ディジタル制御系の相補感度特性

成 学 慶*・原 辰 次*

Complementary Sensitivity Characteristics in Digital Control Systems

Hak-Kyung SUNG* and Shinji HARA*

We derive an integral-type constraint on the complementary sensitivity function in digital control systems. Some design guidances are proposed for the pole assignment of digital controller with computational time delay to improve the complementary sensitivity characteristics.

Key Words: complementary sensitivity, digital control system, relative degree, integral-type constraint

1. はじめに

フィードバック制御系の設計において、相補感度関係はプラントの不確かさに対するロバスト安定性に密接に関係している。このため、連続時間制御系、離散時間制御系だけではなくディジタル制御系（連続時間プラントをディジタル補償器で制御する）に対しても相補感度関数に対する制約条件に関するいくつかの研究がある^{1)~3)}。しかし、ディジタル制御系に対しては離散化システムの相対次数が1の場合に対する結果しか得られていない³⁾。すなわち、演算時間遅れやむだ時間がある系に対する結果はまだ得られていない。ここでは、Fig. 1 に示す1入力1出力のディジタル制御系を考え、まず相対次数を1に限定しない場合の相補感度関数の積分制約条件を求める。つぎに、この結果を用いて、演算時間遅れがある場合の相補感度特性を改善するための補償器の極配置に対する設計指針を与える。

Fig. 1 Digital control system

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received March 9, 1990)

(Revised May 17, 1990)

2. 相補感度関数の積分制約条件

Fig. 1 で、一巡伝達関数を $L(z) := P_c(z)C(z)$ と置くと、相補感度関数と感度関数は

$$T(z) := \frac{L(z)}{1+L(z)}, \quad S(z) := \frac{1}{1+L(z)} \quad (2.1)$$

と定義される。さらに、 $z=1/\lambda$ の変換を施し、 $\hat{L}(\lambda) := L(1/\lambda)$ と定義して置くと、つぎの補題を得る³⁾。

[補題1] $L(z)$ は真にプロパーで、その相対次数が $m(\geq 1)$ 、その不安定零点が $\beta_i (i=1, \dots, \mu)$ とする。

このとき、Fig. 1 の閉ループ系が安定ならば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |T(e^{j\phi})| d\phi \\ &= \sum_{i=1}^\mu \log |\beta_i| + \log \left| \frac{\hat{L}^{(m)}(0)}{m!} \right| \\ &= \sum_{i=1}^\mu \log |\beta_i| + \log |b_k|, \end{aligned} \quad (2.2)$$

が成り立つ。ここで、 b_k は $L(z)$ の分母多項式がモニク多項式の場合の分子の最高次数の係数である。□

つぎに、(2.2)式を開ループ系および閉ループ系の極と零点との関係で書き直すと、つぎの主要定理を得る。

《定理1》 相対次数が $m(\geq 1)$ の一巡伝達関数 $L(z)$ の極を $\alpha_i (i=1, \dots, n)$ 、不安定零点を $\beta_j (j=1, \dots, \mu)$ とする。このとき、Fig. 1 の閉ループ系の極を p_i (ただし、 $|p_i| < 1: i=1, \dots, n$) に配置すると、つぎの関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |T(e^{j\phi})| d\phi \\ &= \sum_{i=1}^\mu \log |\beta_i| + \log |b_k| \\ &= \sum_{i=1}^\mu \log |\beta_i| + \log \left| \sum_{i=1}^n m\alpha_i - \sum_{i=1}^n m p_i \right| \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$= \sum_{i=1}^\mu \log |\beta_i| + \log \left| \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^m - \sum_{i=1}^n p_i^m \right) \right| \quad (2.3b)$$

ただし、 $\sum_{i=1}^n i\alpha_i$ は $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ から j 個を取り足す組

合せを全部足したもので、 $\prod_{i=1}^n (z-\alpha_i)$ の $(-1)^j z^{n-j}$ 項の係数である。

(証明) (2.3a)式は、特性方程式の関係から容易に得られる。以下、簡単のため $\sum_{i=1}^n$ の代わりに $\sum_i$ または Σ と記す。 $\sum_i \alpha_i$ の定義から $L(z)$ を

$$L(z) = \frac{b_{n-m} z^{n-m} + \dots + b_1 z + b_0}{\prod_{i=1}^n (z-\alpha_i)} \quad (2.4)$$

と置くと

$$\begin{aligned} & z^n - \sum p_i z^{n-1} + \dots + (-1)^m \sum p_i z^{n-m} + \dots \\ & + (-1)^n \sum p_i \\ & = z^n - \sum \alpha_i z^{n-1} + \dots + (-1)^m \sum \alpha_i z^{n-m} + \dots \\ & + (-1)^n \sum \alpha_i \\ & + b_{n-m} z^{n-m} + \dots + b_1 z + b_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

