価関数の係数が変化し、本質的には同じ構造の問題を定期的に解かねばならない場合がある。このような問題に対して、通常は特定の時刻を定めてその時刻における係数で扱うことが多い。しかし、係数が時間に対してどのように表現されるかわからないようなときには前もって解くことができない。時間とともに変化しない場合でも、係数だけが異なった問題をたくさん解かねばならない場合もある。しかも、このような問題に対して、最適値あるいは最適解の決定が短時間でなされねばならないようなことが少なくない。

係数のみ変化するような構造の同じような問題に対しては、専門家のカンに相当するような、簡単な数式が誘導でき、しかもかなりよい近似解が得られるならば実用性が高いと思われる。

ところで、問題の構造によっては、係数の変化に対して容易に解の変化が推定できるものがある。たとえば、係数によって変化する最適値あるいは最適解が係数の陽関数として表現できる場合である。しかし、そのようなケースは大変希で通常は係数が変化すると共に最適化問題を解き直すことが必要となる。それに対して、厳密には係数に関する最適解あるいは最適値は求められないが簡単な計算によって最適値あるいは最適解の近似が得られれば、実用上は問題がない場合も少なくないであろう。必要なら、その近似解を初期解として真の最適解を求めることもできる。このような扱い方は対象とする問題によって異なるが、本論文では幾何計画問題について扱ってみる。幾何計画問題では変数とその指数からなる関数に含まれる項は構造に相当すると思われ、項の形は対象とする問題の構造によって固有に定まってくる。一方、項についている係数は対象とする問題の特定のケースを表現していると考えられる。本論文では、近似最適化法を適用することによって時変な係数と最適解とを近似的に分離して

* 立命館大学経営学部 京都市北区等寺院北町 56-1

* Faculty of Business Administration, Ritsumeikan University, Kyoto

(Received December 7, 1989)

(Revised March 16, 1990)

扱うことを検討する。近似最適化法では最適値の下からの近似値が与えられるが、その際、近似分解において導入される結合係数の決定法については十分な検討がなされておらず、従来までは結合係数は適当に決められていた²⁾⁻⁵⁾。本論文では、最適な近似最適値が得られるような結合係数を決定し、簡単な計算によって係数ごとの近似最適値が得られる方程式を誘導する。具体的には、すべての係数を1とした基本問題（ベース問題）について、解を求めておいて、係数の影響を考慮するもので、近似最適値は係数に対して陽関数の形で表現する。それゆえ、任意の係数に対して近似最適値は簡単に求めることができる。また、近似最適解が真の解に対してどの程度近いかを判定する簡単な計算法を示す。

2. 幾何計画問題の近似最適化法

以下の記号を定めておく。

2.1 記号の定義

主問題変数ベクトル $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$

i 番目の制約関数の j 番目の項について

正係数（可変） C_{ij}

指数ベクトル $\mathbf{a}_{ij}=(a_{ij1}, \dots, a_{ijn})^T$

項の関数 $G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X})=C_{ij} \prod_{k=1}^n X_k^{a_{ijk}}$

i 番目の制約関数に含まれる項の数 $\phi(i)$

i 番目の制約関数 $G_i(\mathbf{C}, \mathbf{X})=\sum_{j=1}^{\phi(i)} G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X})$

目的関数は $i=0$ のときと考える。

各関数で係数 $\mathbf{C}$ をすべて1とした場合、簡単のために

$$G_0(1, \mathbf{X})=G_0(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{\phi(0)} G_{0j}(1, \mathbf{X})$$

$$G_i(1, \mathbf{X})=G_i(\mathbf{X})=\sum_{j=1}^{\phi(i)} G_{ij}(1, \mathbf{X})$$

と書くことがある。制約関数の個数を p とする。

$$q=\sum_{i=0}^p \phi(i): \text{主問題に含まれる項の総数}$$

双対問題変数ベクトル

$$\delta=(\delta_{01}, \dots, \delta_{0\phi(0)}, \dots, \delta_{p\phi(p)}) \in R^q$$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \dots, \mathbf{a}_{p\phi(p)}] \in R^{n \times q}: \text{指数行列}$$

制約関数の添え字集合 $P=\{1, \dots, p\}$

i 番目の制約関数に含まれる項の添え字集合

$$L(i)=\{1, 2, 3, \dots, \phi(i)\}$$

集合 S に対して、 S に含まれる要素の数を ΔS で表わす。また、 i 番目の制約関数の j 番目の項までの項数を求める関数として、つぎのような添え字関数 I を定

めておく。 $\phi(-1)=0, j=1, \dots, \phi(i)$ として、

$$I(i, j)=\sum_{t=0}^i \phi(t-1)+j$$

とする。所属関数

$$\rho(p, S)=\begin{cases} 1 & p \in S \quad S \text{ は添え字集合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$\phi(p, S) \cdot f = \begin{cases} f & p \in S \quad \text{ただし } f \neq 0 \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

