修正した可達木とそのペトリネットの可達問題への応用

胡 小 華*

An Approach to Petri Net Reachability Problem Based on Modified Reachability Tree

Hu Xiaohua*

The reachability tree cannot, in general, be used to solve the reachability problem because of the existence of the ω symbol. The central issue of this paper is to limit the reachability tree to a finite one without using the ω symbol so that it can be used to solve the reachability problem. For this purpose, we consider the marking space in a Petri net as a Euclidean metric space, and limit the reachability tree in a hypersphere in the metric space based on the following ideas: Let Π be the set of all executable marking sequences from the initial marking to the final marking. Let a_π be the maximum value of the norms of all the markings included in such a marking sequence π which belongs to Π , and let a be the minimum value of all those a_π (if Π is empty, let a be 0). Then, the final marking is reachable if and only if it is included in the reachability tree in the hypersphere U_r with its center at the origin and radius r which is an upper bound for a . This paper also presents the way to get such an upper bound r of a for two classes of Petri nets (one of them includes the well-known trap circuit Petri net). Then, by creating the reachability tree in such a hypersphere U_r , we can determine not only whether the final marking is reachable or not, but also at least one firing sequence of transitions leading to it at the same time.

Key Words: discrete event system, Petri nets, reachability, metric space, hypersphere

1. ま え が き

ペトリネットは、離散事象システムをモデル化するための道具の一つである。これまで、ペトリネットの様々な応用や理論的解析が展開されている。

ペトリネットの解析において最も本質的な問題の一

つに、初期マーキングから目標マーキングに到達可能かどうかを判定する可達問題がある。

可達問題に対して、これまででは、可達性の判定に関する研究^{1)~4)}と、可達であるときに実際に目標マーキングに至るようなマーキングの遷移を起こさせるトランジションの発火系列を決定する問題に関する研究⁵⁾は別々に行われることが多かった。わずかに、両者を同時に行う方法として可達木⁶⁾を用いる方法が挙げられる。可達木はペトリネットの可達集合を表現するものであり、ペトリネットの解析にとってきわめて有用な道具の一つである。たとえば、可達木を用いることにより、安全性、有界性、保存性および被覆性の問題を解くことができる⁶⁾。しかしながら、この方法では、 ω 記号を用いた結果として生じた情報の損失のため、可達問題を一般的に解くことはできない。

そこで、本論文では、はじめに3章においての記号を使わずに可達木を有限木に制限する方法を考案する。そのため、マーキング全体の集合をマーキングのユークリッド・ノルムを導入して一つの距離空間にする。そして、つぎのような理由から、可達木をその距離空間における一つの超球の中に制限することを考える：

初期マーキング μ_0 から目標マーキング μ_f への遷移列全体の集合を Π 、 Π に属する一つの遷移列 π に含まれるマーキングのノルムの最大値を $a_\pi, a(\mu_0, \mu_f) = \min \{a_\pi | \pi \in \Pi\}$ (ただし、 Π が空集合のとき、 $a(\mu_0, \mu_f) = 0$) とする。このとき、 $a(\mu_0, \mu_f)$ の一つの上界(注1) r を何らかの方法で知ることができれば、原点を中心とする半径 r の超球 U_r を作ると、 μ_f が μ_0 から可達であるとき、かつそのときに限り μ_f が超球 U_r 中の可達木に含まれる。さらに、マーキング距離空間における任意の超球に含まれるマーキング全体の集合が有限集合であるという性質に基づいて、上記

* 豊橋技術科学大学 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1

* Toyohashi University of Technology, Toyohashi
(Received June 27, 1991)

(注1) 本文では、二つの数 x, a に対して $x \leq a$ であるとき、 a を x の上界という。

の超球 U_r の中で可達木を作れば、可達木が必ず有限木になり μ_f が μ_0 から可達であるかどうかを判定することができると同時に、少なくとも μ_f に到達させるトランジションの一つの発火系列を得ることができる。以下、ある超球の中で作られる可達木を修正した可達木という。

