ある種のセクタ条件に基づいた離散時間非線形 フィードバック系の大局的漸近安定性

武 藤 康 彦*・市 川 邦 彦*

Globally Asymptotic Stability of Discrete Nonlinear Feedback Systems Based on a Certain Kind of a Sector Condition

Yasuhiko MUTOH* and Kunihiko ICHIKAWA*

In this paper, it is shown that Kalman's conjecture is valid for discrete nonlinear feedback system if Hurwitz sector is replaced by more restricted sector that is called ESF-gain sector. Many of practical nonlinearities are included in this class. It is also shown that ESF-gain sector which depends on the solution of Lyapunov's matrix equation can be derived by solving a quadratic equation.

Key Words: nonlinear feedback system, stability of nonlinear system sector condition

1. 緒 言

本論文では、ある種のゼロメモリー型非線形要素をフィードバック回路にもつ離散時間非線形フィードバック系の大局的漸近安定性について考察を行う。

一般に Kalman の推測と呼ばれる連続時間非線形フィードバック系の安定性に関する考察がある¹⁾。これは Hurwitz セクタ (後出) により規定されるある条件を、非線形要素が満たせばこの系は大局的漸近安定となるであろうというものである。これには多くの実際的な非線形性が含まれ、また非常に使いやすい形をしているが、この推測には反例が存在し正しくないことがわかっている²⁾。

本論文では、離散系においてこのセクタ条件にある制約を加えることで、大局的漸近安定性が保証された非線形フィードバック系が構成できることを示す。実際のシステムが大局的漸近安定であるかどうかはこの制約されたセクタの大きさを実際に求めることにより

一つの十分条件として直接判定することができる。

以下、第2章において制限されたセクタ条件に基づき、非線形フィードバック系の大局的漸近安定性を縮小写像の原理を利用して述べる。さらに、3章において制限されたセクタが、リアプノフの行列方程式の解を利用した2次方程式の根により直接求められることを示す。4章では簡単な例題を挙げる。

2. 非線形フィードバック系の 大局的漸近安定性

次式で示される一入力一出力非線形フィードバック系を考えよう (Fig. 1)。

[線形部分]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

[非線形部分]

$$u(t) = -f(y(t)) \quad (2.2)$$

ここで $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $y(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ であるものとする。なお以下で用いるノルムは、ベクトルに関しては通常のユークリッドノルム、また行列に関してはユークリッドノルムから導かれたノルム、すなわち

Fig. 1 Nonlinear feedback system

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7-1

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo
(Received May 28, 1990)
(Revised September 13, 1990)

$$\|A\| = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ は行列の最大固有値とする.

議論に入る前に, いくつかの用語の定義を行って置く.

【定義 1】 Fig. 2 に示すように, $f(y) = k_L y$ と $f(y) = k_U y$ に挟まれた領域をセクタ $[k_L, k_U]$ という ($k_L < k_U$). ただし領域は直線 $f(y) = k_L y$ から反時計回りの方向にとるものとする.

【定義 2】 $k \in [k_L, k_U]$ なるすべての k について $A - bc^T k$ が漸近安定となるようなセクタ $[k_L, k_U]$ をシステム (2.1) の Hurwitz セクタと呼ぶ.

【定義 3】 ある正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$ に対して,

$$(A - bc^T k)^T P (A - bc^T k) - P < 0 \quad (2.3)$$

となるようなすべての実数 k の集合を $S(P)$ において, これを等価的安定化フィードバックゲインの集合と呼ぶ. 簡単のためここでは ESF-ゲイン (Equivalently Stabilizing Feedback gain) と呼ぶことにする.

システム

$$x(t+1) = (A - bc^T k)x(t) \quad (2.4)$$

を考えたとき, $x(t)^T P x(t)$ はすべての $k \in S(P)$ に対してリアプノフ関数になっている.

【定義 4】 ある $k_L < k_U$ に対して $[k_L, k_U]$ が ESF-ゲインの集合になっているとき, セクタ $[k_L, k_U]$ を ESF-ゲインセクタと呼ぶ.

明らかにシステム (2.1) に対して, ESF-ゲインセクタは Hurwitz セクタに含まれる.

さて, 非線形フィードバック系 (2.1), (2.2) において非線形要素 $f(y)$ が以下の条件を満たしているものとする.