2.2 幾何計画問題

幾何計画問題は以下のような多項式の評価関数および制約関数をもつ関数である。

【主問題】 (primal problem)

$$\min_{x>0} G_0(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{\phi(0)} G_{0j}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \quad (1)$$

$$\text{sub to } G_i(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{\phi(i)} G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \quad (2)$$

$$i \in P = \{1, 2, \dots, p\}$$

このような問題に対して、つぎのような双対問題が導かれている。実際には扱いやすさの点から双対問題が解かれることが多い。

【双対問題】 (dual problem)

$$\max_{\delta>0} V(\delta) = \prod_{i=0}^p \left\{ \prod_{j=1}^{\phi(i)} \left(\frac{C_{ij} \lambda_i}{\delta_{ij}} \right)^{\delta_{ij}} \right\} \quad (3)$$

$$\text{sub to } A\delta=0 \quad \text{直交条件} \quad (4)$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{\phi(0)} \delta_{0i} = 1 \quad \text{正規化条件} \quad (5)$$

ここで、 i 番目の制約式に含まれる項に対応する双対変数の和を λ_i とする。すなわち、

$$\lambda_i(\delta) = \sum_{j=1}^{\phi(i)} \delta_{ij}, \quad i \in P \quad (6)$$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \dots, \mathbf{a}_{p\phi(p)}] \in R^{n \times q}: \text{指数行列} \quad (7)$$

主問題と双対問題の最適解の間にはつぎのような関係が成り立つ。

$$G_{0j}(\mathbf{X}^*) = \delta_{0j}^* V(\delta^*) \quad j=1, \dots, \phi(0) \quad (8)$$

$$G_{ij}(\mathbf{X}^*) = \delta_{ij}^* / \lambda_i(\delta^*) \quad i=1, \dots, p, j=1, \dots, \phi(i) \quad (9)$$

幾何計画問題を解く場合の計算量をはかるものとして、難度 (degree of difficulty) がある。難度は双対問題の許容解が含まれる空間の次元数に相当しており、

$$dd = \text{項の総数} - (\text{変数の次元数} + 1) = q - (n+1) \quad (10)$$

と表わせる。たまたま難度が0の問題においては、双対問題の許容解はただ一つとなり、連立1次方程式を解くだけで解を得ることができる。

2.3 近似解法

指数行列 $\mathbf{A}$ の適当な $n+1$ 個の列ベクトルの組で、

その凸包が 0 ベクトルを内点として含むとき**単体ベクトル集合**と呼ぶことにする。このような単体ベクトル集合の和が行列 A のすべての列ベクトルを含むとき、問題は **0 難度問題**で近似されたということにする。適当な単体ベクトル集合の組で指数行列をカバーするときそれらの単体ベクトル集合の組は主問題を **0 難度分解する組集合**と呼ぶ。上のような操作で 0 難度分解する組集合を選ぶ方法を**単体分解法**と呼ぶことにする。

単体ベクトル集合を指数行列とする幾何計画問題の作成法について概略を説明しておく。

[近似分解例]

主問題

$$\begin{aligned} \min_{X>0} \quad & G_{01}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{02}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \\ \text{sub to} \quad & G_1(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{11}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_2(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{21}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{22}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_3(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{31}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \\ & \quad + G_{33}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_4(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{41}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_5(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{51}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \end{aligned}$$

ここで、 $G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ の指数ベクトル $\mathbf{a}_{ij}$ とすると、指数行列 A は

$$A = [\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{31}, \mathbf{a}_{32}, \mathbf{a}_{33}, \mathbf{a}_{41}, \mathbf{a}_{51}]$$

となる。ここで、単体分解法によって、単体ベクトル集合を求めた結果、

単体ベクトル集合

$$1 = \{\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{31}, \mathbf{a}_{32}, \mathbf{a}_{41}, \mathbf{a}_{51}\}$$

単体ベクトル集合

$$2 = \{\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{32}, \mathbf{a}_{33}, \mathbf{a}_{41}, \mathbf{a}_{51}\}$$

となったとしよう。このとき、 $G_1(\mathbf{C}, \mathbf{X})$, $G_4(\mathbf{C}, \mathbf{X})$, $G_5(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ は共通に含んでおり、 $G_2(\mathbf{C}, \mathbf{X})$, $G_3(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ は分解されて含まれている。ただし、 $G_3(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ の $\mathbf{a}_{32}$ は共有している。

分解係数 α , β , r をつぎのように導入する。まず、 $G_2(\mathbf{C}, \mathbf{X})$, $G_3(\mathbf{C}, \mathbf{X})$ を単一の制約式に書き改めるために r を導入して凸結合をつくる。

$$\gamma_1 G_2(\mathbf{X}) + \gamma_2 G_3(\mathbf{X}) \leq 1$$

なる制約式を構成する。ここで、 γ_i は正で正規化されているとする。ついで、分解された制約式で複数の単体ベクトル集合に含まれている指数ベクトルに対応する項に対して、重複している数だけ β を導入して和の形式に表す。指数ベクトルが 2 個の単体ベクトル集合に含まれているので、

$$G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \beta_1 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \beta_2 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X})$$

として右辺で置き換える。

このような操作を制約関数に対して行った結果得ら

れる制約関数に対して α を導入して単体ベクトル集合に対応するように制約関数を分解する。

$$\begin{aligned} & \gamma_1 (G_{21}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{22}(\mathbf{C}, \mathbf{X})) + \gamma_2 (G_{31}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \\ & \quad + \beta_1 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \beta_2 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{33}(\mathbf{C}, \mathbf{X})) \\ & \leq 1 \end{aligned}$$

