行列ポリトープの計算容易な安定規準

小 亀 英 己*・木 田 浩*・森 武 宏**

An Easy-to-Compute Criterion for Stability of Matrix Polytopes

Hideki KOKAME*, Hiroshi KIDA* and Takehiro MORI**

In the case where stability of a linear system with uncertain parameters is concerned, realizable system matrices are often described as a polytope of matrices. However, stability condition of a matrix polytope has not been fully developed and moreover easy-to-compute stability criteria are few. Among them is such that if a positive-definite quadratic form be a common Lyapunov function for all vertex members of the polytope, then the matrix polytope is stable.

In this paper, this criterion is extended to the case where a number of positive-definite quadratic forms are available, leading to a new easy-to-compute criterion which can assure stability for a wider class of problems. This stability criterion can be performed on a standard routine for linear programming. The class of multi-tuples of quadratic forms that satisfy the stability criterion is characterized in relation to other classes of the similar meaning. A systematic use of the proposed criterion for stability of perturbed systems is demonstrated by an example.

Key Words: matrix polytope, stability, Lyapunov function, linear programming

1. はじめに

近年、不確定パラメータを有する線形システムのロバスト安定性研究と関連して、行列ポリトープと呼ばれる次式の行列集合が安定、すなわち、すべての集合要素が安定行列であるための条件について関心が寄せられている。

$$G = \{A = u_1 A_1 + \dots + u_k A_k : u_j \geq 0, \\ j = 1, \dots, k; u_1 + \dots + u_k = 1\} \quad (1)$$

$$A_j \in R^{n \times n}, j = 1, \dots, k$$

Barmish ら¹⁾は、頂点行列 A_i がすべて安定行列であっても、 G の安定性は保証されないことを示した。また Cobb ら²⁾はすべての $2n-4$ 次元面が安定であれば、 G の安定性が保証されることを示した。

しかしながら、 G が安定であるための必要かつ十分条件が知られているのは $k=2$ の場合だけである^{3), 4)}。この条件にしても頂点行列の Kronecker 和を含む $n^2 \times n^2$ 行列の固有値が必要である。このことから、もっと計算の容易な G の安定判別法が望まれる。

この観点から注目されるのは、つぎの命題である。

[命題 1] 正定値対称行列 P が

$$PA_j + A_j^T P < 0, j = 1, \dots, k \quad (2)$$

を満たすならば、すべての $A \in G$ に対して

$$PA + A^T P < 0 \quad (3)$$

すなわち、行列ポリトープ G は安定である。

特に P を単位行列とした場合の条件 (2) は簡単な十分条件として文献 5), 6) で報告されている。命題の成立は次式から容易に知れる。

$$PA + A^T P = \sum_{j=1}^k u_j (PA_j + A_j^T P) < 0 \quad (4)$$

命題 1 から、正定値 2 次形式 $x^T P x$ がすべての $A \in G$ に共通のリアプノフ関数となるための条件は容易に検証できる。しかしながら、一般に G が安定であっても、(2) の条件を満たす $P > 0$ が存在するとは限らない。そこで、積極的に複数の正定値 2 次形式を用いれば、より広いクラスの G の安定性を保証することができると考えられる。これに関連して、Shi ら⁷⁾はすべての頂点行列 A_j に対して、それぞれリアプノフ関数 $x^T P_j x$ が得られたものとして、ある正方行列に対する代数的条件の形で G の安定規準を与えた。著者ら⁸⁾は同じ行列が P 行列であれば、十分であることを指摘した。これらの方法は常に頂点と同じ数だけリアプノ

* 大阪工業大学 大阪市旭区大宮 5-16-1

** 京都大学工学部 (現在、京都工芸繊維大学工芸学部
京都市左京区松ヶ崎御所海道町)

* Osaka Institute of Technology, Osaka

** Faculty of Engineering, Kyoto University (Presently, Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Kyoto)

(Received January 26, 1990)

(Revised March 28, 1990)

フ関数を用いるところに不満が残る. この点, 一般に m 個の正定値2次形式から安定判別できる方法があれば, 安定性の条件が満足されるまで m を増していくことで, 実用性の高い安定判別法が得られるものと考えられる. 以下では, 正定値2次形式 $\mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ と正定値対称行列 P を同一視し, 正定値対称行列の組 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ が与えられるものとする.

