遅れ型むだ時間系の逆ナイキスト安定判別法

阿部直人*・内田健康**・示村悦二郎**

Inverse Nyquist Criterion for Retarded Time-Delay Systems

Naoto ABE*, Kenko UCHIDA** and Etsujiro SHIMEMURA**

In this paper we derive inverse Nyquist criterion for systems with time-delay. It can be applied when nominal model and perturbed model have same number of zeros, instead of poles, in right half plane.

Key Words: inverse Nyquist criterion, time-delay system

1. はじめに

集中定数系におけるナイキスト安定判別法はすでによく知られており、閉ループ系の安定判別、ロバスト安定性の解析などに広く応用されている。むだ時間を含む系に対するナイキスト安定判別法も Desoer¹⁾ らや Davis²⁾ ら, Sacks³⁾ によって研究がなされている。しかし、それらは複雑な代数系を用いていた、開ループが安定でなければならないなど必ずしも適用しやすい形をしていない。そこで、筆者らは遅れ型むだ時間系に対しても集中定数系と同様のナイキスト安定判別法が適用できることを導いた⁴⁾。

集中系、むだ時間系に限らずナイキスト安定判別法を適用するためには、開ループ系の不安定極の数が変わらないという条件が必要になる。むだ時間という特殊なパラメータをもつ系においては、むだ時間の微小な変化に対してもこの条件が満たされない場合が生じる。そのような場合に逆ナイキスト安定判別法が有効な手段となる。逆ナイキスト安定判別法というのは、ナイキスト安定判別法における極の役割をゼロ点に置き換えたものである。これによると、右半平面の極の数が増減しても、ゼロ点の数が増減しなければ安定判別ができる。そこで、本論文では遅れ型むだ時間系に対する逆ナイキスト安定判別法を導く。

2. システムの記述

状態にむだ時間を含む遅れ型むだ時間系として(1)式を考える。

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \int_{-h}^0 D(\beta) x(t+\beta) d\beta + Bu(t) \quad (1)$$

$x(t)$ を n 次元ベクトル、 $u(t)$ を m 次元ベクトルとし、 $n \geq m$ と仮定する。制御入力として、つぎのような線形状態フィードバックを考える。

$$u(t) = \sum_{i=0}^N \left\{ K_{0i} x(t-ih) + \int_{-ih}^0 K_{1i}(\beta) x(t+\beta) d\beta \right\} \quad (2)$$

ここで、 $(K_{0i}, K_{1i}) \in R^{m \times n} \times L^2(-h, 0; R^{m \times n})$ であり、 N は正の整数とする。

システム(1)に対して(2)式の形式で入力が与えられるとき、開ループ系特性関数 $\phi_o(s)$ 、閉ループ系特性関数 $\phi_c(s)$ はそれぞれ、

$$\phi_o(s) = \det \Delta(s) \quad (3)$$

$$\phi_c(s) = \det [\Delta(s) + BK(s)] \quad (4)$$

と表わされる。ここで、 $\Delta(s)$ は(5)式で定義されており、 $K(s)$ は(6)式のように表わされる。

$$\Delta(s) \triangleq sI - A_0 - e^{-sh} A_1 - \int_{-h}^0 D(\beta) e^{s\beta} d\beta \quad (5)$$

$$K(s) \triangleq \sum_{i=0}^N \left\{ K_{0i} e^{-ish} + \int_{-ih}^0 K_{1i}(\beta) e^{s\beta} d\beta \right\} \quad (6)$$

$\Delta(s)$ 、 $K(s)$ の積分項はともに有限ラプラス変換であるが、特に $K(s)$ は無限遠点を除いて極とゼロ点をもたないことに注意しよう。閉ループ系の一巡伝達関数 $G(s)$ はつぎのように表わされる。

$$G(s) = K(s) \Delta(s)^{-1} B \quad (7)$$

ナイキスト安定判別法では $\det [I + G(s)]$ と $\phi_o(s)$ のゼロ点 ($G(s)$ の極) が重要な役割を演じたが、逆ナイキスト安定判別法では $\det [I + G(s)^{-1}]$ とゼロ点が重要な役割を演じる。以下では $\det [G(s)]$ が恒等的に 0 ではないと仮定する。 $Z_G(s)$ を伝達関数 $G(s)$ のゼロ関数と呼び、以下のように定義する。