つぎに、4章においては、ペトリネットの二つのクラスに対して、上記 $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界が得られることを示し、さらに、任意の有向閉路上のプレース集合がトラップであるようなペトリネット (tc-net)⁴⁾ がその二つのクラスのうちの一つに含まれることを示す。

5章においては、修正した可達木の可達問題への一つの適用例を示す。

最後に、本論文で定義したクラスと、従来から提案されてきたクラスとの関係について述べる。

2. 定 義

以下、 N は非負整数の集合を、 N^k は K 次元非負整数ベクトルの集合を表わす。

ペトリネットとは4項組 $M=(P, T, F, \mu_0)$ である。ここで、 $P=\{p_1, \dots, p_n\}$ はプレースの有限集合、 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ はトランジションの有限集合、 $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ はプレースとトランジションの接続関係を表わすアークの有限集合、 $\mu_0 \in N^n$ は初期マーキングである。

$C=(P, T, F)$ をペトリネットの構造と呼ぶ。また、

$$a_{ij}^+ = \text{if}(t_j, p_i) \in F \text{ then } 1 \text{ else } 0,$$

$$a_{ij}^- = \text{if}(p_i, t_j) \in F \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

としたとき、 $A^+=[a_{ij}^+]_{n,m}$ 、 $A^-=[a_{ij}^-]_{n,m}$ をそれぞれペトリネットの入力接続行列、出力接続行列という。なお、 $A=A^+-A^-$ とし、接続行列という。

任意のマーキング μ において、トランジション $t_j \in T$ はつぎの(1)式を満たすときに発火可能であるといい、発火によりマーキングは(2)式に従って遷移する。

$$\mu - A^- e_j \geq 0 \quad (1)$$

$$\mu' = \mu + A e_j \quad (2)$$

ここで、 e_j は第 j 成分が1の単位ベクトルである。

以下、 t_j 、 μ 、 μ' が(1)、(2)式を満たすとき $\mu[t_j] \mu'$ と書き、マーキング μ_0 とトランジションの列 $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k \in T^*$ に対して、 $\mu_0[\tau_1] \mu_1 \dots \mu_{k-1}[\tau_k] \mu_k$ が成立するとき $\mu_0[\sigma] \mu_k$ と書く。このとき、 σ は μ_0 からの発火列であるといい、 μ_k は μ_0 から σ によって可達、マーキングの列 $\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k$ は μ_0 からの σ による遷移列であるという。

よく知られている⁶⁾ ように、 $\mu_0[\sigma] \mu_k$ であるとき、

σ に含まれる各トランジションの回数を成分とする発火回数ベクトルを $\phi(\sigma)$ とすると、 μ_0 、 μ_k 、 A 、 $\phi(\sigma)$ の間につぎの関係が成立する：

$$\mu_k = \mu_0 + A\phi(\sigma) \quad (3)$$

以下、ペトリネット M と任意のマーキング μ に対して、方程式 $\mu = \mu_0 + A x (x \in N^m)$ は M の行列方程式であるといい、その非負整数ベクトル解を単に解という。また、方程式 $A x = 0$ を M の斉次方程式といい、その非負整数ベクトル解を単に斉次方程式の解という。

発火回数ベクトル $x \in N^m$ が与えられて、 $\phi(\sigma) = x$ かつ $\mu[\sigma] \mu'$ となる発火列 σ が存在するとき、 x が μ において発火可能系列 σ をもつ、あるいは、発火可能であるという。また、 $x = [x_i] \in N^m$ に対して、つぎに定義されるペトリネット $M_x = (P_x, T_x, F_x, (\mu_0)_x)$ は x に対応する M の部分ネットであるという：

$$T_x = \{t_i \mid t_i \in T, x_i > 0\}$$

$$P_x = \{p_i \mid p_i \in P, \exists t_j \in T_x$$

$$: (t_j, p_i) \in F \text{ or } (p_i, t_j) \in F\}$$

$F_x, (\mu_0)_x$ はそれぞれ F, μ_0 の P_x, T_x への制限である。

ペトリネット $M=(C, \mu_0)$ において、初期マーキング μ_0 から可達であるようなマーキングの全体の集合 $R(\mu_0) = \{\mu \mid \exists \sigma \in T^* : \mu_0[\sigma] \mu\}$ を M の可達集合という。そして、可達問題は形式的に、与えられた一つのマーキング μ_f に対して、 $\mu_f \in R(\mu_0)$ であるかどうかを判定する問題である。