本論文の目的は, $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ から命題1を含む計算が容易な安定規準を与え, さらにこの規準を満たす2次形式のクラスの持つ性質をいくつか明らかにすることである.

本論文はつぎのように構成されている. 第2章では, 提案する規準の特質を明らかにするための準備として, まず G の安定性を保証する $\{P_i\}$ のクラスをいくつか設定し, これらの包含関係について詳しく吟味する. 第3章では, ある $m \times k$ 行列を導入し, これに基づいて第2章と平行したクラスを設定する. このときこれらのクラスは等価となることが示される. またこのクラスは線形計画法の標準的解法によって判別可能であり, 命題1を含んだ安定規準を与えることが示される. 第4章では, この安定規準の使用例を示す.

本文中, I_n で n 次単位行列を, 対称行列 P , Q に対して, $P > 0$ ($P < 0$) で P が正 (負) 定値であることを, $P > Q$ ($P \geq Q$) で $P - Q$ が正 (非負) 定値であることを表わす. またベクトル $\mathbf{u}$ に対して, $\mathbf{u} > 0$ ($\mathbf{u} \geq 0$) で $\mathbf{u}$ の要素がすべて正 (非負) であることを表わす.

2. G の安定性を保証する $\{P_i\}$ のクラス

命題1の条件(3)は, 行列ポリトープ G が安定であるための最も簡明な十分条件である. そこで, 条件(3)を満たす P を G の“1点リアプノフ・カバー”であると呼ぶことにする. これに対して, 正定値対称行列を複数個利用すれば, この十分条件の保守性を減らすことができるであろう. この意図を忠実に書き表わしたものがつぎの定義である.

【定義1】 正定値対称行列の組 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ があり, 任意の $A \in G$ に対して

$$P_i A + A^T P_i < 0 \quad (5)$$

となる $P_i (i=1, \dots, m)$ が存在するとき, $\{P_i\}$ は G の“(m 点)リアプノフ・カバー”と呼び, その全体を $\mathcal{P}_m$ で表わす.

また, 正定値行列の組 $\{P_i \in R^{n \times n} : i=1, \dots, m\}$ が与えられたとき, その凸包 Π

$$\Pi = \{P = v_1 P_1 + v_2 P_2 + \dots + v_m P_m : v_i \geq 0, i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m v_i = 1\} \quad (6)$$

の要素はすべて正定値対称行列であることから, 命題1のもう一つの拡張がつぎの定義によって与えられる.

【定義2】 Π の要素で, G の1点リアプノフ・カバーとなるものが存在するとき, $\{P_i\}$ は G の“拡張1点リアプノフ・カバー”と呼び, その全体を $\mathcal{P}_e$ で表わす.

つぎの定義は, 行列 $A \in G$ によってリアプノフ関数が異なることを許し, Π の正定値性を活用しようとするものである.

【定義3】 任意の $A \in G$ に対して

$$PA + A^T P < 0 \quad (7)$$

となる $P \in \Pi$ が存在するとき, $\{P_i\}$ は G の“凸リアプノフ・カバー”と呼び, その全体を $\mathcal{P}_c$ で表わす.

これら定義の条件を満足する $\{P_i\}$ が存在するとき, G の安定性がいえるのは自明であろう. この章の残りでは, これら三つのクラスの包含関係について少し詳しく検討しておく. まず, つぎの関係が成立する.

【命題2】 $\mathcal{P}_e \supset \mathcal{P}_c$ かつ $\mathcal{P}_c \supset \mathcal{P}_m$

一見したところ $\{P_i\}$ がリアプノフ・カバーであれば, P_i の凸結合で1点リアプノフ・カバーとなるものが存在するように思われる. しかし, 後にみるようにこれは正しくない. 一般に命題2以上の包含関係はまったく成立しない.

