構造の簡単なロバスト適応制御系

岩井 善太*・大友 篤*・水本 郁朗*

Simplified Robust Adaptive Control Systems

Zenta Iwai*, Atsushi Ohtomo* and Ikurou Mizumoto*

Recently, the so-called simple adaptive control (SAC) techniques have been turned attention because of its high practical control performance in spite of its quite simple control structure. The method is fundamentally applicable to plants which satisfy the so-called almost strictly positive real (ASPR) condition.

In this paper, it is shown that, even if the plant contains some kinds of disturbances and nonlinearities and does not satisfy ASPR condition, the control performance can be improved quite well by adding a simple robust adaptive controller to the original SAC algorithm. Effects of such a robust controller are examined by a practical DC servo control equipment.

Key Words: adaptive control, robust adaptive control, strict positive realness, DC servo system, simplified adaptive controller

1. 緒 言

適応制御理論の基本的体系化はすでに完了したといってもよいほど、適応制御理論の発展には目ざましいものがある。しかし、その実システムへの応用という面では一般的に信頼のおける効果的な制御技術であるという評価が定着していないことも残念ながら事実である。その主な理由としては、まず、理論面での諸仮定が、実システムにおいて満たされない場合、制御効果が大きく低下することが多く、期待していたほどロバスト性が得られなかった点を挙げることができる。2番目に適応コントローラ構成の複雑さを挙げることができる。この複雑さは信頼性の低下につながり、また、実装時における計算量増大といった困難さをもたらしている。第1の点については、過去10年

間ロバスト適応制御手法として、多くの研究が進められてきた^{1),2)}。しかし、それらの多くは、従来の適応アルゴリズムにロバスト機構を付加した形式で与えられていたため、制御機構の一層の複雑さをもたらした。さらに、それらの多くは、寄生要素、外乱などの阻害要因を個別に解決する形式で与えられている。しかし、実システムでは、それらは総合された形で存在することが多い。

本稿では、上記問題点のうち、適応制御機構の簡素化に焦点を絞り、Simple Adaptive Control (以下簡単のためSACと略記)と呼ばれる手法について検討する。これは、Sobelら³⁾により最初に提案されたもので、プラントが後述するASPR (Almost Strictly Positive Real) 条件を満たすという条件下で構造の簡単な制御系が構成できるというものである。この考えは、その後、Bar-KanaとKaufman^{4)~6)}によって拡張された。この手法は、規範モデルを低次元モデルに選ぶことができ、また、適応コントローラ次数をプラント次数に依存しない形式で簡単に構成できるという特長を有している。本稿では、このようなSACに外乱などの不確定要素の上限を推定するロバスト適応機構を付加することで、SACのもつロバスト機能を大幅に向上させ、かつ、制御性能も向上させうること示す。以下、2章および3章でSACに関する従来の結果を整理・補足して述べる。また、シミュレーションおよびDCサーボ系制御実験により、手法の有効性を示す。なお、SACに関するわかりやすい解説が最近発表されている¹³⁾。

2. S A C

つぎに示す n_p 次可制御可観測な1入出力線形系を考える。

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}_p u_p(t) \quad (2.1a)$$

$$y_p(t) = \mathbf{c}_p^T \mathbf{x}_p(t) + d_p u_p(t) \quad (2.1b)$$

ここに、 $\mathbf{A}_p \in R^{n_p \times n_p}$, $\mathbf{b}_p, \mathbf{c}_p \in R^{n_p \times 1}$ なる未知行列、

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received June 27, 1990)

(Revised October 22, 1990)

ベクトルである(注1)。また、このプラントはつぎの仮定を満足しているとする。

〔仮定1〕 (i) (2.1)式は ASPR である。すなわちあるゲイン定数 k_p^* ($d_p \neq 0$ のときは $k_p^* \neq d_p^{-1}$) が存在し、

$$\begin{aligned} A_{pc} &= A_p + \mathbf{b}_p k_{pc}^* \mathbf{c}_p^T, & \mathbf{b}_{pc} &= \mathbf{b}_p / \alpha \\ \mathbf{c}_{pc} &= \mathbf{c}_p / \alpha, & d_{pc} &= d_p / \alpha \\ k_{pc}^* &= k_p^* / \alpha, & \alpha &= 1 - d_p k_p^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

とすると、 $G_s(s) = \mathbf{c}_{pc}^T (sI - A_{pc})^{-1} \mathbf{b}_{pc} + d_{pc}$ が強正実 (SPR) となる。

(ii)

$$\begin{bmatrix} A_p & \mathbf{b}_p \\ \mathbf{c}_p^T & d_p \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

は、正則である。

つぎに、追従すべき n_m 次の漸近安定な規範モデルを

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = A_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}_m u_m(t) \quad (2.4a)$$

$$y_m(t) = \mathbf{c}_m^T \mathbf{x}_m(t) + d_m u_m(t) \quad (2.4b)$$

とおく。

制御目的は、 $e_y(t) = y_p(t) - y_m(t)$ とするとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0 \quad (2.5)$$

である。

つぎに、制御系構成を考える。そのためにまず、出力完全追従条件について考察しておく。いま、 $e_y(t) \equiv 0$, $t \geq 0$ が成立しているとし、そのときのプラント状態量、および入出力を $\mathbf{x}_p^*(t)$, $u_p^*(t)$, $y_p^*(t)$ とおくと、

$$\dot{\mathbf{x}}_p^*(t) = A_p \mathbf{x}_p^*(t) + \mathbf{b}_p u_p^*(t) \quad (2.6a)$$

$$y_p^*(t) = y_m(t) = \mathbf{c}_p^T \mathbf{x}_p^*(t) + d_p u_p^*(t) \quad (2.6b)$$

が成立する。このとき、つぎの補題を得る。

〔補題1〕⁷⁾ (i) 仮定1が成立している。

(ii) $u_m(t)$ は有界、 $\dot{u}_m(t)$ は有界かつ区分的に連続。

(iii)

$$\begin{bmatrix} A_p & \mathbf{b}_p \\ \mathbf{c}_p^T & d_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix} = I$$

