変係数離散時間システムのモード可到達性†

河野 通夫*

Mode-Reachability of Time-Varying Discrete-Time Systems

Michio KONO*

This paper considers a PBH test for reachability in a linear time-varying discrete-time systems. Let $\mathcal{R}$ denote the set of all real-valued functions defined on the set of integers. We consider a time-varying discrete-time system to be over $\mathcal{R}$, and characterize the system in terms of a semilinear transformation. Mode-reachability is defined in terms of eigenvalues and eigenvectors of the semilinear transformation. It is shown that mode-reachability is equivalent to Kalman's original reachability.

Key Words: reachability, PBH test, time-varying systems, discrete-time systems

1. ま え が き

定係数線形システムの可到達性や可観測性の判定法として PBH 法が広く用いられ、その有用性はよく知られている¹⁾。本稿では、Wu によって導入された x -固有値の概念^{2), 3)}を離散時間システムに拡張し、変係数線形離散時間システムの可到達性に関する PBH 法を提案する。

2. 準 備 事 項

整数環、実数体をそれぞれ $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ で表わす。標準的な変係数線形離散時間システム

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

を考える。ここで、 $x(k) \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル、 $u(k) \in \mathbf{R}^m$ は入力ベクトルである。(1)式において、 $k \leftarrow k-1$ とし、 $D(k) = A(k-1)$, $E(k) = B(k-1)$ と定義すれば、つぎの表現が得られる。

$$x(k) = D(k)x(k-1) + E(k)u(k-1) \quad (2)$$

以下では、(2)式の表現に基づいて議論を展開する。 $\mathbf{Z}$ 上で定義された時間関数の環を $\mathcal{R}$ で表わし、右シ

フトオペレータを σ で表わす。すなわち、 $\sigma: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}: a(k) \mapsto a(k-1)$ である。 σ を用いてオペレータ S_D を

$$S_D: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n: v \mapsto D(\sigma v)$$

と定義すれば、 S_D はシステム(2)の状態推移を表わしている⁴⁾。 $v, w \in \mathcal{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{R}$ に対し、 $S_D(v+w) = S_D v + S_D w$ であるが、 $S_D(\alpha v) = \sigma \alpha \cdot S_D v$ となるので、 S_D は半線形変換とよばれる⁴⁾。システム(2)は $\mathcal{R}$ 上のシステムとみなすことができるが、状態推移は線形でない。 S_D に双対なオペレータ $\tilde{S}_D$ を

$$\tilde{S}_D: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n: v \mapsto \sigma^{-1}(D^T v)$$

と定義する⁵⁾。さらに、 $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し、オペレータ s_λ を

$$s_\lambda: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n: v \mapsto \sigma(\lambda v)$$

と定義する。

半線形変換 S_D に対し、

$$S_D v = \lambda v \quad (3)$$

をみたす $\lambda \in \mathcal{R}$ と 0 でない $v \in \mathcal{R}^n$ が存在するとき、 λ を S_D の固有値とよび、 v をそれに対応する固有ベクトルとよぶ。同様に、 $\tilde{S}_D$ に対し、固有値 λ および固有ベクトル w を

$$\tilde{S}_D w = \lambda w \quad (4)$$

によって定義する。

(注意1) ここで定義している固有値は、Wu によって定義された^{2), 3)} x -固有値問題を離散時間システムの場合に拡張したものである。

3. 可到達性の定義

行列 P_i を

$$P_i = [E, S_D E, \dots, S_D^{i-1} E]$$

と定義し、整数 $r(k)$ および $\mu(k)$ を

$$r(k) = \max_i \{\text{rank } P_i(k) : i = 1, 2, \dots\}$$

$$\mu(k) = \min \{i : \text{rank } P_i(k) = r(k)\}$$

と定義する。

(注意2) 定係数システムであれば、 $\mu(k) \leq n$ であるが、変係数システムの場合には、 $\mu(k) > n$ の場合もある。

以下ではつぎの仮定をおく。

† 第12回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1989・11)