このことは $k=m=2$ として例を挙げて示すことができる. これは $k=m=2$ のとき, 与えられた $\{P_1, P_2\}$ が定義の条件を満たすか否かは容易に判定できるからである. 例を示す前に, その判定法について述べる. ここで G の要素, Π の要素をそれぞれ

$$\begin{aligned} A_\lambda &= (1-\lambda)A_1 + \lambda A_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ P_\mu &= (1-\mu)P_1 + \mu P_2, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \end{aligned} \quad (8)$$

のように表わし, この両者の組合せから定まる対称行列

$$Q_{\mu\lambda} = -P_\mu A_\lambda - A_\lambda^T P_\mu \quad (9)$$

が正定値となる (λ, μ) を $\lambda-\mu$ 平面に正方形 $A = \{(\lambda, \mu) : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ 内部の領域 Γ として表わしたとする. このとき, Γ の形状により $\{P_1, P_2\}$ が前記のクラスに属するか否かが判別される. すなわち

【補題1】

(i) $\{P_1, P_2\} \in \mathcal{P}_m \iff \Gamma_{\mu=0} \cup \Gamma_{\mu=1} \supset [0, 1]$.

(ii) $\{P_1, P_2\} \in \mathcal{P}_e \iff \Gamma_\mu \supset [0, 1]$ なる $\mu \in [0, 1]$ が存在する.

(iii) $\{P_1, P_2\} \in \mathcal{P}_c \iff$ 任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対し, $\Gamma_\lambda \neq \emptyset$ (空集合).

ただし, $\Gamma_\lambda, \Gamma_\mu$ は Γ の切断

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda &= \{\mu : (\lambda, \mu) \in \Gamma\} \\ \Gamma_\mu &= \{\lambda : (\lambda, \mu) \in \Gamma\} \end{aligned} \quad (10)$$

を表わす。

領域 Γ を数値的に求めることは、容易である。実際、固有値の連続性から領域 Γ の境界上で $Q_{\mu\lambda}$ は零固有値をもつ。すなわち行列式が零となる。また

$$Q_{\mu\lambda} = (1-\mu)(1-\lambda)Q_{11} + \mu(1-\lambda)Q_{21} \\ + (1-\mu)\lambda Q_{12} + \mu\lambda Q_{22} \quad (11)$$

$$Q_{ij} = -P_i A_j - A_j^T P_i, \quad i, j = 1, 2 \quad (12)$$

より、 $Q_{\mu\lambda}$ の行列式は λ と μ の多項式として得ることができる。したがって、 Γ を得るにはこの根が作る曲線群によって分割された各領域のなかから Γ に属するものをとればよい。これは領域の1点での正定値性を確かめれば十分である。

さて、上述の方法をつぎの例に適用してみる。

〔例1〕

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -21 & -15 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

これに対する領域 Γ は Fig. 1 に示される。補題1からこの $\{P_1, P_2\}$ は、 $G(A_1, A_2)$ のリアプノフ・カバーでもなく、拡張1点リアプノフ・カバーでもないが凸リアプノフ・カバーとなっていることがわかる。

ここで、 $G(A_1, A_2)$ は A_1, A_2 を端点とする行列ポリトープを表わす。

つきに A_1 をそのままとし、 A_2 の代わりに

$$A_s = (1-s)A_1 + sA_2, \quad 0 < s < 1 \quad (15)$$

をとった場合を考える。このとき(8)に対応して $A_\lambda = (1-\lambda)A_1 + \lambda A_s$ を考えたとき

$$PA_\lambda = (1-\lambda)PA_1 + \lambda PA_s \\ = (1-\lambda)PA_1 + \lambda(1-s)PA_1 + \lambda s PA_2 \\ = (1-\lambda s)PA_1 + \lambda s PA_2 \quad (16)$$

となることからわかるように、 $G(A_1, A_s)$ に対する

Fig. 1 Region Γ for Example 1

Fig. 2 Inclusion relation of the classes $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_e$, and $\mathcal{P}_c$

(9)の $Q_{\mu\lambda}$ は $G(A_1, A_2)$ に対する $Q_{\mu, s\lambda}$ として定まる。このことから、Fig. 1で λ の $[0, s]$ の部分を $[0, 1]$ に拡大すると、 $G(A_1, A_s)$ に対する領域 Γ を得る。

〔例2〕 Fig. 1 に戻って $s=0.7$ とした A_s を $\bar{A}_2$ とする。

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -17.7 & -6.9 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

このとき $\{P_1, P_2\}$ は $G(A_1, \bar{A}_2)$ の拡張1点リアプノフ・カバーであるが、リアプノフ・カバーではないことがわかる。