とする。ここに、 Ω_{ij} はそれぞれ適切な次数の行列ベクトル、スカラーである。ただし、 Ω_{11} の固有値は A_m の固有値の逆数とは等しくないとする。このとき、

$$\mathbf{x}_p^*(t) = S_{11} \mathbf{x}_m(t) + S_{12} u_m(t) + S_{13}(t) \quad (2.7a)$$

$$u_p^*(t) = S_{21} \mathbf{x}_m(t) + S_{22} u_m(t) + S_{23}(t) \quad (2.7b)$$

が成立する。ここに、 S_{11} , S_{12} , S_{21} , S_{22} はそれぞれ適切な次数の行列、ベクトル、スカラーである。また、 $S_{13}(t)$, $S_{23}(t)$ は有界な時間関数である。

(証明) Broussard⁷⁾によれば、条件(iii)のもとで、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p^*(t) \\ u_p^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ u_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11} \\ \Omega_{12} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \quad (2.8)$$

$$\Omega_{11} \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) - S_{12} \dot{u}_m(t) \quad (2.9)$$

が成立する。 Ω_{11} の固有値の逆数は、1 入出力系の場合には、プラント伝達関数の零点と一致するが⁸⁾、条件(i)により、これは必ず左半面にある。よって、条件(ii)のもとで(2.9)式の解は、有界な関数となる。これと(2.8)式から、補題の結果は明らかである。

(証明終)

もし、パラメータが既知ならば、補題の条件(iii)の Ω_{ij} から(2.7)式の S_{ij} が決定できることに注意しておく。

上記補題の条件(ii)に対し、さらに、 $u_m(t)$ が

$$|\dot{u}_m(t)| \leq M_m \exp(-\alpha t), \quad M_m, \alpha \geq 0 \quad (2.10)$$

を満たしているとする、 $S_{13}(t)$, $S_{23}(t)$ は、 $t \rightarrow \infty$ で零に収束するので、(2.7)式において、実際にはこの項を無視できる。たとえば、 $u_m(t)$ がステップ入力の場合には、この項を無視した扱いができる³⁾。本章の以下の議論では、(2.10)式が成立しているものとし、この項を無視することにするが、4章以降では、 $S_{13}(t)$, $S_{23}(t)$ が有界関数となる場合を含めて取り扱う。

さて、実際にはプラントパラメータ未知なので、(2.7)式を構成することはできない。

そのときの実際の状態と理想状態とのずれを

$$\Delta \mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_p^*(t) \quad (2.11a)$$

$$e_y(t) = y_p(t) - y_m(t) = y_p(t) - y_p^*(t) \quad (2.11b)$$

とおく。このときの制御目的は、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = 0$ を達成することである。ここで、制御入力を

$$u_p(t) = k_e(t) e_y(t) + \mathbf{k}_x^T(t) \mathbf{x}_m(t) + k_u(t) u_m(t) \quad (2.12)$$

と構成すると、理想状態に対する誤差システムは、

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_p(t) = A_{pc} \Delta \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}_{pc} (\mathbf{z}^T(t) \boldsymbol{\zeta}(t)) \quad (2.13a)$$

$$e_y(t) = \mathbf{c}_{pc}^T \Delta \mathbf{x}_p(t) + d_{pc} (\mathbf{z}^T(t) \boldsymbol{\zeta}(t)) \quad (2.13b)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{z}(t) = [e_y(t), \mathbf{x}_m^T(t), u_m(t)]^T$$

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad \Theta^* = [k_e^*, S_{21}, S_{22}]^T \quad (2.14)$$

$$\Theta(t) = [k_e(t), \mathbf{k}_x^T(t), k_u(t)]^T$$

であり、 k_e^* および A_{pc} , $\mathbf{b}_{pc}$, $\mathbf{c}_{pc}$, d_{pc} は、(2.2)式で定義した。ここで、 Θ^* は未知なので、目的達成のためには、適応同定則の導入が必要となる。たとえば、スカラー関数 $V(t) = \Delta \mathbf{x}_p^T(t) P \Delta \mathbf{x}_p(t) + \boldsymbol{\zeta}^T(t) \Gamma^{-1} \boldsymbol{\zeta}(t)$, $P = P^T > 0$, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ を導入すれば、仮定1(i)のもとで、適応同定則

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = \dot{\Theta}(t) = -\Gamma \mathbf{z}(t) e_y(t) \quad (2.15)$$

を用いて制御目的が達成できることは簡単に証明でき

(注1) 直達項まで含めた形の制御対象を考えているのは、後述するフィードフォワード補償のいかなる直達項の生ずる場合もあるためである。

る。しかし、(2.15)式は、右辺に $-e_y^2(t)$ を含み、外乱に対しロバストでなくなる。したがって、実際には、比例+積分同定則：

$$\begin{aligned}\Theta(t) &= \Theta_I(t) + \Theta_P(t) \\ \dot{\Theta}_I(t) &= -\Gamma_I z(t) e_y(t) - \sigma(t) \Theta_I(t), \quad \Gamma_I = \Gamma_I^T > 0 \\ \Theta_P(t) &= -\Gamma_P z(t) e_y(t), \quad \Gamma_P = \Gamma_P^T > 0 \\ \sigma(t) &= \sigma e_y^2(t) / (1 + e_y^2(t)), \quad \sigma > 0\end{aligned}\quad (2.16)$$

を用いることが推奨される⁵⁾。ただし、この場合には、誤差の有界性が保証されるのみである。

3. ASPR 条件の検討

仮定 1 (i) の ASPR 条件が満たされない場合プラントにフィードフォワード補償を施すことで、実際上この条件が緩和できることを Bar-Kana は述べているが⁹⁾、その場合のフィードフォワード補償要素の満たすべき条件についてほとんど検討していないので以下で検討しておく。いま、プラント (2.1) の伝達関数を

$$G_p(s) = c_p^T (sI - A_p)^{-1} b_p + d_p = B_p(s) / A_p(s) \quad (3.1)$$

とおく。ただし、 $\deg A_p(s) = n_p$, $\deg B_p(s) = m_p$ とする。 $n_p \geq m_p$ である。また、つぎの伝達関数

$$H(s) = D(s) / C(s) \quad (3.2)$$

を考える。ただし、 $\deg C(s) = n_h$, $\deg D(s) = m_h$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}G_a(s) &= G_p(s) + H^{-1}(s) = B_a(s) / A_a(s) \\ &= \sum_{j=0}^{m_a} b_j s^j \left/ \left(\sum_{i=0}^{n_a} a_i s^i \right) \right., \quad a_{na} \neq 0, \quad b_{ma} \neq 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