3. 可達木の作成範囲

この章では、可達木をどのような範囲において作成したら、可達問題が解けるかということについて考察する。

まず、すべてのマーキングの集合 N^n を、一つのユークリッド距離空間にする。

【定義1】 マーキングの集合 N^n とつぎに定義される N^n 上の距離 d との組 (N^n, d) を、マーキング距離空間という： $d(\mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|$ ($\mu_1, \mu_2 \in N^n$)

ここで、 $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ は $x = [x_i] \in N^n$ のノルムを表わす。□

以下、マーキング距離空間における任意の超球 $\{x \in N^n \mid a \in N^n, d(x, a) \leq r\}$ を記号 $U_r(a)$ で表わし、 a が原点であるとき、単に U_r で表わす。

このとき、明らかにつぎの補題1が成立する。

【補題1】 (N^n, d) における任意の超球 $U_r(a)$ に含まれるマーキング全体の集合は有限集合である。□

つぎに、可達木をマーキング距離空間における一つ

の超球 $U_r(a)$ の中で作ること考える。すなわち、可達木を作成するにあたって、あるノードの対応するマーキングが超球 $U_r(a)$ の中に入らなかった場合、これからの新しいノードの生成を打ち切る。まず、この考え方を形式的に述べる。

準備として、マーキング μ_0 からのトランジションの発火列全体の集合を記号 $\Sigma(\mu_0)$ で表わし、 $\Sigma(\mu_0)$ から $R(\mu_0)$ への一つの写像 $\nu: \Sigma(\mu_0) \rightarrow R(\mu_0)$ を

$$\forall \sigma \in \Sigma(\mu_0): \nu(\sigma) = \mu_0 + A\phi(\sigma)$$

のように定義する。すなわち、 ν は発火列 σ に ‘ σ によって可達なマーキング’ を対応させる写像である。

【定義 2】 ペトリネット $M=(C, \mu_0)$ とマーキング距離空間における一つの超球 $U_r(a)$ を与えたとき、つぎの 1) から 4) までの手順で生成される可達木を超球 $U_r(a)$ の中の可達木、あるいは修正した可達木という。また、任意のマーキング μ_f に対して、 $\nu(x) = \mu_f$ となるノード x がその可達木に存在するとき、 μ_f がその可達木に含まれるという。

1) トランジションの空列 ε を木の根とする； $\nu(\varepsilon) = \mu_0$ である。

2) つぎに、マーキング μ_0 のもとで発火可能なすべてのトランジション t に対して、根に後続するノード $z = \varepsilon t = t$ を作り、 $\nu(z)$ を計算し、このようにして得られたノードを先端ノードと分類する。

3) 一つの先端ノード x を選び、つぎの二つの場合：

- i) マーキング $\nu(x) \in U_r(a)$ の場合
- ii) マーキング $\nu(x)$ のもとで発火可能なトランジションがない場合

には、 x を終端ノードと分類し、つぎの先端ノードの処理へ進む。i), ii) のどちらでもない場合には、マーキング $\nu(x)$ のもとで発火可能なすべてのトランジション t に対して、 $z = xt$ を x に後続する新しい先端ノードとし、各 z に対応するマーキング $\nu(z)$ を求め、 x を内部ノードと分類する。

4) 3) の手順を先端ノードがなくなるまで繰り返す。3) を繰り返すうちに、ある先端ノード x に対して既存のノード y があって、対応するマーキングが同じである場合、ノード x を複製ノードと分類し、これからの新しいノードの生成を打ち切る。□