であり、2 個の単体ベクトル集合に分解され指数ベクトルに対応する項が G_{21} , G_{31} , G_{32} と G_{22} , G_{32} , G_{51} であれば、おのおのの単体ベクトル集合に対して、つぎのような制約式が導入される。

$$\gamma_1 G_{21}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 G_{31}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 \beta_1 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq \alpha_1$$

$$\gamma_1 G_{22}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 \beta_2 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 G_{33}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq \alpha_2$$

α も正で正規化条件を満たすようにしている。

以上から、得られた結果は

近似分解問題 1

$$\begin{aligned} \min_{X>0} \quad & G_{01}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{02}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \\ \text{sub to} \quad & G_1(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{11}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_4(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{41}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_5(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{51}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & \gamma_1 G_{21}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 G_{31}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 \beta_1 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq \alpha_1 \end{aligned}$$

近似分解問題 2

$$\begin{aligned} \min_{X>0} \quad & G_{01}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{02}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \\ \text{sub to} \quad & G_1(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{11}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + G_{12}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_4(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{41}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & G_5(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = G_{51}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \\ & \gamma_1 G_{22}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 \beta_2 G_{32}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) + \gamma_2 G_{33}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq \alpha_2 \end{aligned}$$

以上、 r は分解に対応する制約関数の統合に用い、 β は複数の問題に含まれる項の分解、 α は統合関数の分解に用いるための係数で全体を分解係数と呼ぶ。

3. 可変あるいは未定係数を含む最適化問題

係数が可変あるいはあらかじめ知ることのできないような問題に対して、変化する可能性のある係数を陽に含んだ最適解あるいは最適値が決定できれば大変都合がよい。しかし、一般にはそのような形で得られる問題はほとんどないといってよい。また、対象とする問題の形によっても、処理の仕方は大きく異なってくる。本論文では、幾何計画問題に対して、可変あるいは未定な係数を含む最適化問題を近似的に扱ってみる。一般的には係数の変化とともに最適値も変化するわけであるが、最適値でなくともよい近似値が係数の関数として表現できれば、実用上は十分であろう。

まず、難度が 0 の場合について扱うことにする。

3.1 難度 0 の場合

係数 $\mathbf{C}$ が可変である幾何計画問題を考える。

$$[P] \quad \min_{X>0} G_0(\mathbf{C}, \mathbf{X})$$

$$\text{sub to } G_i(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1 \quad i=1, \dots, p$$

一般的には、この最適解および最適値は $\mathbf{C}$ の関数となつて、 $X^*(\mathbf{C})$, $G_0(\mathbf{C}, X^*(\mathbf{C}))$ となっている。しかも、いずれも、一般的には、 $\mathbf{C}$ に対して陽には表現できない。しかしながら、幾何計画問題で難度が 0 の場合は、双対問題の最適解および最適値は係数 $\mathbf{C}$ に対して陽関数で表現できる。

たとえば、つぎようになる。

$$\{\text{例 1}\} \min_{X>0} C_{01} X_1 X_2 X_3$$

sub to

$$C_{11} X_1^{-1/2} X_2^{1/3} + C_{12} X_1^{3/2} X_3^{1/4} + C_{21} X_2^{-4/3} X_3^{-5/4} \leq 1$$

正規格化条件 $\delta_{01}=1$

直交条件

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & -4/3 \\ 1 & 0 & 1/4 & -5/4 \end{bmatrix} \cdot \delta = 0$$

$$\delta = (\delta_{01}, \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21})^T > 0$$

以上から、双対問題の最適解 δ^* は係数 $\mathbf{C}$ に関係なく定まり、

$$\delta^* = (1, 1, 1, 1)^T$$

となる。このときの最適値は

$$G_0(\mathbf{C}, X^*(\mathbf{C})) = V(\mathbf{C}, \delta^*) = 27 \cdot C_{01} \cdot C_{11} \cdot C_{12} \cdot C_{21}$$

となる。

3.2 難度が正の場合

上記は難度が 0 の特殊な場合であった。しかし、一般には難度は正であり、双対問題の許容解は一意的ではない。このような場合には係数 $\mathbf{C}$ の陽関数として最適解、最適値を決定することはできない。そこで、原問題を 0 難度問題で近似し、係数を陽に含む簡単な方程式を解くことによって係数ごとの近似最適値を求めることを検討する。

3.3 ベース問題

ベース問題 z ($z=1, \dots, t$) は主問題を近似分解法で分解して得られた問題の分解係数および可変係数をすべて取り除いた構造だけの問題であり、以下のようになる。

ただし、統合制約関数は第 s から p までの制約関数によって作られるとする。

$$[P_z] \quad z=1, \dots, t$$

$$\min_{X>0} G_0(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{\phi(0)} G_{0i}(\mathbf{X})$$

$$\text{sub to } G_i(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{\phi(i)} G_{ij}(\mathbf{X}) \leq 1 \quad i=1, \dots, s-1$$

$$\sum_{i=s}^p \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S(z)) \cdot G_{ij}(\mathbf{X}) \leq 1$$