を考える。この $G_a(s)$ が ASPR であるための十分条件は、Zeheb の条件⁹⁾を拡張した、(i) $B_a(s)$ が安定多項式、(ii) $n_a - m_a \leq 1$ 、(iii) $n_a - m_a = 1$ のとき最高位係数 $b_{ma}/a_{na} > 0$ 、となる(注2)。以上から、つぎの結果を得る。 $G_p(s)$ が ASPR でない場合には、 $G_a(s)$ が ASPR となるようにフィードフォワード補償 $H^{-1}(s)$ を施し (Fig. 1)、この $G_a(s)$ について SAC を適用すればよい。このとき、 $H^{-1}(s)$ を実際に使用する周波数帯域内で“微小”に取ることができるならば、 $y_a(s) \approx y_p(s)$ となり、制御目的の達成に支障はない。

Fig. 1 ASPR plant with feedforward compensation

(注2) Zeheb は、 $n_a - m_a = 0$ のときに $b_{ma}/a_{na} > 0$ を仮定しているが、実際は不要である。

ここで問題となるのは、 $H(s)$ の選定である。いま、 $G_p(s)$, $H(s)$ の相対次数をそれぞれ、 $\alpha = n_p - m_p$, $\gamma = n_h - m_h$ とおく。 $H^{-1}(s)$ を実際に構成する必要上 $H(s)$ は、物理的実現可能条件： $\gamma \leq 0$ 、を満たしておらねばならない。さらに、前述の Zeheb の条件を $G_a(s)$ が満足するためには、 $G_p(s)$ と $H(s)$ の相対次数および最高位係数はつぎの関係を満たさねばならない。

【補題 2】 プラント $G_p(s)$ と物理的に実現可能な $H(s)$ を考える。このとき、 $G_p(s)$ と $H(s)$ の相対次数および最高位係数に関し、以下の条件が満足されておれば、 $G_a(s)$ は、Zeheb の条件(ii)と(iii)を満たす。

条件：

- 1) $\alpha = 0$: $\gamma \leq 0$
- 2) $\alpha = 1$ かつ $\beta_p > 0$:
 - (i) $\gamma = 0$,
 - (ii) $\gamma = -1$ かつ $\beta_h < -1/\beta_p$, $\beta_h > 0$
 - (iii) $\gamma < -1$
- 3) $\alpha = 1$ かつ $\beta_p < 0$:
 - (i) $\gamma = 0$,
 - (ii) $\gamma = -1$ かつ $0 < \beta_h < -1/\beta_p$
- 4) $\alpha > 1$:
 - (i) $\gamma = 0$,
 - (ii) $\gamma = -1$ かつ $0 < \beta_h$

ただし、 β_p , β_h はそれぞれ、 $G_p(s)$, $H(s)$ の最高位係数を示す。

(証明) 付録 A.

つぎに、Zeheb の条件(i)に関してであるが、これは、

$$B_a(s) = A_p(s)C(s) + B_p(s)D(s) \quad (3.4)$$

が安定多項式となるような $C(s)$, $D(s)$ の選定問題となる。補題 2 は、 $H(s)$ がプロパーであれば常に満足されている。よって、もし、パラメータが既知ならば、プラントが可御制かつ可観測なので、 $A_p(s)$, $B_p(s)$ は互いに素となり、 $n_h = m_h = n_p - 1$, $m_a = 2n_p - 1$ において $B_a(s)$ を与えれば、 $C(s)$, $D(s)$ は、一意に決定可能である。それ以外の一般的な場合についても次数の関係は議論されている¹⁰⁾。しかし、理論としては、プラントパラメータ未知としているので、その場合は、試行錯誤で $H(s)$ を決定する以外に方法はない。ただ、実際問題においては、プラントパラメータの概略値を事前を知ることができる場合も少なくない。その場合には、試行錯誤の手順を上述の考察を利用してかなり簡易化できる。Bar-Kana は、この点に関し、実際上は、 $H^{-1}(s)$ を定数、あるいは、1次おくれ系で構成できる場合が少なくないことを強調している^{5), 6)}。

4. 外乱にロバストな SAC の構成

4.1 ASPR 条件が満足される場合

つぎの外乱を含む n_p 次 1 入出力プラントを考える。

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}_p u_p(t) + \mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) \quad (4.1a)$$

$$y_p(t) = \mathbf{c}_p^T \mathbf{x}_p(t) + d_p u_p(t) \quad (4.1b)$$

$$\bar{\mathbf{y}}_p(t) = \mathbf{E} \mathbf{x}_p(t), \quad \bar{\mathbf{y}}_p \in R^{n_{ap} \times 1}, \quad n_{ap} \leq n_p \quad (4.1c)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{y}}_p(t)$ は観測可能な変数とする。追従すべき規範モデルを

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{b}_m u_m(t) \quad (4.2a)$$

$$y_m(t) = \mathbf{c}_m^T \mathbf{x}_m(t) + d_m u_m(t) \quad (4.2b)$$

とおく。ここで、プラントに対し以下の仮定をおく。

[仮定 2]

(i) (4.1) 式の線形部および (4.2) 式は、補題 1 の条件を満足する。

$$(ii) \quad \mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) = \bar{\mathbf{b}}_p \hat{\theta}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) \quad (4.3)$$

なる $\hat{\theta}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t))$ が存在する。

$$(iii) \quad |\hat{\theta}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t))| \leq \rho_0 + \rho_1 \|\bar{\mathbf{y}}_p(t)\| \quad (4.4)$$

となる未知定数、 $\rho_0, \rho_1 > 0$ が存在する。

(iv) d_p は微小または零。具体的には、

$$\rho_{G1} < \lambda_{\min}[Q], \quad \exists \rho_{G1}$$

ただし、 Q, ρ_{G1} は (B.3), (B.12b) 式で定義

制御目的は、出力 y_p を規範モデル出力 y_m に追従させることである。この目的を達成するため、制御入力を (2.12) 式に外乱補償項 $u_R(t)$ を付加して、

$$u_p(t) = \Theta^T(t) \mathbf{z}(t) + u_R(t) \quad (4.5)$$

と構成する。 $\Theta(t), \mathbf{z}(t)$ は (2.14) 式で定義した。外乱補償項 $u_R(t)$ は、ここでは、

$$u_R(t) = \begin{cases} -\beta^T(t) \mathbf{z}_\beta(t) \operatorname{sgn} e_y(t), & |\beta^T(t) \mathbf{z}_\beta(t) e_y(t)| > \varepsilon \\ -\{\beta^T(t) \mathbf{z}_\beta(t)\}^2 e_y(t) / \varepsilon, & |\beta^T(t) \mathbf{z}_\beta(t) e_y(t)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\beta(t) = [\beta_0(t), \beta_1(t)]^T, \quad \mathbf{z}_\beta(t) = [1, \|\bar{\mathbf{y}}_p(t)\|]^T \quad (4.6)$$