(1) $f(y)$ は連続で区分的になめらかな関数で $f(0) = 0$

(2) $f(y)$ の微分可能な点において

$$k_L \leq \frac{df}{dy} \leq k_U, \quad (2.5)$$

(3) セクタ $[k_L, k_U]$ は ESF-ゲインセクタである.

このような非線形関数 $f(y)$ は, 明らかに ESF-ゲイ

Fig. 2 Sector $[k_L, k_U]$

ンセクタ $[k_L, k_U]$ 内にある. Fig. 3 に上の条件を満たす $f(y)$ の例をいくつか示す.

いま, (2.3)式を満たす正定対称行列 P を

$$P = T^T T \quad T \in R^{n \times n} \text{ (正則)} \quad (2.6)$$

と表示すると,

$$A^* = T A T^{-1}$$

$$b^* = T b \quad (2.7)$$

$$c^{*T} = c^T T^{-1}$$

なる正則変換により

$$(A^* - b^* c^{*T} k)^T (A^* - b^* c^{*T} k) < I \quad (2.8)$$

が成立する. この式は

$$\|A^* - b^* c^{*T} k\| < 1 \quad \forall k \in S(P) \quad (2.9)$$

を意味している.

さて, 非線形フィードバック系 (2.1), (2.2) において非線形要素 $f(y)$ が条件 (1) ~ (3) を満たしているものとする. いま, k_L, k_U により決まるセクタ $[k_L, k_U]$ が ESF-ゲインセクタであるとする, 上述したように (2.6) 式に示す正則行列 T により

$$w(t) = T x(t) \quad w(t) \in R^n \quad (2.10)$$

と正則変換を行うことで (2.1), (2.2) 式はつぎのように表わすことができる.

(a) Continuous broken line function

(b) Continuous and smooth function

(c) Continuous and piecewise smooth function

Fig. 3 Nonlinearities which satisfy the conditions (1), (2) and (3)

$$w(t+1)=F(w(t)) \quad (2.11)$$

$$F(w(t))=A^*w(t)-b^*f(c^{*T}w(t)) \quad (2.12)$$

ただし, A^* , b^* , c^* は (2.7) 式により与えられる. このとき w_1 , w_2 を R^n 中の任意の2点とすると次式が成立する.

(Case 1) $c^{*T}w_1 \neq c^{*T}w_2$ のとき

$f(y)$ が条件 (1) ~ (3) を満たすことからある $k \in [k_L, k_U]$ に対して

$$f(c^{*T}w_2) = f(c^{*T}w_1) + k(c^{*T}w_2 - c^{*T}w_1) \quad (2.13)$$

が成立する. これを用いて次式を得る.

$$\begin{aligned} \|F(w_2) - F(w_1)\| &= \|A^*w_2 - b^*f(c^{*T}w_2) - A^*w_1 + b^*f(c^{*T}w_1)\| \\ &= \|(A^* - kb^*c^{*T})(w_2 - w_1)\| \\ &\leq \|A^* - kb^*c^{*T}\| \cdot \|w_2 - w_1\| \\ &< \rho_1 \cdot \|w_2 - w_1\|, \quad 0 < \rho_1 < 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Case 2) $c^{*T}w_1 = c^{*T}w_2$ のとき

条件 (1), (2) より, ある $k \in [k_L, k_U]$ に対して次式が成立する.

$$f(c^{*T}w_1) = kc^{*T}w_1 = kc^{*T}w_2 = f(c^{*T}w_2) \quad (2.15)$$

したがって, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \|F(w_2) - F(w_1)\| &= \|A^*w_2 - b^*f(c^{*T}w_2) - A^*w_1 + b^*f(c^{*T}w_1)\| \\ &= \|(A^* - kb^*c^{*T})(w_2 - w_1)\| \\ &\leq \|A^* - kb^*c^{*T}\| \cdot \|w_2 - w_1\| \\ &< \rho_2 \cdot \|w_2 - w_1\|, \quad 0 < \rho_2 < 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.14), (2.16) 式より次式が成立する.

$$\|F(w_1) - F(w_2)\| = \rho \cdot \|w_1 - w_2\|, \quad 0 < \rho < 1 \quad \forall w_1, w_2 \in R^n. \quad (2.17)$$

したがって, F は縮小写像となり R^n 内の任意の初期点 w_0 から出発して, $w_{i+1} = F(w_i)$ により定まる点列 $\{w_0, w_1, w_2, \dots\}$ は F の不動点すなわち R^n の原点に収束する³⁾. このことは (2.1), (2.2) の非線形フィードバック系が大局的漸近安定であることを意味している. すなわちつぎの定理が得られた.