ただし、統合制約式から選択する項の数を

$$v = \Delta S(z) = n + 1 - \sum_{i=0}^{s-1} \phi(i)$$

とすれば、統合制約関数に含まれる項の添え字集合の部分集合 $S(z)$ はつぎようになる。

$$S(z) = \{sz(1), sz(2), \dots, sz(v)\} \subset \bigcup_{i=s}^p L(i)$$

とする。この各ベース問題の難度は 0 である。このベース問題が意味をもつ（解をもつ）ために、双対解が正であればよい。

4. 最適化

主問題の最適値の上界は許容解を代入することで得られる。また、最適値の下界についてつぎの定理が成立する。定理の (1) はベース問題の最適値に可変係数のみからなる関数を乗じたもので主問題の最適値にたいする下からの近似が得られる。さらに、分割される制約関数に含まれる項で β に対応しない項がすべてのベース問題におのおの少なくとも一つに含まれているなら、(1) よりよい近似値が得られる。すなわち、定理の (2) が成立する。これらは近似最適化法で誘導されたものよりよい近似を与えるものである。しかも、文献 2) の近似法では、分解係数 α , β , r のよい値が具体的に決定されていないのに対し、ここでは有効な α , β , r の値の決定と、係数 $\mathbf{C}$ を陽に含んだ形の近似公式の誘導が可能である。すなわち、 β については最大の 1 に設定できることと、 r についても最大になる場合を具体的に決定した以下の定理を証明する。

なお、単体分解法は意味のある幾何計画問題に対しては確率 1 で分解できる²⁾。つぎの定理での主問題は単体分解可能であることを仮定しておく。

《定理》 $z=1, \dots, t$, $i=s, \dots, p$ にたいして、統合制約関数に利用された i 番目の制約関数に含まれ、同時にベース問題 P_z にも含まれる項に対応する双対変数の和を λ_{zi} とし、ベース問題 P_z の s 番目の制約式に含まれる項に対応する双対変数の和を λ_z とする。すなわち、

$$\lambda_{zi} = \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S(z)) \cdot \delta_{ij}$$

$$\lambda_z = \sum_{i=s}^p \lambda_{zi}$$

とし、ベース問題 P_z の項に対応する係数の部分をまとめた $\mathbf{C}$ のみの関数 $\mu_{zc}(\mathbf{C})$ を

$$\begin{aligned} \mu_{zc}(\mathbf{C}) &= \prod_{i=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{\phi(i)} C_{ij}^{\delta_{ij}} \\ &\quad \times \prod_{i=s}^p \prod_{j=1}^{\phi(i)} \phi(I(i, j), S(z)) \cdot C_{ij}^{\delta_{ij}} \end{aligned}$$

$$\times \lambda_z^{-\lambda_z} \prod_{i=s}^p \lambda_{zi}^{\lambda_{zi}}$$

とする。また、ベース問題 P_z の双対最適解を

$$\delta_z = (\delta_{01}, \dots, \delta_{sz(v)})$$

最適値を G_{0z} とする。

このとき、主問題の最適値を $G_0(\mathbf{C}, X(\mathbf{C})^*)$ 、すると、つぎの関係が成立する。

(1)

$$G_0(\mathbf{C}, X(\mathbf{C})^*) \geq \max_z G_{0z} \cdot \mu_{zc}(\mathbf{C})$$

(2)

もし、すべての $z=1, \dots, t, h=1, \dots, t$ で、

$$S_\beta(z) = \{I(i, j)\}$$

$$\rho(I(i, j), S(h)) \cdot \rho(I(i, j), S(z)) = 1,$$

$$h \neq z, i=s, \dots, p, j=1, \dots, \phi(1)$$

なる集合 (すなわち、ベース問題 P_z に含まれ同時に z 以外のベース問題に含まれる項の添え字の集合) の要素の数が $S(z)$ の要素の数より小さい、すなわち

$$\Delta S_\beta(z) < \Delta S(z) \quad z=1, \dots, t$$

が成立するならば、ある K が存在して、

$$G_0(\mathbf{C}, X(\mathbf{C})^*) \geq K > \max_z G_{0z} \cdot \mu_{zc}(\mathbf{C})$$

がいえる。さらに、 $S(z)$ から $S_\beta(z)$ の要素を除いた集合 $S_c(z)$ 、

$$S_c(z) = S(z) - S_\beta(z)$$

に対して、 $S_c(z)$ に含まれる添え字に対応する双対変数の和に -1 を掛けたものを t_z とする。

$$t_z = - \sum_{i=s}^p \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S_c(z)) \cdot \delta_{ij}$$

すると、 K は

$$\sum_{z=1}^t \{G_0(\mathbf{C}^*) \cdot \mu_{zc}(\mathbf{C}) \cdot K^{-1}\}^{1/t_z} = 1$$

なる方程式の解である。

(証明) 主問題を単体分割することによって構成される 0 難度問題の組を以下のように定める。

$$[P(z)] \quad z=1, \dots, t$$

$$\min_{X>0} G_0(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{\phi(0)} G_{0i}(\mathbf{C}, \mathbf{X})$$

$$\text{sub to } G_i(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{\phi(i)} G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq 1$$

$$i=1, \dots, s-1$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S(z)) \cdot \gamma_i \cdot \beta_{ijz} \cdot G_{ij}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \leq \alpha_z$$