とおいている。(4.5), (4.6) 式における可変パラメータ $\Theta(t), \beta(t)$ は、以下の適応同定則で調整する。

$$\dot{\Theta}(t) = \Theta_I(t) + \Theta_p(t), \quad \Theta_p(t) = -\Gamma_{\theta p} \mathbf{z}(t) e_y(t)$$

$$\dot{\Theta}_I(t) = -\Gamma_{\theta I} \mathbf{z}(t) e_y(t) - \sigma_\theta(t) \Theta_I(t) \quad (4.7a)$$

$$\beta(t) = \beta_I(t) + \beta_p(t), \quad \beta_p(t) = \Gamma_{\beta p} \mathbf{z}_\beta(t) |e_y(t)|$$

$$\dot{\beta}_I(t) = \Gamma_{\beta I} \mathbf{z}_\beta(t) |e_y(t)| - \sigma_\beta(t) \beta_I(t) \quad (4.7b)$$

ここに、 $\Gamma_{\theta p}, \Gamma_{\theta I}, \Gamma_{\beta p}, \Gamma_{\beta I}$ は、正定対称行列である。 $\sigma_\theta(t), \sigma_\beta(t)$ は、(2.16) 式で定義されている。さらに、(4.6) 式の ε は、切り換え時のチャタリングを緩和するために導入された微小正数である。このとき、つぎの定理が成立する。

《定理 1》 制御入力 (4.5) をプラント (4.1) に適用したとき、制御系内の全信号は、一様終局有界 (Uniformly Ultimate Bounded: UUB)¹²⁾ となる。

(証明) 付録 B.

4.2 ASPR 条件が満足されない場合

つぎの直達項のない外乱を含む n_p 次プラントを考える。

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{b}_p u_p(t) + \mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) \quad (4.8a)$$

$$y_p(t) = \mathbf{c}_p^T \mathbf{x}_p(t) \quad (4.8b)$$

この系の線形部は、ASPR 条件を満足していないとする。ただし、 $\mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t))$ は、仮定 2 (ii), (iii) を満足しているとする。ここに、 $\bar{\mathbf{y}}_p(t)$ は、(4.1c) 式で定義した変数である。3 章で述べたように、(4.8) 式にフィードフォワード補償を施すことにより、その拡張系を ASPR にできる。補題 2 によれば、一般に、フィードフォワード補償要素がプロパーであれば、プラントの相対次数のいかんにかかわらず ASPR 化可能となるので、ここでは、フィードフォワード補償特性を状態方程式の形で、

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{b}_h u_p(t) \quad (4.9a)$$

$$y_h(t) = \mathbf{c}_h^T \mathbf{x}_h(t) + d_h u_p(t) \quad (4.9b)$$

と与え、ASPR 化を図るものとする。ここに、 $\mathbf{x}_h(t) \in R^{n_h \times 1}$ は適切な次数の状態ベクトルである。(4.3), (4.8), (4.9) 式から、つぎの拡張系を得る。

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_p(t) = \bar{\mathbf{A}}_p \bar{\mathbf{x}}_p(t) + \bar{\mathbf{b}}_p u_p(t) + \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) \quad (4.10a)$$

$$y_a(t) = \bar{\mathbf{c}}_p^T \bar{\mathbf{x}}_p(t) + \bar{d}_p u_p(t) \quad (4.10b)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) = \bar{\mathbf{b}}_p \hat{\theta}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) - \bar{\mathbf{b}} \hat{\theta}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t)) \quad (4.11a)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_h \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_p \\ \mathbf{b}_h \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_h \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_p^T = [\mathbf{c}_p^T, \mathbf{c}_h^T], \quad \bar{d}_p = d_h \quad (4.11b)$$

上式に対する規範モデルを次式で与えれば、

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_m(t) = \bar{\mathbf{A}}_m \bar{\mathbf{x}}_m(t) + \bar{\mathbf{b}}_m u_m(t) \quad (4.12a)$$

$$\bar{y}_m(t) = \bar{\mathbf{c}}_m^T \bar{\mathbf{x}}_m(t) + \bar{d}_m u_m(t) \quad (4.12b)$$

制御目的は、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_a(t) - \bar{y}_m(t)) = 0$ となる。

さて、(4.9) 式の構成手順から拡張系 (4.10) の線形部は ASPR となり、また、(4.12) 式は補題 1 の条件を満たすように選ぶことができるので、4.1 節に示した (4.5) ~ (4.7) 式とまったく同様の構造の制御則を用いることが可能となる。すなわち、形式的に (4.5) ~ (4.7) 式的全変数に “—” を付せばよい。このとき、つぎの定理が成立する。

《定理 2》 拡張系 (4.10) は可制御、可観測とし、それに対し、(4.5) ~ (4.7) 式とまったく同様の構造の制御則を適用したとする。このとき、外乱 $\mathbf{g}(t, \bar{\mathbf{y}}_p(t))$ に関し、(4.3), (4.4) 式が成立し、かつ、

$$\|\bar{\mathbf{b}}_h\| < \frac{\lambda_{\min}[Q] - \rho_{G1}}{2\lambda_{\max}[P] \rho_{10}^*} \quad (4.13)$$

$\rho_g^* = \|E\|$, ρ_{G1} は (B.12b) 式で定義.

なる条件が満たされれば, 制御系内の全信号は一様終局有界となる. ここに, (4.13) 式の P, Q は, Kalman-Yakubovich の補題により与えられる関係式,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{pc}^T P + P \bar{A}_{pc} &= -Q - \mathbf{U}^T \\ \bar{b}_{pc}^T P + w \mathbf{U}^T &= \bar{c}_{pc}^T \\ 2\bar{d}_{pc} &= w^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

より与えられる正定対称行列である. ただし, $\bar{A}_{pc}$, $\bar{b}_{pc}$, $\bar{c}_{pc}$, $\bar{d}_{pc}$ は, 拡張系 (4.10) に対し, (2.2) 式と同様に定義したものである. (4.10) 式は, ASPR であるから (4.14) 式の関係式は必ず成立することに注意しておく.