《定理1》非線形フィードバック系 (2.1), (2.2) において, 非線形要素 $f(y)$ が条件 (1) ~ (3) を満たせば, この系の原点は大局的漸近安定である.

定理中, 条件 (3) の ESF-ゲインセクタを Hurwitz セクタで置き換えれば, これは Kalman の推測を離散系に対して適用したものとなせる. すなわち, 定理1は“離散系における Kalman の推測”においてセクタを ESF-ゲインセクタにまで狭めれば, 大局的漸近安定性は常に保証されることを述べている.

3. ESF-ゲインセクタの導出

定理1を実際のシステムに適用しようとするとき, 当然, ESF-ゲインセクタを求めることが要求される. 以下では, 線形部分のシステムが与えられたとき, その ESF-ゲインセクタの大きさを求める一つの方法について述べる. ここでは一般性を失うことなく A を漸近安定行列と仮定する. もし A が不安定行列であった場合, $A - bc^T k_1$ が漸近安定となるようなある k_1 を選んで, そこから出発して同じ手順により A に対する ESF-ゲインセクタを求めることができるからである (このような k_1 が存在しなければ安定化できない).

いま, A が漸近安定行列としたことから, 任意の正定対称行列 Q を与えたときつぎのリアプノフの行列方程式を満たす正定対称行列 P が一意に定まる.

$$A^T P A - P = -Q \quad (3.1)$$

求めるべきものは

$$-(A - bc^T k)^T P (A - bc^T k) + P > 0 \quad (3.2)$$

となるような k の範囲である. ここで, A , b , c は可観測正準形, すなわち

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ I_{n-1} & & a \end{bmatrix}, \quad a \in R^n \quad (3.3)$$

$$c^T = [0, \dots, 0, 1] \quad (3.4)$$

なる形をしているものとする. 一方, (3.1) 式における正定対称行列 P はつぎのように部分行列により表示することができる.

$$P = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \\ P_2 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} P_2^T \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n-1}^{(1)} & p_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}^T & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \\ * & & P_{n-1}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ただし, $P_2 \in R^{(n-1) \times n}$, $P_{n-1}^{(1)} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, $p_{n-1} \in R^{n-1}$, $p_{nn} \in R^1$ である. (3.3), (3.4) 式を用いて (3.2) 式の左辺を計算して次式を得る.

$$-((A - bc^T k)^T P (A - bc^T k) - P) = \begin{bmatrix} P_d & p_{n-1} - P_2(a - bk) \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}^T - (a - bk)^T P_2^T & p_{nn} - (a - bk)^T P(a - bk) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ここで $P_d (\in R^{(n-1) \times (n-1)})$ は次式で定義される.

$$P_d = P_{n-1}^{(1)} - P_{n-1}^{(2)} \quad (3.6)$$

(3.5) 式の右辺は $k=0$ のとき明らかに正定対称行列であるので, 行列 P_d も正定対称である. したがって求めるべき k の範囲は (3.5) 式の右辺の行列の行列式が正となるような k の範囲である. この行列式の値はつぎのように計算される.

det

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_d & p_{n-1}-P_2(\alpha-bk) \\ \cdots & \cdots \\ p_{n-1}^T-(\alpha-bk)^T P_2^T & p_{nn}-(\alpha-bk)^T P(\alpha-bk) \end{bmatrix} \\ &= (\det P_d) \cdot [p_{nn}-(\alpha-bk)^T P(\alpha-bk) \\ & \quad - \{p_{n-1}-P_2(\alpha-bk)\}^T P_d^{-1} \{p_{n-1}-P_2(\alpha-bk)\}] \\ &= (\det P_d) \cdot \{d_2 k^2 + d_1 k + d_0\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} d_2 &= -b^T(P + P_2^T P_d^{-1} P_2)b \\ d_1 &= 2\{\alpha^T(P + P_2^T P_d^{-1} P_2)b - b^T P_2^T P_d^{-1} p_{n-1}\} \\ d_0 &= p_{nn} - \alpha^T(P + P_2^T P_d^{-1} P_2)\alpha \\ & \quad - p_{n-1}^T P_d^{-1} p_{n-1} + 2\alpha^T P_2^T P_d^{-1} p_{n-1} \quad (3.8) \end{aligned}$$

したがって, $\det P_d > 0$ より, 求めるべき k の範囲は

$$d_2 k^2 + d_1 k + d_0 > 0 \quad (3.9)$$

なる領域である. $k=0$ のとき (3.7) 式は正であることより $d_0 > 0$ である. これと $d_2 < 0$ とから (3.9) 式は常に二つの異なる実根をもつ. これより

$$d_2 k^2 + d_1 k + d_0 = 0 \quad (3.10)$$

の2実根を k_L, k_U ($k_L < k_U$) とおくと ESF-ゲインセクタはセクタ $[k_L, k_U]$ で与えられる.

