一般的な非線形系における入出力線形化[†]

山下 裕*・島 公 脩*

Input-Output Linearization of General Nonlinear Systems

Yuh YAMASHITA* and Masasuke SHIMA*

For linear analytic systems, input-output linearization problem was already solved by Isidori, et al²⁾ in terms of the nonlinear structure algorithm³⁾. In this paper, we study the input-output linearization problem for general nonlinear system $x=f(x, u)$, $y=h(x)$.

Firstly, we give a simple necessary and sufficient condition under which the input-output behavior is linear. The condition is trivial if the system is linear analytic system²⁾. Secondly, the nonlinear structure algorithm is extended for general nonlinear systems. The extended algorithm yields necessary and sufficient conditions to be satisfied by plant for the input-output linearization via state feedback, whose proof provides a state feedback law.

Key Words: linearization, general nonlinear system, nonlinear structure algorithm, Volterra series, input-output behavior

1. 緒 言

本論文では、入力に関して線形とは限らない非線形微分方程式で表わされる系に対して、その入出力関係を線形化する状態フィードバック則が存在するための条件、およびその制御則を求める方法について研究した。

ここで扱う線形化は、状態量の線形化¹⁾ではなく、ボルテラ級数によって表わされている系の入出力関係の線形化である。このような入出力線形化問題は、Isidori and Ruberti²⁾によって定式化され、さらに linear analytic system に対して解かれた。文献2)では、Hirschorn³⁾の非線形構造アルゴリズムを用い

ることによって制御則を導出している。さらに、Lee and Marcus⁴⁾は、入力に関して線形とは限らない離散時間系に対する非線形構造アルゴリズムを考案して、離散時間系の入出力線形化問題を解いている。しかし、入力に関して線形とは限らない連続時間非線形系(以降、一般的な非線形系と呼ぶ)の入出力線形化の研究はまだなされていないようである。その原因としては、そのような系ではボルテラ級数展開と系を表わす微分方程式の間の関係が linear analytic system ほど明らかになっていないことがあげられる。

本論文では、まず一般的な非線形系の入出力関係が線形化されているために閉ループ系が満たさねばならない必要十分条件を求める。つぎに非線形構造アルゴリズムを一般的な系に拡張して、入出力線形化が可能であるための必要十分条件を示す。制御則の構成方法も、同時に示す。

2. 問題の記述

制御対象として、

$$\dot{x}=f(x, u) \quad (2.1)$$

$$y=h(x) \quad (2.2)$$

ただし、 $x \triangleq \text{col}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ は状態量、 $u \triangleq \text{col}(u^1, \dots, u^m) \in \mathbf{R}^m$ は入力、 $y \triangleq \text{col}(y^1, \dots, y^l) \in \mathbf{R}^l$ は出力である。また、 $\cdot$ は時間 t による全微分、 $f(\cdot)$ 、 $h(\cdot)$ は解析的写像とする。

この系に対して、状態フィードバック、

$$u=\alpha(x, v) \quad (2.3)$$

を施すことによって、閉ループ系は、

$$\dot{x}=\tilde{f}(x, v) \quad (2.4)$$

$$y=h(x) \quad (2.5)$$

$$\tilde{f}(x, v) \triangleq f(x, \alpha(x, v)) \quad (2.6)$$

となる。ただし、 $v \triangleq \text{col}(v^1, \dots, v^m)$ はコントローラへの新しい入力であり、 $\alpha(\cdot)$ は解析関数とする。

ここで考えている問題は、閉ループ系の入出力関係が線形となるような $\alpha(x, v)$ が存在するための条件、

[†] 第31回自動制御連合講演会で発表 (1988・10)

* 北海道大学工学部 札幌市北区北13条西8

* Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

(Received December 19, 1989)

(Revised May 7, 1990)