(証明) 付録 C.

5. 数値シミュレーションおよび実験による検討

5.1 2次非 ASPR 系数値シミュレーション

つぎの 2 次非 ASPR 不安定プラントを考える.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} g(t, \bar{\mathbf{y}}_p) \\ y_p(t) &= [1, 0] \mathbf{x}_p(t), \quad \bar{\mathbf{y}}_p(t) = y_p(t) \\ g(t, \bar{\mathbf{y}}_p) &= 0.5 y_p(t) \sin 4\pi t + 0.2 \sin y_p(t) \\ &\quad + 0.2 \sin 20\pi t + 0.5 \end{aligned} \quad (5.1)$$

この系は非 ASPR 系なので, フィードフォワード補償 $H^{-1}(s)$ としては, (5.1) 式のパラメータ値の 50% の値が基準値としてわかっているものと仮定して,

$$\dot{x}_h(t) = -10x_h(t) + 0.01u_p(t), \quad y_h(t) = x_h(t) \quad (5.2)$$

を用いて ASPR 化し, $y_a(t) = y_p(t) + y_h(t)$ について, 制御系を構成した. ただし, 追従すべきモデルとしては, 1 次おくれ系,

$$\dot{x}_m(t) = -2x_m(t) + 2u_m(t), \quad y_m(t) = x_m(t) \quad (5.3)$$

を与えている. 規範入力として, 周期 10 (s), 振幅 0.5 の矩形波を与えたときの出力 $y_p(t)$ の応答を Fig. 2 に示している. ただし, 設計パラメータとしては,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta I} &= \Gamma_{\theta p} = \Gamma_{\beta I} = \Gamma_{\beta p} = 100I, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\beta = 0.01, \quad \varepsilon = 0.01 \end{aligned}$$

と与えた. ロバスト SAC が外乱の影響をよく補正していることがわかる.

5.2 DC サーボ系の実験

DC サーボモータでアーム回転角制御を行う場合について検証を行った. 装置をモデル化した状態方程式は,

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_p \end{bmatrix} \mathbf{x}_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_p \end{bmatrix} u_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_p \end{bmatrix} \sin x_{p1} \quad (5.4a)$$

(a) SAC

(b) Robust SAC

Fig. 2 Simulation results of the example

$$y_p(t) = [1, 0] \mathbf{x}_p(t), \quad \bar{\mathbf{y}}_p(t) = y_p(t) \quad (5.4b)$$

と与えられる. ただし, $\mathbf{x}_p^T(t) = [x_{p1}, x_{p2}] = [\theta_a, \dot{\theta}_a]$, θ_a : アーム回転位置, $\dot{\theta}_a$: アーム回転速度である. また, α_p, β_p, a_p は, モータ各種定数, アームのイナーシャより定められる定数である. (5.4a) 式第 3 項は, アーム位置変化に伴う非線形項であり, これを無視したときの伝達関数は,

$$G_a(s) = a_p / (s(s + \alpha_p)) \quad (5.5)$$

で与えられる. 追従すべきモデルは, 漸近安定な 2 次モデルとし,

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_m(t) \quad (5.6a)$$

とおく. $u_m(t)$ は, $\dot{y}_m(t)$ が等加速一定等減加速停止の台形波の繰返しとなるように与えた. (5.5) 式は, ASPR でないのでフィードフォワード補償としては, $H^{-1}(s) = \text{定数} = 0.01$ を付加している. 実験結果の一例を Fig. 3 に示す. この実験は, PID 制御, SAC, ロバスト SAC について行ったものであるが, 3 者とも負荷イナーシャがある基準状態のとき最適応答を示すようにコントローラを調整しておき, そのままの状態では, アーム先端に錘を取り付け, 負荷イナーシャを変化させ, 応答をみたものである. Fig. 3 に示した結果は, 負荷イナーシャを基準状態の約 11 倍に変化させたときのものである. PID 制御では, 途中で制御不能となっている. SAC とロバスト SAC では, 誤差を調べれば, ロバスト SAC のほうがより高精度で制御していることがわかる.

(a) PID control

(b) SAC

(c) Robust SAC

Fig. 3 Comparison of experimental results for parameter variations

6. 結 言

ここでは、外乱にロバストな構造の簡単な適応制御系の構成法について述べた。本手法では適応制御系の構造を簡単な形式で与えることができ、制御効果も実験例などに示したようによいことから実際の適応制御手法として、非常に有効であると思われる。

参 考 文 献

- 1) 寺尾, 金井: ロバスト適応制御入門, オーム社 (1989)
- 2) K.S. Narendra (ed.): Adaptive and Learning Systems, Plenum Press (1985)
- 3) K. Sobel, H. Kaufman and L. Mabus: Implicit Adaptive Control for a Class of MIMO Systems, IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems, **AES-18-5**, 576/590 (1982)
- 4) I. Bar-Kana and H. Kaufman: Global Stability and Performance of a Simplified Adaptive Control, Int. J. Control, **42-6**, 1491/1505 (1985)
- 5) I. Bar-Kana: Parallel Feedforward and Simplified Adaptive Control, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, **1**, 95/109 (1987)
- 6) I. Bar-Kana and H. Kaufman: Simple Adaptive Control of Uncertain Systems, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, **2**, 133/143 (1988)
- 7) J. R. Broussard and M. J. O'Brien: Feedforward Control to Track the Output of a Forced Model, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-25-4**, 851/853 (1980)
- 8) E. J. Davison and S. H. Wang: Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems, Automatica, **10-6**, 643/658 (1974)
- 9) E. Zeheb: A Sufficient Condition for Output Feedback Stabilization of Uncertain Systems, IEEE Trans., **AC-31-11**, 1055/1057 (1986)
- 10) 鈴木, 新中, 田中: 適応極配置系の一構成法, 計測自動制御学会論文集, **19-1**, 28/35 (1983)
- 11) M. Corless and G. Leitmann: Continuous State Feedback Control Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, IEEE Trans., **AC-26-5**, 1139/1144 (1981)
- 12) Y. H. Chen: On the Deterministic Performance of Uncertain Dynamical Systems, Int. J. Control, **43-5**, 1557/1579 (1986)
- 13) 岩井: 構造の簡単な適応制御 (SAC), コンピュートロール, **32**, 66/72 (1990)

《付 録》

A.