補題 1 と定義 2 より、つぎの定理 1 が成立する。

《定理 1》 任意の超球の中の可達木は有限木である。□

つぎに、どのような超球の中で可達木を作ったら、可達問題が解けるかということについて考える。

明らかに、条件 (C1) : “ $\forall \mu_f \in N^n: \mu_f \in R(\mu_0)$ iff

μ_f が $U_r(a)$ の中の可達木に含まれる” を満たす任意の超球 $U_r(a)$ が一つ存在すれば、 $\mu_f \in R(\mu_0)$ であるかどうかの判定を、 μ_f が $U_r(a)$ の中の可達木に含まれるかどうかの判定へ変換することができ、また、後者の判定が明らかに有限回の操作（可達木の生成）で行われることができる。

そこで、条件 (C1) を満たす超球 $U_r(a)$ とは、どのような超球であるかということについて考える。簡単のため、 a が原点であるような超球 U_r について考える。

二つのマーキング μ_0, μ_f に対して、 μ_0 から μ_f へのマーキングの遷移列全体の集合を $\Pi(\mu_0, \mu_f)$ 、 $\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_f)$ に含まれるマーキングのノルムの最大値を a_π とする。このとき、つぎの補題 2 が成立する。

【補題 2】 集合 $\{a_\pi | \pi \in \Pi(\mu_0, \mu_f)\}$ の中で、最小の要素が存在する。□

(証明) まず、 $\forall \pi \in \Pi(\mu_0, \mu_f)$ に対して、 a_π の平方 a_π^2 が非負整数であることが容易にわかる。また、非負整数の任意の部分集合には最小要素が存在するので、集合 $\{a_\pi^2 | \pi \in \Pi(\mu_0, \mu_f)\}$ の中には最小要素が存在する。さらに、 $\forall x, y \in \Pi(\mu_0, \mu_f)$ に対して、 $a_x^2 \leq a_y^2 \Leftrightarrow a_x \leq a_y$ であることから、補題 2 が成立する。□

補題 2 より、関数 “ $a: N^n \times N^n \rightarrow$ 実数の集合” をつぎのように定義する：

$$a(\mu_0, \mu_f) = \begin{cases} \min \{a_\pi | \pi \in \Pi(\mu_0, \mu_f)\} \\ 0 \quad (\Pi(\mu_0, \mu_f) = \phi \text{ のとき}) \end{cases}$$

条件 (C1) を満たす任意の超球 U_r は、 μ_f が可達るとき U_r には少なくとも μ_0 から μ_f への一つの遷移列が含まれるので、半径 r は不等式 $a(\mu_0, \mu_f) \leq r$ を満たす (Fig. 1)。

また、逆に不等式 $a(\mu_0, \mu_f) \leq r$ を満たす任意の一つの超球 U_r が与えられたとき、 μ_f が可達であれば U_r には少なくとも μ_0 から μ_f への一つの遷移列が含まれるので、超球 U_r は条件 (C1) を満たす。

以上のことから、つぎの定理 2 が得られる。

《定理 2》 ペトリネット $M=(C, \mu_0)$ と、 $a(\mu_0, \mu_f)$

Fig. 1 Illustration of limiting the reachability tree in a hypersphere in the marking metric space

Fig. 2 The reachability tree to be created

の一つの上界 r が与えられたとき、マーキング μ_f が $\mu_f \in R(\mu_0)$ であるための必要十分条件は、 μ_f が超球 U_r の中の可達木に含まれることである。□

$a(\mu_0, \mu_f) \leq r$ を満たす半径 r の決め方については、つぎの4章で詳しく述べる。

定理2より、ある数 r が $a(\mu_0, \mu_f)$ の一つの上界であることがわかれば、原点を中心とする半径 r の超球の中で可達木を作ると、可達木が必ず有限になり可達性の判定ができると同時に、発火系列の決定を行うことができる (Fig. 2)。

つぎに、 $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界の計算について述べる。

4. $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界の計算

3章で述べたように、可達木を用いて可達問題を解くときに、可達木の作成範囲 (ある超球の半径) を決めるため、 $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界の一つを計算する必要がある。

本研究では、下記の二つのクラスのペトリネットに対して、 $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界が得られることを示した。下記のクラスと従来から提案されてきたクラスとの関係については、6章で述べる。