およびそのような $\alpha(x, v)$ の計算法を導くことである。

閉ループ系の入出力関係が線形であるとは, linear analytic system の場合と同様に, 系の入出力関係を表わすボルテラ級数,

$$y(t; x_0) = w_0(t; x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_k} \cdots \int_{t_0}^{\tau_2} w_{k; i_k \dots i_1}(t, \tau_k, \dots, \tau_1; x_0) \cdot v^{i_k}(\tau_k) \cdots v^{i_1}(\tau_1) d\tau_1 \cdots d\tau_k \quad (2.7)$$

において, 2次以上のボルテラ核が0, つまり,

$$w_{k; i_k \dots i_1}(t, \tau_k, \dots, \tau_1; x_0) = 0, \quad k \geq 2 \quad (2.8)$$

となり, かつ, 1次のボルテラ核が初期値 $x_0 \triangleq x(t_0)$ によらずに, $t - \tau$ のみで表わすことができることである。このとき, ボルテラ級数展開は,

$$y(t; x_0) = w_0(t; x_0) + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t w_{1, i}(t - \tau) v^i(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

と表わされる。この定義が妥当であることは,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.10)$$

$$y = Cx \quad (2.11)$$

なる時不変線形系のボルテラ級数展開が,

$$y(t; x_0) = w_0(t; x_0) + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t w_{1, i}(t - \tau) u^i(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

$$w_0(t; x_0) = \exp(At) x_0 \quad (2.13)$$

$$w_{1, i}(t - \tau) = C \exp(A(t - \tau)) B_i \quad (2.14)$$

となることからわかる。

以下の議論で必要となるリー微分作用素を定義する。スカラー関数 $\gamma(x)$, ベクトル場 $f(x)$ に対して, リー微分作用素 L_f は,

$$L_f \gamma(x) = \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x^i} \quad (2.15)$$

と定義される。また, $\gamma(x) \triangleq \text{col}(\gamma^1(x), \dots, \gamma^p(x))$ のように列ベクトルで表わされる場合, 本論文では,

$$L_f \gamma(x) \triangleq \text{col}(L_f \gamma^1(x), \dots, L_f \gamma^p(x)) \quad (2.16)$$

と記述する。

3. 入出力関係が線形であるための必要十分条件

前節において, 入出力関係が線形であることをボルテラ級数展開を用いて定義したが, linear analytic system とは異なり, 系(2.1), (2.2)のボルテラ核を直接求めることは困難である。本節では, 系の入出力関係が線形であることの必要十分条件を示し, その証明を与える。

《定理1》 (2.9)式のように系(2.4), (2.5)の入出

力関係が表わされるための, $\tilde{f}(x, v)$, $h(x)$ の満たすべき必要十分条件は, $k=1, 2, \dots$ に対して,

$$L_{\tilde{f}(x, v)}^k h(x) = a_k(x) + \sum_{i=1}^m b_{k, i} v^i \quad (3.1)$$

なる, 定数ベクトル $b_{k, i}$ が存在することである。□

(定理1の証明) (必要性) まず, $k=1$ の場合について証明する。 $x(t)$ が t について微分可能であることと, $h(x)$ が解析写像であることより, $y(t)$ は t について微分可能である。(2.9)式の両辺を微分すると,

$$\frac{dy(t; x_0)}{dt} = \frac{\partial w_0(t; x_0)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \left\{ w_{1, i}(0) v^i(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial w_{1, i}(t - \tau)}{\partial t} v^i(\tau) d\tau \right\} \quad (3.2)$$

となる。ここで, $t \rightarrow t_0$ とし, $y(t_0)$, $(dy/dt)|_{t=t_0}$, $v^i(t_0)$, x_0 をそれぞれ y , $\dot{y}$, v^i , x と書くこととすると, (3.2)式は,

$$\dot{y} = \frac{\partial w_0(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + \sum_{i=1}^m w_{1, i}(0) v^i \quad (3.3)$$

となる。一方,

$$L_{\tilde{f}(x, v)} h(x) = \dot{y} \quad (3.4)$$

であるから, (3.1)式の $k=1$ の場合を満たす,

$$a_1(x) = \frac{\partial w_0(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \quad (3.5)$$

$$b_{1, i} = w_{1, i}(0) \quad (3.6)$$

が存在する。

つぎに, $k=2$ の場合について考える。 ξ_1 を,

$$\begin{aligned} \xi_1(t; x_0) &\triangleq \frac{dy(t; x_0)}{dt} - \sum_{i=1}^m b_{1, i} v^i(t) \\ &= \frac{\partial w_0(t; x_0)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t \frac{\partial w_{1, i}(t - \tau)}{\partial t} v^i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