(3.1)~(3.3)式より

$$G_a(s) = \frac{B_p(s)D(s) + A_p(s)C(s)}{A_p(s)D(s)} \quad (\text{A.1})$$

となることから, n_a , m_a は,

$$n_a = n_p + m_h \quad (\text{A.2a})$$

$$m_a = \max(m_p + m_h, n_p + n_h) = n_p + m_h + \max(-\alpha, \gamma) \quad (\text{A.2b})$$

となる。よって, $G_a(s)$ の相対次数は,

$$n_a - m_a = -\max(-\alpha, \gamma) = \min(\alpha, -\gamma) \quad (\text{A.3})$$

と表わされる。この関係を用いて, 補題条件1)~4)が Zeheb の条件(ii), (iii)を満足していることを示す。

条件1), 2)(i), 3)(i), 4)(i)については, (A.3)式より, $n_a - m_a = 0$ となり満足していることは明らかである。残りの条件については, $n_a - m_a = 1$ となり Zeheb の条件(ii)は満足されている。Zeheb の条件(iii)は, 条件2)(ii), 3)(ii)の場合: $\alpha = -\gamma$ であることから, $G_a(s)$ の最高位係数は $\beta_p + 1/\beta_h$ となり, どちらの場合も常に $\beta_p + 1/\beta_h > 0$ となるので満足されている。条件2)(iii)の場合: $\alpha < -\gamma$ であることから, $G_a(s)$ の最高位係数は β_p となり, この場合 $\beta_p > 0$ なので満足されている。条件4)(ii)の場合: $\alpha > -\gamma$ であることから, $G_a(s)$ の最高位係数は $1/\beta_h$ となり, この場合 $\beta_h > 0$ なので満足されている。

よって, 補題条件1)~4)のすべての場合で, $G_a(s)$ は, Zeheb の条件(ii), (iii)を満足している。

B.

$g(t, \bar{y}_p) \equiv 0$ として線形部について完全追従が達成された状態を(*)で表わすと,

$$\dot{x}_p^*(t) = A_p x_p^*(t) + b_p u_p^*(t) \quad (\text{B.1a})$$

$$y_p^*(t) = c_p^T x_p^*(t) + d_p u_p^*(t) \quad (\text{B.1b})$$

$$u_p^*(t) = S_{21}x_m(t) + S_{22}u_m(t) + S_{23}(t) \quad (\text{B.1c})$$

上式と実状態とのずれを $\Delta x_p(t) = x_p(t) - x_p^*(t)$, $e_y(t) = y_p(t) - y_m(t) = y_p(t) - y_p^*(t)$ とすると, (4.1), (4.5) および (B.1) 式から, 理想状態 $x_p^*(t)$ に対する誤差システム

$$\Delta \dot{x}_p(t) = A_{pc} \Delta x_p(t) + b_{pc} u_{pc}(t) + g(t, \bar{y}_p) \quad (\text{B.2a})$$

$$e_y(t) = c_{pc}^T \Delta x_p(t) + d_{pc} u_{pc}(t) \quad (\text{B.2b})$$

$$u_{pc}(t) = z^T(t) \zeta(t) - S_{23}(t) + u_R(t) \quad (\text{B.2c})$$

を得る. 仮定 2 (i) により (B.2) 式の線形部は, SPR であることから, Kalman-Yakubovich の補題より,

$$\begin{aligned} A_{pc}^T P + P A_{pc} &= -Q - U^T \\ b_{pc}^T P + w U^T &= c_{pc}^T \quad (\text{B.3}) \\ 2d_{pc} &= w^2 \end{aligned}$$

を満足する行列 $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, およびベクトル U , スカラー w が存在する. ここで, スカラー関数

$$\begin{aligned} V(t) &= \Delta x_p^T(t) P \Delta x_p(t) + \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \zeta_{\theta I}(t) \\ &\quad + \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \zeta_{\beta I}(t) \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

を考える. ただし,

$$\begin{aligned} \zeta_{\theta I}(t) &= \theta_I(t) - \theta^*, \quad \zeta_{\beta I}(t) = \beta_I(t) - \beta^* \\ \beta^* &= [\rho_0^* + S_{23}^*, \rho_0^*]^T, \quad \rho_0^* = |\alpha| \rho_0, \quad \rho_0^* = |\alpha| \rho_I \\ S_{23}^* &= \max_t |S_{23}(t)|, \quad \alpha = 1 - d_{pc} k^* \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

とおいている. (B.2) ~ (B.4) 式より

$$\begin{aligned} dV/dt &= -\Delta x_p^T(t) Q \Delta x_p(t) - (U^T \Delta x_p(t) \\ &\quad + w u_{pc}(t) + 1/2 w \hat{\theta}_1(t, \bar{y}_p))^2 \\ &\quad + 1/4 w^2 \hat{\theta}_1^2(t, \bar{y}_p) - w \hat{\theta}_1(t, \bar{y}_p) U^T \Delta x_p(t) \\ &\quad + 2u_{pc}(t) e_y(t) + 2\hat{\theta}_1(t, \bar{y}_p) e_y(t) \\ &\quad + 2\zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \dot{\zeta}_{\theta I}(t) + 2\zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \dot{\zeta}_{\beta I}(t) \\ \hat{\theta}_1(t, \bar{y}_p) &= \alpha \hat{\theta}(t, \bar{y}_p) \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

を得る. 上式の右辺の最後の項は, (4.7a), (4.7b) 式より, 次式で評価される.

$$\begin{aligned} &\zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \dot{\zeta}_{\theta I}(t) + \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \dot{\zeta}_{\beta I}(t) \\ &\leq -\sigma_{\theta}(t) \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \zeta_{\theta I}(t) - \sigma_{\theta}(t) \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \theta^* \\ &\quad - \zeta^T(t) z(t) e_y(t) - \sigma_{\beta}(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \zeta_{\beta I}(t) \\ &\quad - \sigma_{\beta}(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \beta^* + [\beta(t) - \beta^*]^T z_{\beta}(t) |e_y(t)| \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