* 明治大学理工学部 川崎市多摩区東三田 1-1-1

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

School of Science and Technology, Meiji University, Kawasaki

** School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received July 12, 1990)

(Revised October 26, 1990)

$$Z_G(s) \triangleq \phi_0(s) \det [G(s)] \quad (8)$$

3. 逆ナイキスト安定判別法

遅れ型むだ時間系の逆ナイキスト安定判別法はつぎのようになる。

《定理》 $Z_G(s)$ が虚軸上にゼロ点をもたないと仮定する。閉ループ系が右半平面に極をもたないための必要十分条件は、右半平面を囲む閉路 (C_I) に沿って、 $\det [I+G(s)^{-1}]$ のベクトル軌跡が原点を通らずに、 $Z_G(s)$ の C_I に含まれるゼロ点の数だけ原点を左回りに回ることである。

証明を行う前に証明に必要な補題を示す。

【補題 1】 $\det [I+G(s)^{-1}]$ と特性関数 $\phi_e(s)$ および $Z_G(s)$ の間にはつぎの関係がある。

$$\det [I+G(s)^{-1}] = \phi_e(s)/Z_G(s) \quad (9)$$

(証明)

$$\begin{aligned} \det [I+G(s)^{-1}] &= \frac{\det [I+G(s)^{-1}] \cdot \det [G(s)]}{\det [G(s)]} \\ &= \frac{\det [I+G(s)]}{\det [G(s)]} \end{aligned}$$

$\det [I+G(s)] = \phi_e(s)/\phi_0(s)$ の関係より⁴⁾

$$\begin{aligned} &= \frac{\phi_e(s)}{\phi_0(s) \cdot \det [G(s)]} \\ &= \phi_e(s)/Z_G(s) \quad \square \end{aligned}$$

【補題 2】 $Z_G(s)$ の右半平面のゼロ点の数は有限個である。

(証明) ゼロ関数は定義より $Z_G(s) = \det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]$ と表される。まず $\operatorname{adj} \Delta(s): n \times n$ の要素を考えると、つぎのようになる。

対角要素:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \alpha_{ij} s^i \mu^j \quad \alpha_{n-1,0} = 1$$

非対角要素:

$$\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-i-1} \beta_{ij} s^i \mu^j \quad \mu \triangleq e^{-s\tau}$$

つぎに $K(s)$ について考える。 $K(s)$ 積分項は有限ラプラス変換であり、右半平面においてその性質から $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ に対して、 $K(s) \rightarrow 0$ となる。また虚軸に平行に $|s| \rightarrow \infty$ とした場合は 0 には収束しないが、 $K_{1i} \in L^2(-h, 0; R^{m \times n})$ と限定しているため、 $K(s)$ の有界性は保証される。 $n \geq m$ であるとき、 $\det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]$ を考えると、 s と μ の最高次数はそれぞれ $m(n-1)$ であり、 s と μ のクロスタームの最高次数は $s^{m(n-1)-1} \mu^{m(n-1)-2}$ であるから、

$$\det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]$$

$$= \alpha s^{m(n-1)} (1 + \varepsilon(s)), \quad \alpha \neq 0 \quad (10)$$

と表わすことができる。ここで、 $\varepsilon(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ において、 $|s| \rightarrow \infty$, $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ となる。したがって、

$$\inf_{\substack{\operatorname{Re}(s) \geq 0 \\ |s| > \rho}} |\det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]| > 0 \quad (11)$$

となる定数 $\rho > 0$ が存在する。 $\det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]$ は超越整関数であることからコンパクトな領域においてゼロ点を有限個しかもたない、したがって、 $\det [K(s) \operatorname{adj} \Delta(s) B]$ の右半平面のゼロ点は $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, $|s| \leq \rho$ にのみ存在し、かつ有限個である。 $\square$

【補題 3】 偏角の原理⁶⁾

$f(s)$ は長さが有限な曲線 C で囲まれた閉領域において有理形関数であり、 C 上では正則でゼロ点が存在しないとする。 C の内部にある $f(s)$ の極とゼロ点の個数を重複度を含めて、それぞれ M_P , M_Z と表わす。このとき、いま s が C 上に沿って正の方向に一周すれば $f(s)$ は s 平面上で一つの閉曲線を描く。その閉曲線の原点回りの回転数は $M_Z - M_P$ に等しい、すなわち