以下、ペトリネット $M=(C, \mu_0)$ が一つ与えられたとき、 m はトランジションの数、 n はプレースの数、 $A=[A_1 \cdots A_m]$ は接続行列を表わす。また、 M_x は発火回数ベクトル $x \in N^m$ に対応する部分ネットとし、 $\|A\| = \max\{\|A_1\|, \dots, \|A_m\|\}$ とする。

準備として、つぎの補題3を与えておく。

【補題3】 ペトリネット $M=(C, \mu_0)$ において、行列方程式 $\mu_f = \mu_0 + Ax$ の任意の一つの解 $x=[x_i]$ が発火可能系列をもつならば、つぎの不等式が成立する。

$$a(\mu_0, \mu_f) \leq \|\mu_0\| + (x_1 + \cdots + x_m) \cdot \|A\| \quad \square$$

(証明) x が発火可能系列をもつので、 $\phi(\sigma) = x$ かつ $\mu_0[\tau_1] \mu_1 \cdots \mu_{k-1}[\tau_k] \mu_k (= \mu_f)$ となる発火列 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ が存在する。 $\mu_0 \mu_1 \cdots \mu_{k-1} \mu_k = \pi$ とすると、 π に含まれる任意のマーキング μ_i ($i=0, \dots, k$) に対して、

$$\begin{aligned} \|\mu_i\| &= \|\mu_0 + A \cdot \phi(\tau_1 \cdots \tau_i)\| \\ &\leq \|\mu_0\| + x_1 \|A_1\| + \cdots + x_m \|A_m\| \\ &\leq \|\mu_0\| + (x_1 + \cdots + x_m) \cdot \|A\| \end{aligned}$$

であることがわかる。よって、

$$a_x \leq \|\mu_0\| + (x_1 + \cdots + x_m) \cdot \|A\| \quad \textcircled{1}$$

①式より、補題3が成立する。□

4.1 re-net である場合

まず、re-net の定義を与える。

【定義3】 つぎの条件を満たすペトリネット $M=(C, \mu_0)$ を regular Petri net (re-net) という。

条件 任意の発火回数ベクトル $x \in N^m$ に対して、 x が μ_0 において発火可能系列をもつならば、 $y \leq x$ かつ $M_y = M_x$ 、 $Ay = Ax$ を満たす任意の発火回数ベクトル $y \in N^m$ は μ_0 において発火可能系列をもつ。□

re-net について、つぎの定理3が成立する。

《定理3》 re-net $M=(C, \mu_0)$ と、マーキング μ_f 、 M の斉次方程式 $Ax=0$ のすべての極小解 h_j ($j=1, \dots, r$) が与えられたとする。このとき、行列方程式 $\mu_f = \mu_0 + Ax$ の任意の一つの解 $x \geq s$ (s は行列方程式のある極小解である) が発火可能ならば、つぎの条件を満たす行列方程式の解 z のうち、少なくとも一つの解が発火可能である。

条件 $s \leq z \leq s + h_1 + \cdots + h_r$ □

(注意) 定理3は任意の re-net M において、行列方程式の極小解に斉次方程式の極小解をそれぞれ1回以下加えて得られる有限個の解が発火可能とならなければ、斉次方程式の極小解を1回以上加えて得られるどんな解でも発火可能にならないことを示している。

(証明) $x \geq s$ であるので、 $x = s + k_1 h_1 + \cdots + k_r h_r$ と表わすことができる。ここで、 $k_1, \dots, k_r$ は r 個の非負整数である。

つぎに、 $y \leq x$ 、 $M_y = M_x$ 、 $Ay = Ax$ を満たすベクトル $y = s + j_1 h_1 + \cdots + j_r h_r$ を一つ作る：

$k_i = 0$ ならば $j_i = 0$ ； $k_i > 0$ ならば $j_i = 1$ とする。

仮定より、 M が re-net であることから、 x が発火可能なとき、 y も発火可能である。また、明らかに y が

$$s \leq y \leq s + h_1 + \cdots + h_r$$

を満たすので、定理3が成立する。□

定理3と補題3より、つぎの定理4が得られる。

《定理4》 re-net M において、つぎの1)、2)によって計算される $b(\mu_0, \mu_f)$ が $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界となる。