と定義する。 $\xi_1(t_0; x_0) = a_1(x)$ であるから, すべての x_0 , $v(t)$ に対し, $t=t_0$ において, $\xi_1(t; x_0)$ は微分可能である。 $\xi_1(t; x_0) = \xi_1(t - t_1 + t_0; x(t_1))$ が成り立つことを考慮すると, すべての $t=t_1$ においても $\xi_1(t; x_0)$ は微分可能である。ここで, (3.7)式の両辺を微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1(t; x_0)}{dt} &= \frac{\partial^2 w_0(t; x_0)}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{dw_{1, i}(t')}{dt'} \Big|_{t'=0} v^i(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 w_{1, i}(t - \tau)}{\partial t^2} v^i(\tau) d\tau \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。 $t \rightarrow t_0$ とし, $\xi_1(t_0; x_0)$, $(d\xi_1/dt)|_{t=t_0}$, $v^i(t_0)$, x_0 を, それぞれ, ξ_1 , $\dot{\xi}_1$, v^i , x と書くこと,

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial^2 w_0(t; x)}{\partial t^2} \Big|_{t=t_0} + \sum_{i=1}^m \frac{dw_{1, i}(t')}{dt'} \Big|_{t'=0} v^i \quad (3.9)$$

となる。一方、

$$L_{f(x,v)}^2 h(x) = L_{f(x,v)} a_1(x) = \xi_1 \quad (3.10)$$

であるから、(3.1)式の $k=2$ の場合を満たすような、

$$a_2(x) = \left. \frac{\partial^2 w_0(t; x)}{\partial t^2} \right|_{t=t_0} \quad (3.11)$$

$$b_{2,i} = \left. \frac{dw_{1,i}(t')}{dt'} \right|_{t'=0} \quad (3.12)$$

が存在する。

このようにして、 $k=3$ 以降も帰納的に、

$$\xi_{k-1}(t; x_0) \triangleq \frac{d^k \xi_{k-2}(t; x_0)}{dt} - \sum_{i=1}^m b_{k-1,i} v^i(t) \quad (3.13)$$

を t で微分し $t \rightarrow t_0$ とすることにより、(3.1)式を満たす、

$$a_k(x) = \left. \frac{\partial^k w_0(t; x)}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} \quad (3.14)$$

$$b_{k,i} = \left. \frac{d^{k-1} w_{1,i}(t')}{dt'^{k-1}} \right|_{t'=0} \quad (3.15)$$

が存在することが証明される。□

(十分性) $a_0(x) \triangleq h(x)$ とする。ほとんどすべての点の近傍で、ベクトル値関数 $a_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) を構成する関数のうち関数的に独立なものを p ($\leq n$) 個選出することができるので、それらを $z^1(x), \dots, z^p(x)$ とする。すると、

$$a_k(x) = \Phi_k(z(x)), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

なる関数 $\Phi_k(z)$ 、および、

$$z^i = f^i(x) + \sum_{j=1}^m b_{ij}^i v^j, \quad i=1, \dots, p \quad (3.17)$$

$$y = \hat{h}(z) \quad (3.18)$$

$$z \triangleq \text{col}(z^1, \dots, z^p) \quad (3.19)$$

なる f , $\hat{b}$, $\hat{h}$ が存在する。系(3.17), (3.18)式は、linear analytic system である。文献2)によれば、この系の入出力関係が線形であるための必要十分条件は、

$$L_{\hat{b}, j} L_f^k \hat{h} = \text{independent of } z, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

である。ここで、

$$\hat{h}(z)|_{z=z(x)} = h(x) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} L_{f+\sum \hat{b}_{jv} j} \hat{h}(z)|_{z=z(x)} &= \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right] f(x, v) \\ &= L_{f(x,v)} h(x) \end{aligned} \quad (3.22)$$