〔例3〕 例2の逆の例も Fig. 1 から容易に知ることができる。ここでは、 P_1 をそのままにして P_2 の代わりに、

$$\bar{P}_2 = 0.4P_1 + 0.6P_2 = \begin{bmatrix} 3.4 & 0.4 \\ 0.4 & 2.4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

とし、 $\{P_1, \bar{P}_2\}$ と $G(A_1, A_2)$ との関係を調べる。先と同様な理由で、この場合の領域 Γ は、Fig. 1で μ の $[0, 0.6]$ の部分を $[0, 1]$ に拡大して得られる。補題1の(i)と(ii)から、本例では、リアプノフ・カバーであるが、拡張1点リアプノフ・カバーではないことがわかる。

〔例4〕 同様に、 $\{P_1, \bar{P}_2\}$ は $G(A_1, \bar{A}_2)$ に対する三つのクラスのすべてに属していることがわかる。

Fig. 2 は、以上の4例を三つのクラスの包含関係の図に併せて示したものである。

3. 計算が容易な安定規準

前章では、行列ポリトープの安定性を保証する $\{P_i\}$ のクラスを三つ示したが、いずれのクラスも手

軽に判定できる代数的条件の形に表現することは困難である。容易に検証できるクラスを設定するため、まず与えられた正定値対称行列の組 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ と G の頂点行列 $\{A_j : j=1, \dots, k\}$ より、 $m \times k$ 行列 $F = \{f_{ij}\}$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \lambda_{\min}(Q_{ij}) \\ Q_{ij} &= -P_i A_j - A_j^T P_i, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, k \end{aligned} \quad (19)$$

ただし $\lambda_{\min}(\cdot)$ は最小固有値を表わす。特に $m=k$ と選んだ場合の正方行列 F を用いた代数的安定条件についてはすでにいくつか知られている^{7), 8)}。

行列 F の役割はつぎの補題で示される。

〔補題2〕 Π の任意の要素

$$\begin{aligned} P &= v_1 P_1 + v_2 P_2 + \dots + v_m P_m, \\ v_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

と G の任意の要素

$$\begin{aligned} A &= u_1 A_1 + u_2 A_2 + \dots + u_k A_k, \\ u_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k u_j = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

に対して

$$-PA - A^T P \geq v^T F u I_n \quad (22)$$

が成り立つ。ただし、 $u^T = [u_1, \dots, u_k]$, $v^T = [v_1, \dots, v_m]$ である。

(証明)

$$\begin{aligned} -PA - A^T P &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_i u_j Q_{ij} \\ &\geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k v_i u_j \lambda_{\min}(Q_{ij}) I_n \\ &= v^T F u I_n \end{aligned} \quad (23)$$

$\{P_i\}$ のクラス $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_e$, $\mathcal{P}_c$ のそれぞれに対応して、 F 行列を用いたつぎのようなリアプノフ・Fカバール概念を導入する。以下の定義中で、 Ω_n は正の整数 n に対して、

$$\Omega_n = \{x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i=1, \dots, n\} \quad (24)$$

を表わす。

〔定義1'〕 任意の $u \in \Omega_k$ に対して、ベクトル Fu に正の要素が必ず存在するとき、 $\{P_i\}$ は G の (m 点) リアプノフ・Fカバールと呼び、その全体を $\mathcal{F}_m$ で表わす。

〔定義2'〕 ベクトル $v \in \Omega_m$ で、

$$v^T F u > 0, \quad \forall u \in \Omega_k \quad (25)$$

となるものが存在するとき、 $\{P_i\}$ は G の拡張1点リアプノフ・Fカバールと呼び、その全体を $\mathcal{F}_e$ で表わす。

〔定義3'〕 任意の $u \in \Omega_k$ に対して、 $v^T F u > 0$ となる $v \in \Omega_m$ が存在するとき、 $\{P_i\}$ は G の凸リアプノフ・Fカバールと呼び、その全体を $\mathcal{F}_c$ で表わす。

つぎの命題は補題2から直ちに導かれる。

〔命題3〕 $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{P}_m$, $\mathcal{F}_e \subset \mathcal{P}_e$ かつ $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{P}_c$ 。