ただし

$$v = \Delta S(z) = n+1 - \sum_{i=0}^{s-1} \phi(i)$$

$$S(z) = \{sz(1), sz(2), \dots, sz(v)\} \subset \bigcup_{i=s}^p L(i)$$

とし、 $\alpha, \beta, \mathbf{r}$ は正規化されている。すなわち、

$$\sum_{i=s}^p \gamma_i = 1, \quad \gamma_i > 0 \quad i=s, \dots, p$$

$$\sum_{z=1}^t \rho(I(i, j), S(z)) \cdot \beta_{ijz} = 1, \quad \beta_{ijz} > 0$$

$$\sum_{z=s}^p \alpha_z = 1, \quad \alpha_z > 0$$

とする。

さてこのとき、 $P(z)$ の双対問題を解いて、最適解を代入し最適値 $G_z(\alpha, \beta, \mathbf{r}, \mathbf{C})$ を求めると

$$G_0(\mathbf{C}, \mathbf{X}(\mathbf{C})) \geq \max_{\alpha, \beta, \mathbf{r}} \{ \min_z G_z(\alpha, \beta, \mathbf{r}, \mathbf{C}) \} \quad (11)$$

なる関係が文献2)の定理から得られる。ここで、最適値 $G_z(\alpha, \beta, \mathbf{r}, \mathbf{C})$ を、ベース問題の部分、 $\alpha, \beta, \mathbf{r}, \mathbf{C}$ の各パラメータの部分ごとに分けて整理すると、

$$G_z(\alpha, \beta, \mathbf{r}, \mathbf{C}) = G_{0z} \cdot \mu_{zc}(\mathbf{C}) \cdot \mu_{za}(\alpha) \\ \times \mu_{z\beta}(\beta) \cdot \mu_{z\mathbf{r}}(\mathbf{r})$$

となる。ここで、各関数は以下のようになる。

$$G_{0z} = \left[\prod_{i=0}^{s-1} \left\{ \prod_{j=1}^{\phi(i)} \delta_{ij}^{-\delta_{ij}} \right\} \cdot \lambda_i^{\lambda_i} \right]$$

$$\times \left[\prod_{i=s}^p \left\{ \prod_{j=1}^{\phi(i)} \phi(I(i, j), S(z)) \cdot \delta_{ij}^{-\delta_{ij}} \right\} \cdot \lambda(z)^{\lambda(z)} \right]$$

$$\mu_{zc}(\mathbf{C}) = \prod_{i=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{\phi(i)} C_{ij}^{\delta_{ij}}$$

$$\times \prod_{i=s}^p \prod_{j=1}^{\phi(i)} \phi(I(i, j), S(z)) \cdot C_{ij}^{\delta_{ij}}$$

$$\mu_{za}(\alpha) = \alpha_z - \sum_{i=s}^p \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S(z)) \cdot \delta_{ij}$$

$$\mu_{z\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \prod_{i=s}^p \gamma_i \sum_{j=1}^{\phi(i)} \rho(I(i, j), S(z)) \cdot \delta_{ij}$$

$$\mu_{z\beta}(\beta) = \prod_{i=s}^p \prod_{j=1}^{\phi(i)} \phi(I(i, j), S(z)) \cdot \beta_{ijz}^{\delta_{ij}}$$

となる。

ここで、(11)の $\{ \}$ はすべての z で G_z を等しくできれば、最小にする z で最大にできる。また、そのような $\alpha, \beta, \mathbf{r}$ のもとで G_z を最大にすることを考える。

まず、ある $\mathbf{r}$ に対して、 β と α の関係を見てみる。 β はすべて正の要素からなっており z に関して正規化されている。 $\mu_{z\beta}(\beta)$ に含まれている β_{ijz} は z 以外のサブ問題を考えなければ、独立に変化させることができる。よって、サブ問題 z に含まれている β の要素をすべて1にすれば最大になる。しかしながら、

$$I(i, j) \in S(t) \text{ かつ } I(i, j) \in S(z)$$

なる $t (\neq z)$ にたいしてはサブ問題 t の対応する部分 $\mu_{t\beta}(\beta)$ が0となることから、

$$G_z(\alpha, 0, \mathbf{r}, \mathbf{C}) = 0$$

となる (ここで、 G_z の β は対応するものが0であ

るということを意味する便宜的な記述をしている。また、 G_i と α は α_i の意味である。以下同様に扱う。この場合は、 α を 0 にすると G_i が不定となる。しかしながら、十分小さな ε に対しては、

$$G_i(\alpha, \varepsilon, r, C) > 0$$

となる。そこで、 α 、 β は独立であるが $\beta \rightarrow \varepsilon$ にたいして、 t に対する α を小さくすれば、すなわち適当な $\alpha(\varepsilon)$ が存在して、任意の $K > 0$ に対して、

$$G_i(\alpha(\varepsilon), \varepsilon, r, C) = K$$

とできる。実際、 $\mu_{z\alpha}(\alpha)$ の α_z の指数部を t_z としたとき、 $t_z < 0$ であることからいえる。このような $\alpha(\varepsilon)$ は $\varepsilon > 0$ に対して連続であるから、 $\varepsilon = 0$ の値を

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_i(\alpha(\varepsilon), \varepsilon, r, C) = G_i(\alpha(0), 0, r, C) = K$$

と定義すれば、 G_z における $\beta = 1 - \varepsilon$ に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ となり

$$G_z(\alpha(1), 1, r, C)$$

$$= G_0 z \cdot \mu_{za}(1) \cdot \mu_{z\beta}(1) \cdot \mu_{zr}(r) \cdot \mu_{zc}(C) = K$$