* 東京商船大学 東京都江東区越中島 2-1-6

* Tokyo University of Mercantile Marine, Koto-ku, Tokyo

(Received September 3, 1990)

(A.1) $r(k)$ は一定である。

(注意 3) この条件は、可到達部分空間の次元が一定であることを意味する。

(注意 4) 仮定 (A.1) に加えて、 $\mu(k)$ が一定の場合を可到達指数不変とよび、連続時間システムにおける index invariance⁶⁾に対応する。

(注意 5) たとえば、 $D(k)$ が正則な周期係数システムは常に (A.1) をみたす⁷⁾。

システム (2) に対して、 K -可到達性をつぎのように定義する。

【定義 1】⁸⁾ (a) ある N に対し、時刻 $k-N$ に原点にあった状態を任意の状態 $x(k)$ に移す入力列 $\{u(k-N), \dots, u(k-1)\}$ が存在するとき、システム (2) は時刻 k において K -可到達であるという。

(b) すべての時刻において K -可到達であるとき、システム (2) は K -可到達であるという。

(注意 6) このような可到達性の概念は Kalman によって最初に与えられた。

K -可到達であるための必要十分条件はつぎの命題によって与えられる。

【命題 1】⁸⁾ システム (2) が K -可到達であるための必要十分条件は

$$r=n \quad (5)$$

が成立することである。

つぎにモード可到達性の定義を与える。

【定義 2】 $\tilde{S}_D$ の固有値 λ に対応する固有ベクトル w に対し、 $w^T E = 0$ が成立するとき、システム (2) において固有値 λ はモード不可到達であるという。

4. 主な結果

K -可到達性とモード可到達性の関係がつぎの定理によって与えられる。

《定理》 システム (2) が K -可到達であるための必要十分条件は $\tilde{S}_D$ のすべての固有値 λ がモード可到達なことである。

(証明) (必要性) ある λ に対してモード可到達でないとは仮定すれば、

$$\tilde{S}_D w = \lambda w, \quad w^T E = 0$$

が成立する。付録の補題 1 によって、任意の i に対し、

$$\begin{aligned} w^T P_i &= w^T [E, S_D E, \dots, S_D^{i-1} E] \\ &= [w^T E, s_\lambda(w^T E), \dots, s_\lambda^{i-1}(w^T E)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、命題 1 によってシステム (2) は K -可到達でない。

(十分性) システム (2) が K -可到達でないと仮定

すれば、 $r < n$ であるから、

$$\dim(\text{im } P_\mu(k))^\perp = n - r$$

となる。 $(\text{im } P_\mu(k))^\perp$ の基ベクトルを $e_1(k), \dots, e_{n-r}(k)$ とする。 $P_\mu(k)$ の定義から

$$D(k+1)\text{im } P_\mu(k) \subset \text{im } P_\mu(k+1)$$

が成立する。直交補空間をとると、

$$D^T(k+1)(\text{im } P_\mu(k+1))^\perp \subset (\text{im } P_\mu(k))^\perp \quad (6)$$

が得られる。 $\tilde{S}_D$ を用いると、(6) 式は

$$\tilde{S}_D [e_1, \dots, e_{n-r}] = [e_1, \dots, e_{n-r}] \hat{A}^T \quad (7)$$

と表現できる。ここで、 $\hat{A}$ はサイズが $n-r$ の正方向列である。 $\tilde{S}_A$ の固有値、固有ベクトルを $\lambda, \hat{w}$ とすれば、

$$\tilde{S}_A \hat{w} = \lambda \hat{w}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \hat{A}^T \hat{w} &= \sigma(\lambda \hat{w}) \\ &= \sigma \lambda \cdot \sigma \hat{w} \end{aligned} \quad (8)$$