が成り立つので、

$$L_f \hat{h}(z) = \Phi_1(z) \quad (3.23)$$

$$L_{\hat{b}, j} \hat{h}(z) = b_{1,j} = \text{const} \quad (3.24)$$

である。ここでさらに、

$$\begin{aligned} L_{f+\sum \hat{b}_{jv} j} L_f \hat{h}(z)|_{z=z(x)} &= \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right] f(x, v) \\ &= L_{f(x,v)} a_1(x) \end{aligned} \quad (3.25)$$

となるので、

$$L_f^2 \hat{h}(z) = \Phi_2(z) \quad (3.26)$$

$$L_{\hat{b}, j} L_f \hat{h}(z) = b_{2,j} = \text{const} \quad (3.27)$$

が成り立つ。この手順を繰り返すことにより、(3.20)式が成り立っていることがわかる。よって、ほとんどすべての点に対してある近傍が存在し、初期値 x_0 がその近傍に含まれるとき、ボルテラ級数は(2.9)式の形となっている。初期値に対する解軌道の連続性より、ボルテラ級数の各項は初期値に対して連続であることを証明することができる。よって、すべての初期値に対して(2.4), (2.5)式の入出力関係は線形である。□

4. 入力に関して線形ではない非線形系に対する構造アルゴリズム

本節では、linear analytic system の線形化に用いられている非線形構造アルゴリズムを、入力に関して線形ではない非線形系に拡張する。

まず、 p 次元ベクトル値関数 $\zeta(x, u)$ について、 x をパラメータとみなして、 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ の写像として考える。この写像の次元について、二つの定義をする。まず、正則点における普通の次元を、 $\dim_K \zeta(x, u)$ と定義する。すなわち、

$$\dim_K \zeta(x, u) \triangleq \text{rank } D_u \zeta(x, u) \quad (4.1)$$

である。ただし、 $D_u \zeta$ は u によるヤコビ行列で、

$$D_u \zeta(x, u) \triangleq \begin{bmatrix} \partial \zeta^1 / \partial u^1 & \dots & \partial \zeta^1 / \partial u^m \\ \vdots & & \vdots \\ \partial \zeta^p / \partial u^1 & \dots & \partial \zeta^p / \partial u^m \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

と定義される。また、 x, u に無関係な同型写像 $\eta: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ によって、 $\eta(\zeta(x, u))$ の成分のうち、 u を含まないようにできない成分の数を $\dim_R \zeta(x, u)$ とする。つまり、 $p \times p$ の定係数正則行列を $D_u \zeta(x, u)$ の左側から掛けて零化できない行の数を $\dim_R \zeta(x, u)$ とする。明らかに、

$$\dim_R \zeta \geq \dim_K \zeta \quad (4.3)$$

である。(4.3)式で等号が成り立つ場合は、 $p \times p$ 定係数正則行列 V が存在し、

$$V \cdot D_u \zeta(x, u) = \begin{bmatrix} S(x, u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

とすることができる。ただし、 $S(x, u)$ はフルランクであるものとする。

これらの次元の定義を用いて、つぎのアルゴリズムが導き出される。

アルゴリズム

Step 1.

$$\dim_K L_f h = \dim_R L_f h (= r_0) \quad (4.5)$$

と仮定する。すると、実数係数の正則行列、

$$V_1 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{K}_1^1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

が存在して,

$$\mathbf{V}_1 \cdot D_u L_f h = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1(x, u) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

となる. ただし, $\mathbf{P}_1, \mathbf{K}_1^1$ はそれぞれ $r_0 \times m, (l-r_0) \times m$ の定係数行列, $\mathbf{S}_1(x, u)$ は, $r_0 \times m$ のフルランクな行列である. ここで,

$$\delta_1 \triangleq r_0 \quad (4.8)$$

$$\gamma_1(x) \triangleq \mathbf{P}_1 h(x) \quad (4.9)$$

$$\bar{\gamma}_1(x) \triangleq \mathbf{K}_1^1 h(x) \quad (4.10)$$

とおく. すると,

$$D_u L_f \gamma_1 = \mathbf{S}_1(x, u) \quad (4.11)$$

$$D_u L_f \bar{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

が成り立つ. つまり, $L_f \bar{\gamma}_1$ は u を陽に含まない. もし, $r_0=0$ ならば, $\mathbf{P}_1$ は行のないマトリクス, $\mathbf{K}_1^1$ は単位行列とする.