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(s) = M_Z - M_P \quad (12)$$

が成り立つ。

(定理の証明) セクタ $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ において、 $\sigma \rightarrow \infty$ に対して $G(\sigma e^{j\theta})$ はゼロに収束するから、

$$\inf_{\substack{\operatorname{Re}(s) \geq 0 \\ |s| > \gamma}} |\det [I+G(s)^{-1}]| > 0 \quad (13)$$

となる定数 $\gamma > 0$ が存在する。したがって $\det [I+G(s)^{-1}]$ の閉右半平面のゼロ点は有限個であることがわかる。補題 2 より $Z_G(s)$ の閉右半平面のゼロ点は有限個であることと補題 1 の関係から、 $\det [I+G(s)^{-1}]$ の閉右半平面における極とゼロ点は、十分大きな r に対する領域 $\Omega_r \triangleq \{s | \operatorname{Re}(s) \geq 0, |s| \leq r\}$ にのみ存在し、しかも有限個であることがわかる。したがって、 $\phi_e(s)$ のゼロ点も領域 Ω_r にのみ存在し、有限個でなければならない。

領域 Ω_r において $\det [I+G(s)^{-1}]$ は有理形関数であるから、偏角の原理を適用することができる。領域 Ω_r における $Z_G(s)$ と $\phi_e(s)$ のゼロ点の個数を重複度を含めて、それぞれ N_Z , N_P と表わす。いま、 $\det [I+G(s)^{-1}]$ のナイキスト線図が N_Z 回原点を左回りに回ったと仮定しよう。このとき、 N_P は 0 または正の整数であるから、補題 1 および偏角の原理より $N_P = 0$ でなければならない。すなわち、 $\phi_e(s)$ は閉右半平面にゼロ点をもたない。逆にナイキスト線図が N_Z 回原点を左回りに回らないと仮定しよう。このとき偏角の原理から $N_P \neq 0$ または、ナイキスト線図が

無限遠点に向かわなければならない。ところが、 r を十分に大きな値にとっているので、領域 Ω_r の境界上に $\det[I+G(s)^{-1}]$ の極は存在しない。すなわち、ナイキスト線図は無限遠点に向かわない。したがって $N_P \neq 0$ であり、このことは、 $\phi_c(s)$ が閉右半平面にゼロ点をもつことを示している。□

なお、上記の定理では、 $Z_G(s)$ が虚軸上にゼロ点をもたないと仮定したが、 $Z_G(s)$ の虚軸上のゼロ点は存在したとしても有限個であるから、それを左側から避けるような変形した閉路について考えれば、ナイキスト安定判別法を適用することができる。

4. おわりに

遅れ型むだ時間系の逆ナイキスト安定判別法を、右半平面のゼロ点、極の数が有限個であるという事実に基づいて偏角の原理から導出した。導かれた判別法は有限次元系の場合の逆ナイキスト安定判別法と同様であり、ロバスト安定性の解析などに適用が可能である。また、文献5)の手法を用いることにより、閉

ループ系の安定性が保証されるむだ時間誤差範囲を求めることができる。

参考文献

- 1) M. J. Chen and C. A. Desoer: Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Linear Distributed Feedback System, Int. J. Control, **35**-2, 255/267 (1982)
- 2) J. H. Davis: Encirclement Conditions for Stability and Instability of Feedback Systems with Delays, Int. J. Control, **15**-4, 793/799 (1972)
- 3) R. Decarlo and R. Saeks: The Encirclement Condition an Aproach Using Algebraic Topology, Int. J. Control, **26**-2, 279/287 (1977)
- 4) K. Uchida, E. Shimemura and N. Abe: Circle Condition and Stability Margin of the Optimal Regulator for Systems with Delays, Int. J. Control, **46**-4, 1203/1212 (1987)
- 5) 阿部, 内田, 示村: むだ時間を含む線形フィードバック系におけるむだ時間に誤差が生じた場合の安定条件—ナイキスト安定判別法によるアプローチ, 計測自動制御学会論文集, **25**-1, 34/39 (1989)
- 6) 辻 正次: 複素関数論, 槇書店 (1968)