以下、 S は $\mu_f = \mu_0 + Ax$ の極小解全体の集合、 h は $Ax=0$ のすべての極小解の和を表わす。

1) $\{s+h \mid s \in S\}$ のうち、各成分の和が最大となるものを、 $Z=(z_1, \dots, z_m)^T$ とする。 $S=\phi$ の場合、 $Z=0$ とする。

$$2) \quad b(\mu_0, \mu_f) = \|\mu_0\| + (z_1 + \cdots + z_m) \cdot \|A\| \quad \square$$

re-net と他のペトリネットのクラスとの関係について、つぎの定理5が成り立つ。

《定理5》 つぎの1), 2)が成り立つ.

1) $\text{rank}(A)=m$ であるペトリネットは任意の初期マーキングに対し, re-net である.

2) tc-net は任意の初期マーキングに対し, re-net である. $\square$

(証明) 1) $\text{rank}(A)=m$ であるとき, 任意の $x \in N^m$ に対して, $Ay = Ax$ を満たす任意のベクトル $y \in N^m$ が $y=x$ となる. よって, 任意の初期マーキングに対して定義3の条件が満たされる.

2) 文献4)の補題2, 補題7と補題5より, tc-net において $M_y = M_x$ を満たす任意の二つのベクトル $x, y \in N^m$ に対して, x と y の発火可能性は同等である. よって, 任意の初期マーキングに対して定義3の条件が満たされる. $\square$

4.2 $\text{rank}(A) < m$ の一つの特例

$\text{rank}(A)=p$ とする. このとき, A の列ベクトルの中に p 個の1次独立な列ベクトルが存在する.

$A_1, A_2, \dots, A_p$ は1次独立であるとし, 残りの列ベクトル $A_{p+1}, \dots, A_m$ は

$$A_{p+1} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] \begin{bmatrix} f_{p+1,1} & f_{p+1,2} & \dots & f_{p+1,p} \end{bmatrix}^T$$

$$A_m = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] \begin{bmatrix} f_{m,1} & f_{m,2} & \dots & f_{m,p} \end{bmatrix}^T$$

のように表わされるものとする. $A_1, A_2, \dots, A_p$ は1次独立であるから, ベクトル $\begin{bmatrix} f_{p+1,1} & f_{p+1,2} & \dots & f_{p+1,p} \end{bmatrix}^T, \dots, \begin{bmatrix} f_{m,1} & f_{m,2} & \dots & f_{m,p} \end{bmatrix}^T$ が唯一に存在する.

このとき, つぎの定理6が成立する.

《定理6》 $\text{rank}(A)=p < m$ のペトリネット $M=(C, \mu_0)$ において, つぎの条件(C2)が成立するとき, つぎのように計算される $b(\mu_0, \mu_f)$ が $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界となる.

条件(C2)

$$f_{j,1} + f_{j,2} + \dots + f_{j,p} \geq 1 \quad (j=p+1, \dots, m)$$

上界 $b(\mu_0, \mu_f)$ の計算:

1) $\mu_f = \mu_0 + Ax$ が非負整数解をもつならば,

$$b(\mu_0, \mu_f) = \|\mu_0\| + (z_1 + \dots + z_p) \cdot \|A\|$$

2) $\mu_f = \mu_0 + Ax$ が非負整数解をもたないならば,

$$b(\mu_0, \mu_f) = 0$$

ここで, $z = [z_i]$ は $\mu_f = \mu_0 + [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] \cdot z$ を満たす唯一のベクトルである. $\square$

(証明) 1) まず, $\mu_f = \mu_0 + Ax$ を満たす任意の解 $x = [x_i]$ に対して, $x_1 + \dots + x_m \leq z_1 + \dots + z_p$ であることを証明する.