Step i .

まず,

$$\lambda_{i-1}(x, u) \triangleq \begin{bmatrix} L_f \gamma_1 \\ \vdots \\ L_f \gamma_{i-1} \\ L_f^2 \bar{\gamma}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

とおく. ここで,

$$\dim_K \lambda_{i-1}(x, u) = \dim_R \lambda_{i-1}(x, u) = r_{i-1} \quad (4.14)$$

と仮定する. すると, 実数係数の正則行列,

$$\mathbf{V}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\delta_1} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} \cdots \mathbf{I}_{\delta_{i-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} & \mathbf{P}_i \\ \mathbf{K}_1^1 \cdots \mathbf{K}_{i-1}^1 & \mathbf{K}_i^1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

が存在して,

$$\mathbf{V}_i \cdot D_u \lambda_{i-1}(x, u) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_i(x, u) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

とすることができる. ただし, $\mathbf{S}_i(x, u)$ は, フルランクな $r_{i-1} \times l$ の行列である. ここで,

$$\delta_i \triangleq r_{i-1} - r_{i-2} \quad (4.17)$$

$$\gamma_i(x) \triangleq \mathbf{P}_i \cdot L_f \bar{\gamma}_{i-1}(x) \quad (4.18)$$

$$\bar{\gamma}_i(x) \triangleq \mathbf{K}_1^1 \gamma_1 + \cdots + \mathbf{K}_{i-1}^1 \gamma_{i-1} + \mathbf{K}_i^1 L_f \bar{\gamma}_{i-1} \quad (4.19)$$

とおく. すると,

$$\mathbf{S}_i(x, u) = \begin{bmatrix} D_u L_f \gamma_1 \\ \vdots \\ D_u L_f \gamma_i \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$D_u L_f \bar{\gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

が成り立ち, $L_f \bar{\gamma}_i$ は u を陽に含まない.

$L_f^2 \bar{\gamma}_{i-1}$ が, u に関して, $L_f \gamma_1, \dots, L_f \gamma_{i-1}$ に関数的に従属ならば, 新たな γ_i は生成せず, $\mathbf{P}_i$ は行のないマトリクス, $\mathbf{K}_i^1$ は単位行列, $d_i=0$, $\mathbf{S}_i(x)=\mathbf{S}_{i-1}(x)$ となる. $\square$

上記のアルゴリズムが終了する場合は, 2通りある. 一つはあるステップで,

$$\text{rank } D_u \lambda_i(x, u) = l \quad (\text{full rank}) \quad (4.22)$$

となる場合である. この場合, この式が成り立ったステップにおける i を q とおく. また, もう一つは, $L_f \bar{\gamma}_i$ を構成するすべての関数が, $\gamma_1, \dots, \gamma_i, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_i$ を構成する関数に従属となる場合である. この場合は, このときのステップを q' , 最後に γ を生成したステップを q とおく.

ここで, (4.5), (4.15)式が満たされる条件について考える. まず,

$$\phi_i(x, u) \triangleq L_{f(x, u)}^{i+1} h(x) \quad (4.23)$$

$$\mu_i(x, \hat{u}_i) \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{i-1} \phi_j(x, \bar{u}_{j+1}) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^1 \phi_j(x, \bar{u}_{j+i-1}) \\ \phi_0(x, \bar{u}_i) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

と定義する. ただし, $\bar{u}_j \in \mathbf{R}^m$ ($j=1, \dots, i$) であり,

$$\hat{u}_i \triangleq (\bar{u}_1^T, \dots, \bar{u}_i^T)^T \quad (4.25)$$

とする. μ を, $\mathbf{R}^{mi} \rightarrow \mathbf{R}^{mi}$ の写像として考えたとき, (4.5), (4.15)式が満たされるための必要十分条件は,

$$\dim_K \mu_i(x, \hat{u}_i) = \dim_R \mu_i(x, \hat{u}_i) \quad (4.26)$$

である. このことは, $\mathbf{P}_i, \mathbf{K}_i^1$ からなる正則行列を μ の左側から複数回掛けることにより証明される.