(証明) $\{P_i\} \in \mathcal{F}_e$ ($\{P_i\} \in \mathcal{F}_c$) の場合、任意の $A \in G$ に対して (21) 式の重みベクトル u が Ω_k に属することから定義2' (定義3') のなかでその存在を保証されたベクトル $v \in \Omega_m$ に対して、 v を重みとする (20) 式の行列 $P \in \Pi$ が定義2 (定義3) の条件を満たすものであることが (22) 式よりわかる。ゆえに $\{P_i\} \in \mathcal{P}_e$ ($\{P_i\} \in \mathcal{P}_c$)。つぎに $\{P_i\} \in \mathcal{F}_m$ の場合、任意の $u \in \Omega_k$ に対して、ベクトル Fu は正の要素を少なくとも一つもつ。この一つの列番号を d として、第 d 要素のみ1、他は零となるベクトル e_d を定義する。 (22) 式より

$$-P_d A - A^T P_d \geq e_d^T F u I_n = (Fu)_d I_n > 0 \quad (26)$$

ゆえに P_d が定義1の条件(5)を満たすものとなっている。

さて、 F 行列によるカバールの概念は、すべて等価であることが示される。すなわち

〔命題4〕 $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_m = \mathcal{F}_c$ 。

(証明) $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_e$ を示す。 $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_e$ は定義より明らかである。 $\mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_e$ を示す。いま $\{P_i\} \in \mathcal{F}_m$ と仮定する。このとき定義1'の条件が否定され、

$$Fu_0 \leq 0 \quad (27)$$

となる $u_0 \in \Omega_k$ が存在することになる。ここで任意の $v \in \Omega_m$ に対して、 $v \geq 0$ であるから、

$$v^T F u_0 \leq 0, \quad \forall v \in \Omega_m \quad (28)$$

すなわちこの u_0 に対しては、定義3の条件を満たす $v \in \Omega_m$ は存在しない。ゆえに $\{P_i\} \notin \mathcal{F}_e$ となり、結論を得る。

つぎに $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_m$ を示す。定義2'の条件は

$$v^T F > 0, \quad v \geq 0 \quad (29)$$

を満たす v が存在することと等価である。実際、(25) 式で u として第 i 要素のみ1、他は零となるベクトル $e_i (\in \Omega_k)$ をとると、

$$v^T F e_i = (v^T F)_i > 0, \quad i=1, \dots, k \quad (30)$$

ゆえに定義2'を満たす v は (29) 式をも満たしている。逆に (29) 式から、任意の $u \geq 0$ ($u \neq 0$) に対して $v^T F u > 0$ を得る。 (29) 式の v は $v \neq 0$ であり、また Ω_k のベクトルはすべて非零の非負ベクトルであることから、 v を定数倍して (25) 式を満たす Ω_m のベクトルを得ることがわかる。

また定義1'の条件は

$$Fu \leq 0, \quad u \geq 0, \quad u \neq 0 \quad (31)$$

を満たす u が存在しないことと等価であることに注意する。ところで (29) 式に解が存在する条件と (31) 式に解が存在しない条件が等価であることは Ville によって示されている (たとえば文献 9) を参照されたい)。ゆえに $\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_m$ となる。■

命題 4 から、定義 1', 定義 2', 定義 3' の条件を満たす $\{P_i\}$ は、単に G のリアプノフ・Fカバーであるといってさしつかえなくその全体を $\mathcal{F}$ と書くことにする。このリアプノフ・Fカバーのクラス $\mathcal{F}$ は、つぎの定理で特徴づけられる。

《定理 1》

(i) $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_m \cap \mathcal{P}_e$.

(ii) $\{P_i : i=1, \dots, m\} \in \mathcal{F}$ なるためには、つぎの線形不等式を満たす解が存在しないことが必要かつ十分である。

$$\begin{aligned} f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \dots + f_{1k}u_k &\leq 0 \\ f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \dots + f_{2k}u_k &\leq 0 \\ &\vdots \\ f_{m1}u_1 + f_{m2}u_2 + \dots + f_{mk}u_k &\leq 0 \\ -u_1 - u_2 - \dots - u_k &\leq -1 \end{aligned} \quad (32)$$