の係数の比較より(2.3a)式が得られる。また

$$\sum^k \alpha_i = \sum^k p_i \quad (k=1, \dots, m-1) \quad (2.6)$$

の拘束条件が導かれる。

(2.3b)式を導くために $|m(\sum^m \alpha_i - \sum^m p_i)| = |\sum^m \alpha_i - \sum^m p_i|$ を証明する。 $m=1$ の場合は明らかであるので、 $m \geq 2$ の場合の証明のため、つぎの関係式を考える。

$$\begin{aligned} n \sum_i \mu \alpha_i &= \alpha_1 \sum_{j \neq 1} \mu^{-1} \alpha_j + \dots \\ &+ \alpha_n \sum_{j \neq n} \mu^{-1} \alpha_j + (n-\mu) \sum_i \mu \alpha_i \\ &= \sum_i \left[\alpha_i \sum_{j \neq i} \mu^{-1} \alpha_j \right] \\ &+ (n-\mu) \sum_i \mu \alpha_i \quad (\mu \geq 2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで

$$\begin{aligned} & \alpha_i \sum_{j \neq i} \mu \alpha_j \\ &= \alpha_i \left[\sum_{j \neq i} \mu \alpha_j + \alpha_i \sum_{j \neq i} \mu^{-1} \alpha_j - \alpha_i \sum_{j \neq i} \mu^{-1} \alpha_j \right] \\ &= \alpha_i \left[\sum_{j \neq i} \mu \alpha_j - \alpha_i \sum_{j \neq i} \mu^{-1} \alpha_j \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

の関係をを用いると

$$\begin{aligned} n \sum_i \mu \alpha_i &= \sum_i \left[\sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^{k+1} \alpha_i^k \sum_j \mu^{-k} \alpha_j \right] \\ &+ (-1)^{\mu+1} \sum_i \alpha_i^\mu + (n-\mu) \sum_i \mu \alpha_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるので、つぎの関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \mu \sum_i \mu \alpha_i &= \sum_i \left[\sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^{k+1} \alpha_i^k \sum_j \mu^{-k} \alpha_j \right] \\ &+ (-1)^{\mu+1} \sum_i \alpha_i^\mu \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.10)式において α_i を p_i に置き換えた式を(2.10)式から差し引くと

$$\begin{aligned} & \mu \left[\sum \mu \alpha_i - \sum \mu p_i \right] \\ &= \sum_i \left[\sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^{k+1} \left(\alpha_i^k \sum_j \mu^{-k} \alpha_j - p_i^k \sum_j \mu^{-k} p_j \right) \right] \\ &+ (-1)^{\mu+1} (\sum \alpha_i^\mu - \sum p_i^\mu) \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。 $\mu \leq m-1$ の場合、(2.6)式より

$$\begin{aligned} & \mu \left[\sum \mu \alpha_i - \sum \mu p_i \right] \\ &= \sum_i \left[\sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^{k+1} (\alpha_i^k - p_i^k) \sum_j \mu^{-k} p_j \right] \\ &+ (-1)^{\mu+1} (\sum \alpha_i^\mu - \sum p_i^\mu) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となり、(2.12)式の左辺が0であるので、漸化式によって

$$\sum \alpha_i^k = \sum p_i^k \quad (k=1, \dots, m-1) \quad (2.13)$$

が導かれる。

一方、 $\mu=m$ の場合は、(2.12)式は

$$\begin{aligned} & m \left[\sum^m \alpha_i - \sum^m p_i \right] \\ &= \sum_i \left[\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} (\alpha_i^k - p_i^k) \sum_j \mu^{-k} p_j \right] \\ &+ (-1)^{m+1} (\sum \alpha_i^m - \sum p_i^m) \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。したがって、(2.6)式と(2.13)式より、(2.3b)式が得られる。□

この定理は $m=1$ の場合の結果(文献3)の定理2.3)の拡張で、その場合と同様、一巡伝達関数の不安定零点だけではなく、その極(安定および不安定)が相補感度特性に影響を与えることに注意しておく。

3. 演算時間遅れがある場合の補償器の極配置

本章では、前章の定理に基づいて演算時間遅れがある場合の補償器の極配置問題を考察する。

ディジタル制御系では、一般につぎの仮定が成立する。

【仮定A】 $P(s)$ は真にプロパーな n_p 次の有理関数で、 $P_c(z)$ に関し以下の仮定が成立する。

(i) $P_c(z)$ の分子多項式は、 n_p-1 次、すなわち、相対次数は1。

$$(ii) \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_{pi} > 0, \quad \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_{pi}^2 > 0$$

ただし α_{pi} ($i=1, \dots, n_p$) は $P_c(z)$ の極。

(i) の仮定は、ほとんどすべてのサンプリング周期 $\tau > 0$ に対して成立する。(ii)の仮定は、 τ を $\tau < \pi/2\omega_M$ (ω_M は連続時間プラントの極の虚部の最大値)とすると、 α_{pi} はすべて $|\angle \alpha_{pi}| < \pi/4$ を満たすので、十分小さなサンプリング周期に対して成立する。よって、仮定Aは特に制約となる仮定ではない。

【仮定B】 $C(z)$ は演算時間遅れを含む、すなわち $C(z) = \hat{C}(z)/z$ と書ける。ここで、 $\hat{C}(z)$ の相対次数は0。

仮定 A, B より一巡伝達関数の相対次数は 2 となるので, 定理 1 で $m=2$ の場合の結果を用いて, $C(z)$ の極配置について以下検討する.