5. 入出力線形化

この節では, 入出力関係を線形化する状態フィードバック則 $u=\alpha(x, v)$ が存在するための必要十分条件について考える.

ここで, つぎの仮定 (full control の仮定) をおく.

$$\text{rank } D_v \alpha(x, v) = m \quad (5.1)$$

また, ある点 (x_e, u_e) の近傍で, $\text{rank } D_u \gamma(x, u)$ が一定であると仮定する.

これらの仮定のもとでは, つぎの定理が成り立つ.

《定理 2》 つぎの三つの命題は同値である.

(a) (x_e, u_e) の近傍において, 閉ループ系の入出力関係を線形化する状態フィードバック則 $u=\alpha(x, v)$ が存在する.

(b) (4.26)式が成立する.

(c) $\phi(s, x, u)$ を,

$$\phi(s, x, u) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x, u) s^{i-1} \quad (5.2)$$

と定義する. このとき, $l \times m$ 定数行列 $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots$ および m 次元ベクトル $\eta_{-1}(x, u), \eta_0(x, u), \dots$ が存在して,

$$D_u \phi(s, x, u) = \mathbf{K}(s) \cdot D_u \eta(s, x, u) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}(s) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i s^{-i-1} \quad (5.4)$$

$$\eta(s, x, u) \triangleq \eta_{-1}(x, u) + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(x, u) s^{-i-1} \quad (5.5)$$

$$\dim_K \eta_{-1}(x, u) = m \quad (5.6)$$

が成り立つ. $\square$

(証明)

(b) $\rightarrow$ (a)

$$\Gamma(x) \triangleq (\gamma_1(x)^T, \dots, \gamma_q(x)^T)^T \quad (5.7)$$

と定義すると, $D_u L_f \Gamma(x) = \mathbf{S}_q(x, u)$ は行フルランクとなっている. よって,

$$L_{f(x, u)} \Gamma(x) = [\mathbf{I}_{r_q}; 0] \cdot v \quad (5.8)$$

を u について局所的に解くことができる. これを,

$$u = \alpha(x, v) \quad (5.9)$$

とおく. この $\alpha(x, v)$ をフィードバック則とした閉ループ系は, 入出力線形化されている.

(a) $\rightarrow$ (c)

系を入出力線形化する $\alpha(x, v)$ が存在し, (5.1) 式を満たすものとする. すると, $u = \alpha(x, v)$ の逆写像,

$$v = \hat{\alpha}(x, u) \quad (5.10)$$

が局所的に存在し, $k=1, 2, \dots$ に対して,

$$L_{f(x, v)}^k h(x) = a_k(x) + \mathbf{B}_k v \quad (5.11)$$

なる定数行列 $\mathbf{B}_k$ が存在する. すると,

$$\begin{aligned} L_{f(x, u)}^k h(x) &= a_k(x) + \mathbf{B}_k \hat{\alpha}(x, u) \\ &\quad + \mathbf{B}_{k-1} L_{f(x, u)} \hat{\alpha}(x, u) + \dots \\ &\quad + \mathbf{B}_1 L_{f(x, u)}^{k-1} \alpha(x, u) \end{aligned} \quad (5.12)$$

となるので,

$$\mathbf{K}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k s^{-k} \quad (5.13)$$

$$\eta(s, x, u) = \hat{\alpha}(x, u) + \sum_{k=1}^{\infty} L_{f(x, u)}^k \hat{\alpha}(x, u) s^{-k} \quad (5.14)$$

とおくことにより, (5.3) 式が成り立つ.