ただし

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_k \geq 0 \quad (33)$$

(証明) (i) は命題 3, 命題 4 から直ちに得られる。(ii) は $\{P_i\} \in \mathcal{F}_m (= \mathcal{F})$ の等価条件を表わす不等式 (31) を別の形に書き表わしたものである。実際、(31) 式に解 u が存在すれば、 $\lambda u (\lambda > 0)$ も (31) 式の解であるので、ベクトル u の範囲を $u \geq 0, u \neq 0$ から $u \geq 0, u_1 + u_2 + \dots + u_k \geq 1$ に限定しても何ら制約を付け加えるものではない。すなわち (31) 式に解が存在するのは、(32), (33) 式に解が存在するときであり、またその場合に限る。■

定理 1 (ii) は、行列ポリトープ G に対する計算が容易な安定規準を与えている。実際、判定は (32), (33) 式を制約条件とする線形計画問題が可能解をもつかどうかに着するが、これには適当な目的関数を設定した後、シンプレックス法などの標準的なルーチンを利用して調べることができる。また定理 1 (i) は $\{P_i\}$ がこの規準を満たせば、 P_i の凸結合で G の 1 点リアプノフ・カバーとなるものがあること、任意の $A \in G$ に対して、(5) 式を満たす P_i が存在することを意味している。

つぎに従来方法との関係について述べておく。文献 7) では、 $m=k$ としたとき正の対角行列 $D = \text{diag}\{d_i\}$ で、 $DF + F^T D$ が厳密に共正定、すなわち任意のベクトル $x \geq 0 (x \neq 0)$ に対して

$$x^T(DF + F^T D)x = 2x^T DF x > 0$$

となる D の存在が G の安定条件として挙げられている。このとき任意の $u \in \Omega_k$ に対して、ベクトル $v = [d_1 u_1 \dots d_k u_k]^T$ は定義 3' の条件を満たしており、したがって $\{P_i\} \in \mathcal{F}_e$ を得る。また文献 8) では同じ設定のもとで、 F が P 行列であれば安定であることを示した。このとき P 行列の性質から、任意の $u \neq 0$ に対して $u_i(Fu)_i > 0$ なる i が存在する。これから $u \geq 0 (u \neq 0)$ の場合、ベクトル Fu は必ず正の要素をもつことがわかるので、定義 1' より $\{P_i\} \in \mathcal{F}_m$ を得る。以上の議論から、(ii) の安定規準はこれらの代数的規準を含んだものということができる。

最後に $m=1$, すなわち一つだけ正定値対称行列を使う場合では、これまで現れたクラスはすべて等価であることに注意しておく。

《定理 2》 $m=1$ のとき、 $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_e = \mathcal{P}_e = \mathcal{F}$.

(証明) $\mathcal{F}_m = \mathcal{P}_e = \mathcal{F}_e$ は定義より自明である。定理 1 の (i) より、 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_e$ を示せば証明は終る。

$P_1 \in \mathcal{P}_e$ とすると、 P_1 は命題 1 の条件を満たすことになる。このとき (2) 式より、

$$f_{1j} > 0, \quad j=1, \dots, k \quad (34)$$

したがって条件 (ii)

$$\begin{aligned} f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \dots + f_{1k}u_k &\leq 0 \\ -u_1 - u_2 - \dots - u_k &\leq -1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_k \geq 0 \end{aligned}$$

を満たす解がないことは明らかである。ゆえに $P_1 \in \mathcal{F}$ が導かれた。■

定理 2 はクラス $\mathcal{F}$ が命題 1 の 1 点リアプノフ・カバーの拡張になっていることを示している。

4. 例 題

定理 1 (ii) の安定規準で、行列ポリトープ G の安定性をテストするとき、整数 m の取り方、 P_i の選び方に任意性が残る。一つの考え方は、 $m=1$ の場合から出発し、 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ が Fカバーでないと知れたときは、さらにもう一つの正定値行列 P_{m+1} を追加して、 $m+1$ 個の場合の Fカバーになる可能性を順次追求することである。

この考え方に従って、つぎのような二つの不確定パラメータ a, b をもつ線形システムの安定性を検討してみよう。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -a \\ 1+2a & -2 & 1-3b \\ -1-2a & 4b & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$|a| \leq 1, \quad |b| \leq 1 \quad (36)$$

(a, b) = (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) の場合のシステム行列をそれぞれ A_1, A_2, A_3, A_4 とすると、

(35), (36)式で定められたシステム行列の全体は A_1, A_2, A_3, A_4 を頂点行列とするポリトープ G となることに注意する.