ただし, ここに得られた ESF-ゲインセクタは, P , すなわち Q の選び方に依存しており, なるべく大きな ESF-ゲインセクタを確保するためには, Q を適当に変化させて, 対応する ESF-ゲインセクタを何回か求めることが必要となる. このようにして求まった ESF-ゲインセクタに関して非線形要素 $f(y)$ が条件 (1)~(3) を満たしていれば, そのような非線形フィードバック系の原点の大局的漸近安定性は常に保証される. もちろん, 最大の ESF-ゲインセクタが得られてはいないので, ここで得られた ESF-ゲインセクタ外でも不安定となるとは限らない.

4. 例題

〔例題1〕 次式で示されるプラントを考える.

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z + 0.4} \quad (4.1)$$

対応する可観測正準形の実現はつぎのとおりである.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 1 & -0.3 \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ c^T &= [0, 1] \end{aligned} \quad (4.2)$$

このプラントの Hurwitz セクタはセクタ $[-0.3, 1.4]$ となる. 以下に, A に対するリアプノフの行列方程式において, 3種の正定対称行列 Q を与えたときの ESF-ゲインセクタを計算してみよう. 三つの場合について Q とそのときのリアプノフの行列方程式の解

Fig. 4 Hurwitz sector and one of EFS-gain sectors (Example 1)

P , そしてその P に対応した ESF-ゲインセクタを挙げておく.

①

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2.841 & -0.921 \\ -0.921 & 1.841 \end{bmatrix}$$

ESF-ゲインセクタ: $[k_L, k_U] = [-0.263, 1.029]$

②

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 6.635 & -0.651 \\ -0.651 & 4.635 \end{bmatrix}$$

ESF-ゲインセクタ: $[k_L, k_U] = [-0.297, 1.225]$

③

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 6.587 & 2.540 \\ 2.540 & 1.587 \end{bmatrix}$$

ESF-ゲインセクタ: $[k_L, k_U] = [-0.084, 0.301]$

以上の三つのなかでは, ②によって得られたセクタ $[-0.297, 1.225]$ が最大であり, これを ESF-ゲインセクタとして利用することができる. Fig. 4 に, このプラントに対する Hurwitz セクタと ESF-ゲインセクタを示しておく. この ESF-ゲインセクタに対し条件 (1)~(3) を満たす非線形要素をもつ非線形フィードバック系は大局的漸近安定となる. この例題では Hurwitz セクタと ESF-ゲインセクタとは実質的に差はないといえる.

5. 結言

本論文では離散時間非線形フィードバック系において, Hurwitz セクタを ESF-ゲインセクタにまで制限すれば, 離散系における Kalman の推測というべきものが成立することを示した. Kalman の推測自身は直感的でわかりやすく, 工学的にも意味のある多くの非線形性を含んでいるので, 求まる ESF-ゲインセクタが広ければ, この安定解析はかなり利用価値の高いものとなる. ここでは, リアプノフ方程式の Q をいくつか与えたとき, 対応する ESF-ゲインセクタを求め,

そのうち最も広いセクタを ESF-ゲインセクタとした。しかし、最大の ESF-ゲインセクタを求めることは未解決であり、その広さと Hurwitz セクタの広さとの関係も含めて、今後の課題としたい。

また、本論文では離散系のみを対象としたが、それは縮小写像の原理と逐次近似法の原理が離散系特有の応答に対して容易に適用できることによる。したがって、ここで行った議論をそのまま直ちに連続系に対して適用することはできない。

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman: Physical and Mathematical Mechanisms of Instability in Nonlinear Automatic Control Systems, Trans. ASME, **79**-3, 553/556 (1957)
- 2) R. E. Fitts: Two Counter Examples to Aizerman's Conjecture, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-11**-3, 553/556 (1966)
- 3) コルモゴロフ, フォーミン: 函数解析の基礎 (上), 岩波書店 (1979)