が成立する。(7) 式の両辺に右から $\hat{w}$ をかけると、左辺は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_D [e_1, \dots, e_{n-r}] \sigma^{-1}(\sigma \hat{w}) \\ &= \sigma^{-1}(D^T [e_1, \dots, e_{n-r}] \sigma \hat{w}) \\ &= \tilde{S}_D [e_1, \dots, e_{n-r}] \sigma \hat{w} \end{aligned}$$

となる。いっぽう、右辺は、(8) 式によって、

$$[e_1, \dots, e_{n-r}] \hat{A}^T \hat{w} = \sigma \lambda [e_1, \dots, e_{n-r}] \sigma \hat{w}$$

となる。したがって、 $z = [e_1, \dots, e_{n-r}] \cdot \sigma \hat{w}$ と $\sigma \lambda$ はそれぞれ $\tilde{S}_D$ の固有ベクトルおよび固有値になる。ところが、 $e_1(k), \dots, e_{n-r}(k)$ は $(\text{im } P_\mu(k))^\perp$ の基ベクトルであるから

$$z(k) \in (\text{im } P_\mu(k))^\perp$$

となり、 $z(k)E(k) = 0$ が成立する。したがって、 $\sigma \lambda$ はモード可到達でない。□

5. あとがき

変係数連続時間システムの場合と同様^{2),3)}、差分方程式を解くことにより具体的に固有ベクトルを求めたり、モードベクトルを定義することにより安定性の条件を与えることも可能であるが⁹⁾、本稿では省略する。また、文献 10) において別の立場から変係数システムの極が定義されているが、本稿の結果との関係を調べることは将来に残された問題である。

参考文献

- 1) T. Kailath: Linear Systems, Prentice-Hall (1980)
- 2) M. Y. Wu: A New Concept of Eigenvalues and Eigen Vectors and Its Application, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-25-4**, 824/826 (1980)
- 3) M. Y. Wu: On Stability of Linear Time-Varying Systems, Int. J. Systems Sci., **15-2**, 137/150 (1984)
- 4) E. W. Kamen and K. M. Hafez: Algebraic Theory

- of Linear Time-Varying Systems, SIAM J. Control and Optimization, **17**-4, 500/510 (1979)
- 5) 河野通夫：変係数線形離散時間システムの実現問題，第9回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，271/274 (1986)
- 6) A.S. Morse and L.M. Silverman: Structure of Index-Invariant Systems, SIAM J. Control, **11**-2, 215/225 (1973)
- 7) 河野通夫：周期係数線形離散時間系の固有値設定，計測自動制御学会論文集，**15**-2, 186/192 (1976)
- 8) L. Weiss: Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems, SIAM J. Control, **10**-2, 230/251 (1972)
- 9) 河野通夫：変係数システムに関する一考察，第12回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，301/304 (1989)
- 10) E. W. Kamen: The Poles and Zeros of a Linear Time-Varying System, Linear Alg. and Its Appl., **98**, 263/289 (1988)
- 11) J. Zhou and C.D. Johnson: New Results in the Reduction of Linear Time-Varying Dynamical Systems, SIAM J. Control and Optimization, **27**-3, 476/496 (1989)

《付 録》

[補題 1] $\tilde{S}_D$ の固有値，固有ベクトルを λ ， w としたとき，つぎの関係が成立する。

$$w^T S_b^j E = s_\lambda^j (w^T E), \quad (9)$$

(証明) $j=0$ のとき，(9)式が成立することは明らか。 $j=q-1$ のとき，(9)式が成立すると仮定すれば，

$$\begin{aligned} w^T S_b^q E &= w^T D \cdot \sigma(S_b^{q-1} E) \\ &= \sigma[\sigma^{-1}(w^T D) \cdot S_b^{q-1} E] \\ &= \sigma[(\tilde{S}_D w)^T \cdot S_b^{q-1} E] \\ &= \sigma[\lambda w^T \cdot S_b^{q-1} E] \\ &= \sigma[\lambda s_\lambda^{q-1} (w^T E)] \\ &= s_\lambda^q (w^T E) \end{aligned}$$

□