このような問題ではまず $a=b=0$ のノミナルなシステム行列 A_0 に対して

$$PA_0 + A_0^T P = -I_3 \quad (37)$$

のリアプノフ方程式の解 P_1 の正定値性を調べることから始めるのが自然である. 正定値でないことがわかれば, G の安定性は否定され, テストはここで終わる. 例の場合, $P_1 > 0$ である. そこで $m=1$ として, この P_1 を採る. このとき

$$F = [-0.14 \ 0.20 \ 0.31 \ 0.39] \quad (38)$$

明らかに $u = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ が (32) 式の解となるため, G の安定性は結論されない.

$m=2$ に進む前に (38) 式を見直すと, 第1列要素が負になっている. これは定義式 (19) からみて頂点行列 A_1 の安定性がいまだ保証されていないことを意味している. そこで

$$PA_1 + A_1^T P = -I_3 \quad (39)$$

の解の正定値性を確かめる. 例の場合, 正定値であるので, この解を P_2 として $m=2$ に進む. このとき

$$F = \begin{bmatrix} -0.14 & 0.20 & 0.31 & 0.39 \\ 1.00 & 0.13 & 0.10 & -0.77 \end{bmatrix} \quad (40)$$

となる. ここで適当な目的関数を設け, (32), (33) 式の条件のもとでシンプレックス法を適用するとこの問題には可能解がないことがわかる. かくしてシステム (35), (36) 式のロバスト安定性が保証された.

またこの例では (40) 式から直接,

$$P = 3/4 P_1 + 1/4 P_2 \quad (41)$$

が G の1点リアプノフ・カバーになることが確かめられる.

5. おわりに

行列ポリトープは不確定パラメータを含むシステムを表現するための適切なモデルであるが, その特徴を生かした実用的安定判別法は数少ない. そこで本論文では, 複数の正定値対称行列 $\{P_i : i=1, \dots, m\}$ が与えられたものとして, これを頂点とするポリトープの全体をリアプノフ関数の候補と考えることで, より保

守性の少ない安定条件を求めようとした. 得られた安定規準は線形計画法の標準的なルーチンにより容易に実行できるものであり, また従来方法を含むものとなっている. またこの規準を満たす $\{P_i\}$ のクラスのもつ特徴点をいくつか明らかにした.

残された課題としては, 第4章の例で示したような構成的安定判別法をより洗練された, 系統だったものとする, 理論的に興味をもたれる課題としては, 正定値対称行列を複数個用いることでもたらされる保守性減少の定量的評価法, 安定な行列ポリトープ全体のなかで, (個数 m には無関係として) リアプノフ・Fカバーをもつ行列ポリトープのなすクラスの特徴付けなどが挙げられる.

本論文の結果は, 行列ポリトープのサブクラスである区間行列の安定判別にもそのまま適用できることに注意しておく.

参考文献

- 1) B.R. Barmish, M. Fu and R. Saleh: Stability of a Polytope of Matrices: Counterexamples, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-33-6**, 569/572 (1988)
- 2) J.D. Cobb and C.L. Demarco: The Minimal Dimension of Stable Faces Required to Guarantee Stability of a Matrix Polytope, IEEE Trans., **AC-34-9**, 990/992 (1989)
- 3) S. Bialas: A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials or Matrices, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, **33-9**, 473/480 (1985)
- 4) M. Fu and B.R. Barmish: Stability of Convex and Linear Combinations of Polynomials and Matrices Arising in Robustness Problems, Proc. Conf. Inform. Sci. Syst., John Hopkins Univ., Baltimore (1987)
- 5) C.-L. Jiang: Sufficient Condition for the Asymptotic Stability of Interval Matrices, Int. J. Control, **46-5**, 1803/1810 (1987)
- 6) M. Mansour: Sufficient Conditions for the Asymptotic Stability of Interval Matrices, Int. J. Control, **47-6**, 1973/1974 (1988)
- 7) Z. C. Shi and W. B. Gao: Stability of Interval Parameter Matrices, Int. J. Control, **45-3**, 1093/1101 (1987)
- 8) 小亀, 木田, 森: 区間パラメータをもつ線形システムのロバスト安定条件, システム制御情報学会論文誌, **3-4**, 118/120 (1990)
- 9) V. Chvatal: 線形計画法, 343, 啓学出版 (1988)