まず, 補償器の設計に際し, 以下の点が望ましいことに注意しておく.

1) 感度特性を良くするためには $C(z)$ の極を複素平面の単位円内に配置すること²⁾.

2) (2.2) 式の第 1 項より, 相補感度特性を良くするためには $C(z)$ の零点を複素平面の単位円内に配置すること.

一方, 定理 1 より, $m=2$ の場合は, (2.3b) 式の 2 項目はつぎのように書ける.

$$\log \frac{1}{2} |\sum p_i^2 - \sum \alpha_i^2|$$

$$= \log \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n p_i^2 - \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_{ci}^2 - \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_{pi}^2 \right|. \quad (3.1)$$

ただし, α_{ci} ($i=1, \dots, n_c$) は $\hat{C}(z)$ の極.

以上の考察より, 仮定 A, B のもとでつぎのような演算時間遅れのあるディジタル制御系に対する設計指針が得られる.

《設計指針》

(1) $|p_i| < 1$ で, $\sum \alpha_{pi} > 0$, $\sum \alpha_{pi}^2 > 0$ であるから, 相補感度特性を良くするためには, 補償器の極は $\sum p_i^2 - \sum \alpha_{ci}^2 > 0$ を満たし, $\sum p_i^2 - \sum \alpha_{ci}^2$ が $\sum \alpha_{pi}^2$ に近い値をもつように選ぶとよい. 特に, 閉ループ系の極は実軸上で配置する場合には, **Fig. 2** の I と II で斜線の領域または **Fig. 2** の III に配置するとよい.

(2) 有限整定制御の場合, 補償器の極はつぎの関係式

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right| = \left| \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_{ci}^2 + \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_{pi}^2 \right| \quad (3.2)$$

を小さくするように選ぶとよい. 特に, プラントの極が実極の場合は, 補償器の極を **Fig. 2** の III の中で (補償器も実極ならば原点の近い実数軸上で) 選んで配置する.

Fig. 2 Region for pole-assignment

Fig. 3 $|T(e^{j\phi})|$ in example

以上のことを, つぎの例題で確かめてみる.

〔例題〕 連続系のプラント $P(s)=1/(1-s)$ を離散化したプラント $P_c(z)=\frac{1-e^{\tau}}{z-e^{\tau}}$ を演算時間遅れをもつディジタル補償器 $C(z)=\frac{(\gamma z^2+\delta z+\varepsilon)}{z(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$ で有限整定制御する場合を考える. ただし, $\tau=0.1$ とする. **Fig. 3** はフリパラメータ $\alpha_1(\alpha_2)$ が, a) $\alpha_1=-0.6$, ($\alpha_2=-0.5052$), b) $\alpha_1=0.1$ ($\alpha_2=-1.2052$), c) $\alpha_1=0.5$ ($\alpha_2=-1.6052$) のように設定された場合の $|T|$ を示している. ただし, 有限整定となるようにその他のパラメータは選ばれており, $\alpha_1+\alpha_2=-e^{\tau}$ である. この図より, 補償器の極を原点の近くに配置したほうが相補感度特性が良くなることが確認できる. これは, $|\sum \alpha_i^2| = a) 0.6152$, b) 1.4625, c) 2.8267 の値からも確認できる. また, $\alpha_1+\alpha_2=-e^{\tau}$ であるので, $\sum \alpha_i^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2$ の最小値は, $\alpha_1\alpha_2$ の最大値で与えられるから, α_1 と α_2 が同じ値 (-0.5526) をもつことによって達成できる.

4. おわりに

本稿では, ディジタル制御系の相補感度関数の積分制約条件を求め, それに基づいて演算時間遅れのある場合の相補感度特性を改善するためのディジタル補償器の極配置方法に対する指針を示した. サンプル点間の情報も考慮した検討が今後の課題である.

最後に, 適切など助言をいただいた茨城大学近藤良講師に感謝の意を表します.

参考文献

- 1) J. S. Freudenberg and D. P. Looze: Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30-6**, 555/565 (1985)
- 2) H. K. Sung and S. Hara: Properties of Sensitivity and Complementary Sensitivity Function in Single-Input Single-Output Digital Control Systems, Int. J. Control, **48-6**, 2429/2439 (1988)
- 3) H. K. Sung and S. Hara: Properties of Complementary Sensitivity Function in SISO Digital Control Systems, Int. J. Control, **50-4**, 1283/1295 (1989)