とすれば、すべての t でも極限で等しく K とすることが出来る。ついで、このような K の存在は $\mu_{zr}(r)$ を最大にしてもなりたつので、 $\mu_{zr}(r)$ の最大値を見つけよう。 $\mu_{zr}(r)$ がすべての r の要素を含んでいれば、他の $\mu_{ir}(r)$ は 0 にならないので問題はない。ただ、含んでいない場合は、 $\mu_{ir}(r)$ で 0 となるような t が存在することになる。この場合は β と同様な議論が可能であり、上の議論のような K の存在は問題ない。さて、 $\mu_{zr}(r)$ については、

$$\lambda_z^{\lambda_z} \prod_{i=s}^p \lambda_{zi}^{\lambda_{zi}} \geq \mu_{zr}(r)$$

が付録 1 からいえるので、(1) がいえた。(2) は仮定が満足すれば、 $s_\beta(z)$ に含まれる要素に対応する β の要素と α を書けば、

$$\mu_z(\alpha, \beta) = \mu_{z\alpha}(\alpha) \cdot \mu_{z\beta}(\beta)$$

$$= \prod_{i=s}^p [\phi(I(i, j), S(z)) \times (\beta_{ijz} / \alpha_z^{\delta_{ij}})] \\ \times \alpha_z^{-t_z}$$

ここで、 β_{ijz} はすべての ijz に対して、

$$\beta_{ijz} \geq \alpha_z$$

とおけば、上の式は

$$\mu_z(\alpha, \beta) \geq \alpha_z^{-t_z}$$

となる。しかも、 $t_z > 0$ で $0 < \alpha_z < 1$ から (2) がいえる。また、 K を求める式は、 α_z を求めて正規化するとよい。

(Q. E. D.)

以上のことを簡単な例題でみてみよう。

$$[\text{例 2}] \quad \min_{X > 0} C_1 X$$

$$\text{sub to } C_2 X^{-1} + C_3 X^{-2} \leq 1$$

なる問題の係数 $C = (C_1, C_2, C_3)$ が変化する場合を考える。この場合について定理の結果を確かめてみる。

この問題のベース問題は

$$[P_1] \quad \min_{X > 0} X$$

$$\text{sub to } X^{-1} \leq 1$$

$$[P_2] \quad \min_{X > 0} X$$

$$\text{sub to } X^{-2} \leq 1$$

この問題の最適解および双対解はつぎのようになる。

$$\partial_1 = (1, 1) \quad V_1 = 1$$

$$\partial_2 = (1, 1/2) \quad V_2 = (1/2)^{1/2}$$

ここで、 $\mu_{zc}(C)$ を掛けたものは、

$$V_1(C) = C_1 C_2$$

$$V_2(C) = C_1 C_3^{1/2}$$

また、この問題では β が存在しない場合で、近似最適値 $K(C)$ は以下の方程式を満足するものである。

$$1 = C_1 C_2 / K + (C_1 C_3^{1/2} / K)^2$$

より $K(C)$ が得られる。いま、

ケース 1、 $C = (1, 2, 3)$ ；ケース 2、 $C = (3, 4, 5)$ ；ケース 3、 $C = (5, 9, 1)$ ；として、近似結果を Table 1 に示す。

ここで、 V^* は P の最適値である。

K は真の最適値と一致していることがわかる。 V はベース問題に係数を考慮した値の最適値のうちで最大のものを表わしており定理の 1 に対応している。この問題は、 β 、 r が含まれない問題であった。

〔例 3〕

$$[P] \quad \min_{X, Y > 0} C_1 XY^2$$

$$\text{sub to } C_2 XY + C_3 X^{-3} Y^{-4} + C_4 X^{-4} Y^{-5} \leq 1$$

ベース問題は

$$[P_1] \quad \min_{X, Y > 0} XY^2$$

$$\text{sub to } XY + X^{-3} Y^{-4} \leq 1$$

$$[P_2] \quad \min_{X, Y > 0} XY^2$$

Table 1 The numerical example which includes a decomposition parameter α

Case	1	2	3
C	(1, 2, 3)	(3, 4, 5)	(3, 1, 2)
V_1	2	12	3
V_2	$3^{1/2}$	$3 \cdot 5^{1/2}$	$3 \cdot 2^{1/2}$
V	2	12	$3 \cdot 2^{1/2}$
K	3	15	6
V^*	3	15	6

$$\text{sub to } XY + X^{-4}Y^{-5} \leq 1$$

この双対解および最適値に $\mu_{zc}(\mathbf{C})$ を掛けたものは、

$$\delta_1 = (1, 2, 1) \quad V_1(\mathbf{C}) = 2^{-2/3} C_1 C_2^2 C_3$$

$$\delta_2 = (1, 3, 1) \quad V_2(\mathbf{C}) = 3^{-3/4} C_1 C_2^3 C_4$$

と表わせる。 K はつぎようになる。

$$K = 2^{-2/3} C_1 C_2^2 C_3 + 3^{-3/4} C_1 C_2^3 C_4$$

この場合も定理の結果は成立しており、しかも K は大変良い近似を与えている (Table 2)。ちなみに、各ケースでの P_c の双対最適解を求めておく。

$$\text{ケース 1 : } \delta = (1, 2.7838, 0.2162, 0.7838)^T$$

$$\text{ケース 2 : } \delta = (1, 2.6955, 0.3045, 0.6955)^T$$

$$\text{ケース 3 : } \delta = (1, 2.761, 0.239, 0.761)^T$$

つぎに、結合係数 $\mathbf{r}$ が存在するような例題を扱ってみる。

[例 4]