以下, ベクトル $\begin{bmatrix} f_{j,1} & f_{j,2} & \dots & f_{j,p} \end{bmatrix}^T$ を C_j で表わす.

$$\begin{aligned} Ax &= x_1 A_1 + \dots + x_m A_m \\ &= x_1 A_1 + \dots + x_p A_p + x_{p+1} [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] C_{p+1} \\ &\quad + \dots + x_m [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] C_m \end{aligned}$$

Fig. 3 A Petri net which satisfies the condition of Theorem 6

$$\begin{aligned} &= (x_1 + x_{p+1} \cdot f_{p+1,1} + \dots + x_m \cdot f_{m,1}) A_1 \\ &\quad + \dots + (x_p + x_{p+1} \cdot f_{p+1,p} + \dots + x_m \cdot f_{m,p}) A_p \end{aligned}$$

また, $Ax = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_p] \cdot z$ であることから, $A_1, \dots, A_p$ が1次独立であることから,

$$\begin{aligned} x_1 + x_{p+1} \cdot f_{p+1,1} + \dots + x_m \cdot f_{m,1} &= z_1 \\ &\vdots \\ x_p + x_{p+1} \cdot f_{p+1,p} + \dots + x_m \cdot f_{m,p} &= z_p \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式のすべての等式の両辺を加えると,

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_p + (f_{p+1,1} + f_{p+1,2} + \dots + f_{p+1,p}) \cdot x_{p+1} \\ + \dots + (f_{m,1} + f_{m,2} + \dots + f_{m,p}) x_m \\ = z_1 + \dots + z_p \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる.

そこで, 条件(C2)と, $[x_1, \dots, x_m]^T$ は非負整数ベクトルであることを利用して,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_m \\ \leq x_1 + \dots + x_p + (f_{p+1,1} + f_{p+1,2} + \dots \\ + f_{p+1,p}) x_{p+1} + \dots + (f_{m,1} + f_{m,2} + \dots + f_{m,p}) x_m \\ = z_1 + \dots + z_p \end{aligned} \quad (6)$$

であることがわかる.

2) 補題3と(6)式より, 定理6が成立する. $\square$

定理6の証明からわかるように, 条件(C2)を満たすペトリネットは, 初期マーキングから目標マーキングへのすべての遷移列がある超球の中に含まれるようなペトリネットである.

$\text{rank}(A)=p < m$ であり, かつ定理6の条件(C2)を満たすペトリネットの一つの例を Fig. 3 に示す.

Fig. 3 のペトリネットは有界ではなく, $\text{rank}(A)=2$ (<トランジションの数=3) である. このとき,

$$A_1 = (-1 \ 1 \ 1)^T, \ A_2 = (1 \ -1 \ 0)^T, \ A_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$$

A_1, A_2 は1次独立であり,

$$A_3 = [A_1 \ A_2] (f_{3,1} \ f_{3,2})^T = [A_1 \ A_2] (1 \ 1)^T$$

である.

よって, $f_{3,1} + f_{3,2} = 1 + 1 = 2 \geq 1$ である. すなわち, 定理6の条件(C2)が成立する.

5. 適用例

ここで, re-net について可達性の判定と, 初期マー

キングから目標マーキングに到達させる発火系列の決定を同時に行う一つの具体例を示す。

Fig. 4 のペトリネットにおいて、初期マーキング $\mu_0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$ と、二つの目標マーキング $\mu_{f1} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$, $\mu_{f2} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$ を考える。このペトリネットは tc-net ではないが、初期マーキング μ_0 において t_1, t_2 が発火不可能であることと、 t_3, t_4, t_5, t_6 に対応する部分ネットが tc-net であることから、re-net であることが容易にわかる。

以下、 μ_{f1} は可達ではないことと、 μ_{f2} は可達であることを、3 章で述べた方法を用いて示すと同時に、 μ_0 から μ_{f2} への一つの発火系列を求める。

このペトリネットの斉次方程式 $Ax = 0$ の唯一の極小解 $h = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^T$ である。

5.1 $\mu_{f1} = (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$ のとき

行列方程式 $\mu_{f1} - \mu_0 = Ax$ の解

$$x = (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T + K(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^T$$