となる. (B.7) と (4.4) および (B.5) 式の β^* の定義を (B.8) 式に適用すれば,

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -\Delta x_p^T(t) Q \Delta x_p(t) + 2u_R(t) e_y(t) \\ &\quad + 2\beta^{*T} z_{\beta}(t) |e_y(t)| \\ &\quad - 2\sigma_{\theta}(t) \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \zeta_{\theta I}(t) \\ &\quad - 2\sigma_{\theta}(t) \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1}(t) \theta^* \\ &\quad - 2\sigma_{\beta}(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \zeta_{\beta I}(t) \\ &\quad - 2\sigma_{\beta}(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1}(t) \beta^* \\ &\quad + 2[\beta(t) - \beta^*]^T z_{\beta}(t) |e_y(t)| + G(t) \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$G(t) = 1/4 w^2 \hat{\theta}_1^2(t, \bar{y}_p) - w \hat{\theta}_1(t, \bar{y}_p) U^T \Delta x_p(t) \quad (\text{B.9})$$

とおいている. (4.6) 式の $u_R(t)$ の構成より, 結局

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -\lambda_{\min}[Q] \|\Delta x_p(t)\|^2 \\ &\quad - 2\sigma_{\theta}(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\zeta_{\theta I}(t)\|^2 \\ &\quad - 2\sigma_{\beta}(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\zeta_{\beta I}(t)\|^2 \\ &\quad + 2\sigma_{\theta}(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\theta^*\| \|\zeta_{\theta I}(t)\| \\ &\quad + 2\sigma_{\beta}(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\beta^*\| \|\zeta_{\beta I}(t)\| \\ &\quad + 2\varepsilon + G(t) \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

が成立する. つぎに, $G(t)$ を評価する. $\bar{y}_p$ に対し,

$$\bar{y}_p = E x_p(t) = E \Delta x_p(t) + E x_p^*(t)$$

が成立するので

$$\|\bar{y}_p(t)\| \leq \|E\| \|\Delta x_p(t)\| + \|E x_p^*(t)\| \quad (\text{B.11})$$

である. よって, (4.4) および (B.9) (B.11) 式より

$$\begin{aligned} G(t) &\leq 1/4 w^2 \alpha^2 (\rho_0 + \rho_1 \|\bar{y}_p\|)^2 \\ &\quad + w |\alpha| (\rho_0 + \rho_1 \|\bar{y}_p\|) \|U\| \|\Delta x_p(t)\| \\ &\leq \rho_{G1} \|\Delta x_p(t)\|^2 + \rho_{G2} \|\Delta x_p(t)\| + \rho_{G3} \quad (\text{B.12a}) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \rho_{G1} &= 1/2 d_{pc} (\rho_0^* \rho_0^*)^2 + \sqrt{2d_{pc}} \|U\| \rho_0^* \rho_0^* \\ \rho_{G2} &= d_{pc} (\rho_0^* + \rho_0^* \rho_0^*) \rho_0^* + \sqrt{2d_{pc}} \|U\| (\rho_0^* + \rho_0^* \rho_0^*) \\ \rho_{G3} &= 1/2 d_{pc} (\rho_0^* + \rho_0^* \rho_0^*)^2 \\ \rho_0^* &= \max_t \|E x_p^*(t)\|, \quad \rho_0^* = \|E\| \quad (\text{B.12b}) \end{aligned}$$

となる. (B.10), (B.12) 式より

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -(\lambda_{\min}[Q] - \rho_{G1}) \|\Delta x_p(t)\|^2 + \rho_{G2} \|\Delta x_p(t)\| \\ &\quad - 2\sigma_{\theta}(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\zeta_{\theta I}(t)\|^2 \\ &\quad - 2\sigma_{\beta}(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\zeta_{\beta I}(t)\|^2 \\ &\quad + 2\sigma_{\theta}(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\theta^*\| \|\zeta_{\theta I}(t)\| \\ &\quad + 2\sigma_{\beta}(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\beta^*\| \|\zeta_{\beta I}(t)\| \\ &\quad + 2\varepsilon + \rho_{G3} \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

が成立する. 仮定 2 (iv) より,

$$\lambda_{\min}[Q] - \rho_{G1} > 0 \quad (\text{B.14})$$

が成立する. このことから, Corless-Leitmann の定理が適用でき^{11), 12)}, $\Delta x_p(t)$, $\zeta_{\theta I}(t)$, $\zeta_{\beta I}(t)$ は, 一樣終局有界 (UUB) となる.

つぎに, 制御系内の全信号が有界であることを示す. 最初に, $d_p = 0$ の場合を考える. (B.2), (4.8) 式より,

$$\begin{aligned} |e_y(t)| &\leq \|c_p^T \Delta x_p(t)\| \\ \|\theta(t)\| &\leq \|\theta_I(t)\| + \|\theta_p(t)\| \\ \|\theta_p(t)\| &\leq \|\Gamma_{\theta p}\| \|z(t)\| |e_y(t)| \\ \|\beta(t)\| &\leq \|\beta_I(t)\| + \|\beta_p(t)\| \\ \|\beta_p(t)\| &\leq \|\Gamma_{\beta p}\| \|z_{\beta}(t)\| |e_y(t)| \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

を得る. $e_y(t)$ は, 明らかに UUB だから, $z^T(t) = [e_y(t), x_m^T(t), u_m^T(t)]$ も UUB となる. これより, $\theta(t)$,

$\beta(t)$ は UUB となる。また、 $u_R(t)$ は $|\beta^T(t)z_\beta(t)e_y(t)| > \varepsilon$ のときだけを考えればよく、このとき、

$$|u_R(t)| \leq \|\beta(t)\| \|z_\beta(t)\| \quad (\text{B.16})$$

であるから、 $z_\beta^T(t) = [1, \bar{\theta}_p(t)]$ より、 $u_R(t)$ も UUB である。よって、

$$|u_p(t)| \leq \|\theta(t)\| \|z(t)\| + |u_R(t)| \quad (\text{B.17})$$

も UUB となる。以上より、全信号は、UUB である。

つぎに、 $d_p \neq 0$ の場合を考える。(4.7a)式から、

$$z^T(t)\zeta(t) = -z^T(t)\Gamma_{\theta p}z(t)e_y(t) + z^T(t)\zeta_{\theta I}(t) \quad (\text{B.18})$$

となる。この右辺を変形すると、

$$z^T(t)\zeta(t) = \lambda_{z0}e_y^2(t) + \lambda_{z1}(t)e_y^2(t) + \lambda_{z2}(t)e_y(t) + \lambda_{z3}(t) \quad (\text{B.19})$$

を得る。ただし、

$$\lambda_{zi}(t) = \lambda_{zi}(x_m(t), u_m(t), \theta_i(t)), \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{B.20})$$