$$\begin{aligned} [P] \quad & \min_{X, Y, Z, V, W > 0} C_1 X + C_2 X^2 Y^3 + C_3 Z^2 W^2 \\ & \text{sub to } C_4 V + C_5 W + C_6 X^{-5} Y^{-6} Z^{-6} V^{-4} W^{-11} \leq 1 \\ & C_7 X^{-4} Y^{-3} Z^{-20} V^{-2} W^{-4} + C_8 X^{-7} Y^{-6} Z^{-18} V^{-6} W^{-5} \leq 1 \end{aligned}$$

ベース問題はつぎようになる。

$$\begin{aligned} [P_1] \quad & \min_{X, Y, Z, V, W > 0} X + X^2 Y^3 + Z^2 W^2 V + W + X^{-5} Y^{-6} Z^{-6} V^{-4} W^{-11} \leq 1 \\ [P_2] \quad & \min_{X, Y, Z, V, W > 0} X + X^2 Y^3 + Z^2 W^2 V + W + X^{-4} Y^{-3} Z^{-20} V^{-2} W^{-4} \leq 1 \\ [P_3] \quad & \min_{X, Y, Z, V, W > 0} X + X^2 Y^3 + Z^2 W^2 V + W + X^{-7} Y^{-6} Z^{-18} V^{-6} W^{-5} \leq 1 \end{aligned}$$

各問題の双対解は

$$\delta_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 1)/6$$

$$\delta_2 = (2, 1, 10, 2, 1, 1)/13$$

$$\delta_3 = (3, 2, 9, 6, 1, 1)/14$$

最適値はつぎようになる。

$$V_1 = 6 \cdot 2^{-2/6} \cdot 3^{-3/6} \cdot 4^{-4/6} \cdot 5^{-5/6} \cdot 10^{10/6}$$

$$V_2 = 13 \cdot 2^{-2/13} \cdot 10^{-10/13} \cdot 2^{-2/13} \cdot 4^{4/13}$$

Table 2 The numerical example which includes decomposition parameters α and β

t	1	2	3
$\mathbf{C}$	(1, 2, 3, 4)	(6, 1, 3, 5)	(16, 10, 23, 5, 4)
V_1	81	121.5	2.484×10^5
V_2	303.407	284.44	8.192×10^5
V	303.407	284.44	8.192×10^5
K	384.407	405.94	1.0676×10^6
V^*	387.938	410.72	1.0781×10^6

$$V_3 = 14 \cdot 3^{-3/14} \cdot 2^{-2/14} \cdot 9^{-9/14} \cdot 6^{-6/14} \cdot 8^{8/14}$$

$\mathbf{r}$ の効果をいれると

$$V_{11} = V_1 \cdot 1$$

$$V_{21} = V_2 \cdot 3^{3/13} \cdot 4^{-4/13}$$

$$V_{31} = V_3 \cdot 7^{7/14} \cdot 8^{-8/14}$$

となる。このようにして得られたものに $\mu_{zc}(\mathbf{C}) \cdot \mu_{z\alpha}(\alpha)$ を掛けたものは、

$$V_1(\mathbf{C}) = V_{11} \cdot C_1^{1/6} C_2^{2/6} C_3^{3/6} C_4^{4/6} C_5^{5/6} C_6^{1/6} \alpha_1^{-1/6}$$

$$V_2(\mathbf{C}) = V_{21} \cdot C_1^{2/13} C_2^{1/13} C_3^{10/13} C_4^{2/13} C_5^{1/13} C_6^{1/13} \alpha_2^{-1/13}$$

$$V_3(\mathbf{C}) = V_{31} \cdot C_1^{3/14} C_2^{2/14} C_3^{9/14} C_4^{6/14} C_5^{1/14} C_6^{1/14} \alpha_3^{-1/14}$$

となる。

この場合は V_1 では $\mathbf{r}$ が 1 であるので、 V_1 が最大であれば K は V_1 となる。そうでなければ、 V_2 または V_3 で決定した γ_1, γ_2 が採用される。 V_2 のであれば $\gamma_1 = 3/4, \gamma_2 = 1/4, V_3$ のであれば $\gamma_1 = 7/6, \gamma_2 = 1/8$ となる。よって、等しい K は

$$\begin{aligned} & \{(V_1 \gamma \cdot C_1^{1/6} C_2^{2/6} C_3^{3/6} C_4^{4/6} C_5^{5/6} C_6^{1/6}) / K\}^6 \\ & + \{(V_2 \gamma \cdot C_1^{2/13} C_2^{1/13} C_3^{10/13} C_4^{2/13} C_5^{1/13} C_6^{1/13}) / K\}^{13} \\ & + \{(V_3 \gamma \cdot C_1^{3/14} C_2^{2/14} C_3^{9/14} C_4^{6/14} C_5^{1/14} C_6^{1/14}) / K\}^{14} \\ & = 1 \end{aligned}$$