(K は非負整数) であり、その方程式の唯一の極小解

$$s = (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$$

である。

つぎに、定理 4 より $b(\mu_0, \mu_{f1})$ を求める。

- 1) $Z = s + h = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)^T$
- 2) $b(\mu_0, \mu_{f1}) = \|\mu_0\| + (z_1 + \dots + z_6) \cdot \|A\|$
 $= 1 + 4\sqrt{3} = 7.9$

そこで、原点を中心とする半径 $b(\mu_0, \mu_{f1}) = 7.9$ の球内で可達木を作る (**Fig. 5**) と、 μ_{f1} はその範囲内の可達木に現れていないことがわかる。よって、 μ_{f1}

Fig. 4 An example for re-net

Fig. 5 The created reachability tree for μ_{f1}

Fig. 6 The created reachability tree for μ_{f2}

は可達ではない。

5.2 $\mu_{f2} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$ のとき

行列方程式 $\mu_{f2} - \mu_0 = Ax$ の解

$$x = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)^T + K(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^T$$

(K は非負整数) であり、その方程式の唯一の極小解

$$s = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)^T$$

である。

5.1 節と同じように、 $b(\mu_0, \mu_{f2})$ を計算すると、 $b(\mu_0, \mu_{f2}) = 9.7$ であることがわかる。

そこで、原点を中心とする半径 $b(\mu_0, \mu_{f2}) = 9.7$ の球内で可達木を作る (**Fig. 6**) と、 μ_{f2} はその範囲内の可達木に現れていることがわかる。よって、 μ_{f2} は可達である。

さらに、**Fig. 6** の可達木より t_3, t_4, t_5 は μ_0 から μ_{f2} への一つの発火列であることがわかる。

6. あとがき

本論文では、はじめに可達問題が解けるための可達木の作成範囲について考察し、つぎに re-net などに対してそのような範囲 ($a(\mu_0, \mu_f)$ の上界) が求められることを示した。

ペトリネットのサブクラスは、ネットの構造と挙動の二つの性質に基づいて研究されてきている。構造的な性質に基づいて marked graph や tc-net などが研究され、また、挙動的な性質に基づいて wp-net⁷⁾などが研究されてきた。本論文では、ネットの挙動的な性質に基づいて re-net というクラスを定義した。

本論文で扱ったペトリネットのクラスと、従来から研究されてきたクラスとの関係を **Fig. 7** に示す。

また、wp-net ではないが、re-net であるようなペトリネットの一つの例を **Fig. 8** に示す。Fig. 8 のペトリネットは、 $\text{rank}(A) = 5$ (= トランジションの数) であるので、定理 5 より re-net である。

任意のペトリネットに対して、 $a(\mu_0, \mu_f)$ の上界を計算する方法を検討することが今後の課題としてあげら

tc-net : trap circuit Petri net
 wp-net : weakly persistent Petri net

Fig. 7 Relations between classes of Petri nets

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 8 A Petri net which is a re-net, but not a wp-net

れる。

日頃ご指導賜る豊橋技術科学大学第2工学系西村義行教授，小野木克明助教授，猪股俊光博士をはじめとするシステム解析研究室のみなさまに感謝します。

参考文献

- 1) E. W. Mayr: An Algorithm for the General Petri Net Reachability Problem, SIAM J. Comput., **13**, 441/460 (1984)
- 2) T. Murata: Circuit Theoretic Analysis and Synthesis of Marked Graphs, IEEE Trans. Circuit and System, **CAS-24-7**, 400/405 (1977)
- 3) 市川，横山，黒木：事象駆動システムの制御—無競合ペトリネットの可達性の必要十分条件—，計測自動制御学会論文集，**21-4**，324/330 (1985)
- 4) 平石，市川：可達性の必要十分条件を求めることが可能なペトリネットのクラス，計測自動制御学会論文集，**24-6**，635/640 (1988)
- 5) 丁，関口：ペトリネットの発火系列決定法，計測自動制御学会論文集，**25-6**，698/705 (1989)
- 6) J. L. Peterson: Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice Hall (1981)
- 7) H. Yamasaki: On Weak Persistency of Petri Nets, Information Processing Letters, **13-3**, 94/97 (1981)