であり、 $x_m(t)$, $u_m(t)$ は有界、 $\theta_i(t)$ が UUB となることから、 $\lambda_{zi}(t)$ は UUB となる。いま、 $|\beta^T(t)z_\beta(t)e_y(t)| > \varepsilon$ のときを考えると、

$$\begin{aligned} e_y(t) &= c_p^T \Delta x_p(t) + d_p u_{pc}(t) \\ &= c_p^T \Delta x_p(t) + d_p (z^T(t)\zeta(t) - S_{23}(t)) \\ &\quad - d_{pc}(\lambda_{R1}(t)e_y(t) + \lambda_{R2}(t)\text{sgn } e_y(t)) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

ただし、

$$\lambda_{R1}(t) = z_\beta^T(t)\Gamma_{\beta p}z_\beta(t), \quad \lambda_{R2}(t) = \beta^T(t)z_\beta(t)$$

であり、これらの UUB 性はすでに証明されている。

(B.21)式に(B.19)式を適用し、 $e_y(t)$ について整理すると、

$$\begin{aligned} &|1 - d_{pc}(\lambda_{z2}(t) - \lambda_{R1}(t) + \lambda_{z1}e_y(t)) \\ &\quad + \lambda_{z0}(t)e_y^2(t))| e_y(t)| \\ &\leq \|c_p\| \|\Delta x_p(t)\| + d_{pc}(|\lambda_{z3}(t)| \\ &\quad + S_{23}^* + |\lambda_{R2}(t)|) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

が成立する。この右辺は UUB である。このことは、 $e_y(t)$ が UUB となることを意味している。 $|\beta^T(t)z_\beta(t)e_y(t)| \leq \varepsilon$ の場合も同様の考察を行うことができ、やはり $e_y(t)$ は UUB となる。これより、系内全信号の UUB 性を $d_p = 0$ の場合と同様の手順で示すことができる。

C.

拡張系の性質(線形部が ASPR)から、証明は、付録Bに対応させ、(4.10)式をつぎの ASPR 条件を満足するプラントに書き換えて行う。

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + b_p u_p(t) + g(t, \bar{\theta}_p(t)) \quad (\text{C.1a})$$

$$y_p(t) = c_p^T x_p(t) + d_p u_p(t) \quad (\text{C.1b})$$

$$\bar{\theta}_p(t) = E x_p(t) \quad (\text{C.1c}) \quad (\text{注3})$$

ここに、 $g(t, \bar{\theta}_p(t))$ は、(4.11a)式より

$$g(t, \bar{\theta}_p(t)) = b_p \hat{\theta}(t, \bar{\theta}_p(t)) - \bar{b} \hat{\theta}(t, \bar{\theta}_p(t)) \quad (\text{C.2})$$

である。また、このとき、制御入力および適応同定則は、(4.5)~(4.8)式で構成される。

さて、そこで、誤差およびスカラー関数 $V(t)$ を付録Bと同様にとる。 $g(t, \bar{\theta}_p(t))$ の違いを考慮すると、 dV/dt は、(B.8)式に対応して、次式で評価される。

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -\Delta x_p^T(t) Q \Delta x_p(t) + 2u_R(t)e_y(t) \\ &\quad + 2\beta^{*T} z_\beta(t) |e_y(t)| \\ &\quad - 2\sigma_\theta(t) \zeta_{\theta I}^T(t) \Gamma_{\theta I}^{-1} \zeta_{\theta I}(t) \\ &\quad - 2\sigma_\beta(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1} \Theta^* \\ &\quad - 2\sigma_\beta(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1} \zeta_{\beta I}(t) \\ &\quad - 2\sigma_\beta(t) \zeta_{\beta I}^T(t) \Gamma_{\beta I}^{-1} \beta^* \\ &\quad - 2[\beta(t) - \beta^*]^T z_\beta(t) |e_y(t)| + G(t) \\ &\quad - 2\hat{\theta}(t, \bar{\theta}_p(t)) \bar{b}^T P \Delta x_p(t) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

(C.3)式の最後の項の評価をすると、(4.4)、(B.11)、および(B.12b)式より、

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}(t, \bar{\theta}_p(t)) \bar{b}^T P \Delta x_p(t) \\ &\leq \lambda_{\max}[P] \|\bar{b}\| (\rho_0 + \rho_1 \|\bar{\theta}_p(t)\|) \|\Delta x_p(t)\| \\ &\leq \rho_A \|\Delta x_p(t)\|^2 + \rho_B \|\Delta x_p(t)\| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \rho_A &= \lambda_{\max}[P] \|\bar{b}\| \rho_1 \rho_2^*, \\ \rho_B &= \lambda_{\max}[P] \|\bar{b}\| (\rho_0 + \rho_1 \rho_2^*) \end{aligned}$$

となる。よって、付録Bでの $u_R(t)$, $G(t)$ に対する評価および(C.4)式より、結局、

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -(\lambda_{\min}[Q] - 2\rho_A - \rho_{G1}) \|\Delta x_p(t)\|^2 \\ &\quad + (2\rho_B + \rho_{G2}) \|\Delta x_p(t)\| \\ &\quad - 2\sigma_\theta(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\zeta_{\theta I}(t)\|^2 \\ &\quad - 2\sigma_\beta(t) \lambda_{\min}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\zeta_{\beta I}(t)\|^2 \\ &\quad + 2\sigma_\theta(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\theta I}^{-1}] \|\Theta^*\| \|\zeta_{\theta I}(t)\| \\ &\quad + 2\sigma_\beta(t) \lambda_{\max}[\Gamma_{\beta I}^{-1}] \|\beta^*\| \|\zeta_{\beta I}(t)\| \\ &\quad + 2\varepsilon + \rho_{G3} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる。(4.13)式より

$$\lambda_{\min}[Q] - 2\rho_A - \rho_{G1} > 0 \quad (\text{C.6})$$

が成立する。よって、Corless-Leitmann の定理が適用でき^{(11),(12)}、 $\Delta x_p(t)$, $\zeta_{\theta I}(t)$, $\zeta_{\beta I}(t)$ は、一様終局有界となる。以下、付録Bと同様の手順で系内の全信号の有界性が示される。

(注3) (C.1c)式は、(4.10)式に対応させると、 $\bar{\theta}_p(t) = E \bar{x}_p(t)$ となる。しかし、 $\bar{x}_p^T(t) = [x_p^T(t), x_h^T(t)]$ であることから、これは、4.2節の $\bar{\theta}_p(t)$ の仮定に反していない。