(c) $\rightarrow$ (b)

(c) のような分解の存在を仮定する. すると,

$$\begin{aligned} D_{\hat{u}_k} \mu_k(x, \hat{u}_k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & \dots & \mathbf{K}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_0 & \dots & \mathbf{K}_{k-1} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot D_{\hat{u}_k} \begin{bmatrix} \eta_{-1}(x, \hat{u}_1) + \dots + \eta_{k-1}(x, \hat{u}_k) \\ \eta_{-1}(x, \hat{u}_2) + \dots + \eta_{k-2}(x, \hat{u}_k) \\ \dots \\ \eta_{-1}(x, \hat{u}_k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

が成り立つ. $D_u \eta_{-1}(x, u)$ は正則行列であるから, (5.15) 式の右辺の後半部分の行列もまた正則である. ここで, x, u を含まない正則行列 $\mathbf{V}$ が存在して,

$$\mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & \dots & \mathbf{K}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_0 & \dots & \mathbf{K}_{k-1} \\ & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

とすることができる. ただし, $\mathbf{S}$ は行フルランクである. よって,

$$\mathbf{V} \cdot D_{\hat{u}_k} \mu_k(x, \hat{u}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}'(x, \hat{u}_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

なる行フルランクな行列 $\mathbf{S}'(x, \hat{u}_k)$ が存在し, 二つの次元は一致する.

これらの結果より, 定理は証明された. $\square$

6. 結 言

一般的な非線形系のボルテラ級数表現と系の挙動を表わす微分方程式の間の関係は linear analytic system ほど明らかではないが, 3節のように出力を微分してゆくことによって, 入出力関係が線形であることの簡単な条件を得ることができた. さらに, 一般的な非線形系の入出力線形化問題を考察し, 入出力線形化が可能であるための必要十分条件および制御則の導出法を非線形構造アルゴリズムによって求めた.

ここで用いた非線形構造アルゴリズムは, Lee and Marcus⁴⁾ で用いられている離散時間非線形構造アルゴリズムの連続時間版というべきものである. よって, Isidori and Ruberti²⁾ の非線形構造アルゴリズムと文献4)のその中間的なものとなっている.

本論文の入出力関係の線形化は, 系の安定化は考慮していない. 実際, (5.9) 式の制御則による閉ループ系の極は, すべて原点にある. ただし, (5.9) 式のフィードバックにより線形化した後, $\gamma_1(x), \dots, \gamma_q(x), \bar{\gamma}_1(x), \dots, \bar{\gamma}_q(x)$ および新しい入力 $\hat{u}_k$ の線形結合よりなるフィードバックで, 状態量のうち可観測な部分を安定化することができる.

実際に制御則を構成する際に問題となるのは, (5.8) 式より (5.9) 式を得るときに u に関して解析的に解くことができない場合である. このような場合は, なんらかの数値解法あるいは近似解法を用いることが必要となる. また, 制御則の局所性に関係することであるが, (5.8) 式の逆写像が一意に決定しない場合や, (5.8) 式の左辺の値域が $\mathbf{R}^{r_q}$ 全体ではなく制限される場合があることに注意しなければならない.

本論文の結果を用いることによって, 線形系を規範モデルとしたモデル追従制御, 線形のエラーシステムをもつオブザーバなどの研究 (たとえば文献5)) を

一般の非線形系に拡張することができるであろう.

参考文献

- 1) B. Jakubczyk and W. Respondek: On Linearization of Control Systems, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Mathematiques, **28**-9~10, 517/522 (1980)
- 2) A. Isidori and A. Ruberti: On the Synthesis of Linear Input-Output Responses for Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, **4**-1, 17/22 (1984)
- 3) R. M. Hirschorn: Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-24**-6, 855/865 (1979)
- 4) H.G. Lee and S.I. Marcus: On Input-Output Linearization of Discrete-Time Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, **8**-3, 249/259 (1987)
- 5) A.J. Krener and W. Respondek: Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamics, SIAM J. Contr. Optim., **23**-2, 197/216 (1985)
- 6) A. Isidori: Nonlinear Control Systems: An Introduction, 2nd Edition, Springer-Verlag (1989)