ここで、 $V_1 \gamma, V_2 \gamma, V_3 \gamma$ は V_{11}, V_{21}, V_{31} に $\mathbf{r}$ として上のような値をいれて定まるものである。そして、最大となるようなものを選ぶとよい。この式に係数 $\mathbf{C}$ の値を代入することによって、近似最適値が得られる。たとえば、

$$\mathbf{C}_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$$

$$\mathbf{C}_2 = (3, 6, 10, 2, 9, 8, 1, 5)$$

$$\mathbf{C}_3 = (10, 5, 1, 7, 9, 6, 5, 7)$$

の場合の値を Table 3 に示す。

この場合の最大の K は v_1 となる。

双対解はつぎの問題を解けばよい。

$$\begin{aligned} & \max_{\delta > 0} \prod_{i=1}^8 (C_i / \delta_i \delta_i) \cdot (\delta_4 + \delta_5 + \delta_6) (\delta_4 + \delta_5 + \delta_6) \\ & \quad \cdot (\delta_7 + \delta_8) (\delta_7 + \delta_8) \\ & \text{sub to } \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1 \end{aligned}$$

Table 3 The numerical example which includes decomposition parameters α, β and $\mathbf{r}$

$\mathbf{C}$	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)	(3, 6, 10, 2, 9, 8, 1, 5)	(10, 5, 1, 7, 9, 6, 5, 7)
$V_1(\mathbf{C})$	375.423	1280.481	1023.328
$V_2(\mathbf{C})$	9.199504	24.2326147	6.71415
$V_3(\mathbf{C})$	15.80087	38.006583	19.113722
K	375.423	1280.481	1023.328
V^*	375.4	1280.48	1023.256

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -6 & -20 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -11 & -21 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なる問題に各ケースの係数を代入して解いた双対解は3ケースでほとんど変わらず以下のものであった。ただ、原問題の最適解では同様ではないことに注意。

$$\delta^* = (1.66, 3.33, 5.00, 6.66, 8.33, 1.66, 0.00, 0.00)^T$$

いずれにしろよい近似最適値が得られている。

5. 近似の評価

上の結果からわかるように簡単な計算でよい近似最適値（本論文の例では真の最適値）が得られていることがわかる。しかし、一般には、得られる結果は近似最適値であり、真の最適値とどの程度異なっているかははかる目安があれば好都合である。得られた近似最適解から、近似最適値はどの程度の誤差を含むかの評価がある程度可能である。

具体的には、最適解の双対性から、ベース問題に係数を付加した問題の最適解が簡単に求められる。得られた解が主問題の許容解かどうかをチェックし、許容解であれば主問題の最適解でもある。許容解かどうかは、 $i \geq s$ に対する制約式

$$G_i(\mathbf{X}) \leq 1$$

について解を代入し、満足しているかどうかで決定できる。許容解でなくても制約式をほぼ満足していれば近似最適値は十分よい近似であると思われる。

6. おわりに

未定あるいは可変係数を含む最適化問題を係数を陽に含む簡単な方程式を解くことによって近似最適値を求める方法を提案した。このような扱い方によって、大規模な問題でも、係数ごとの近似最適値は簡単に求めることができることから、類似の問題（係数だけ異なるような）問題を繰り返し解く必要がなくなる。かりに厳密な解が必要であれば、近似最適値および近似最適解を初期値として扱えばよく、いずれにしても計算量の大幅な減少が見込めるであろう。また、係数が時々刻々と変わるような問題でしかも短時間の間に解を決定しなければならないような場合は特に有効であ

ると考えられる。

参考文献

- 1) R. J. Duffin, E. L. Peterson and C. Zener: Geometric Programming, Theory and Applications, John Wiley and Sons, Inc., New York (1967)
- 2) 吉田 要: 幾何計画法の近似最適化法, 計測自動制御学会論文集, 19-8, 642/649 (1983)
- 3) 吉田 要: 幾何計画問題の近似最適解の構成法, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 130/136 (1984)
- 4) 吉田 要: 幾何計画問題の近似分解可能性, 計測自動制御学会論文集, 20-7, 614/620 (1984)
- 5) 吉田 要: 幾何計画法における近似分解アルゴリズム, システム制御情報学会論文集, 3-1, 21/28 (1990)

《付 録》

[補題]

$$x_i > 0, a_i > 0, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_i = \lambda$$

に対して

$$\sum_{j=1}^n a_j a_i \cdot \lambda - \lambda \geq \sum_{j=1}^n x_j a_i$$

が成立する。

(証明) (1) $n=1$ は明らか。(2) $n \geq 2$ のときを証明する。

$$E = \log \left(\prod_{j=1}^n x_j^{a_j} \right)$$

E が最大値を $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ でもつことは明らか。

また、 $n \geq 2$ より最大値が $x_j = 1$ なるような点でないことも明らか。よって、最大値は制約領域の内点に存在することから、その点は停留点となっている。よって、

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

として代入して、偏微分を0として

$$\partial E / \partial x_i = a_i / x_i - a_n / x_n = 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

から $x_i = x_n \cdot a_i / a_n$ となる。また、

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_n \cdot a_i / a_n + x_n = 1$$

から

$$x_n = a_n / \lambda$$

x_i として

$$x_i = a_i / \lambda \quad i = 1, \dots, n-1$$

が得られる。これを代入すれば題意が証明できる。

(Q. E. D.)