指数減衰窓を併用した複素カルマンフィルタに基づく指数減衰スペクトル推定

西山 清*

Estimation of an Exponentially Decaying Spectrum Based on Complex Kalman Filter
in Combination with a Decaying Exponential Window

Kiyoshi NISHIYAMA*

A new combination of a decaying exponential window and the previous proposed decaying spectrum estimation based on complex Kalman filter is discussed. In computer simulation, it is demonstrated that such a combination provides the spectrum improving both resolution and signal-to-noise ratio.

Key Words: decaying exponential window, decaying spectrum, estimation, complex Kalman filter, NMR

1. はじめに

信号源が時間と共に指数関数的に減衰する信号を、離散フーリエ変換した場合、得られるスペクトルはこの減衰の影響のため信号源の分布とは異なる。よって、信号源の分布を得たい場合、離散フーリエ変換を用いることは問題となる。実際、NMR (Nuclear Magnetic Resonance) スペクトル推定において、このような問題に直面する¹⁾。このような問題を解決するため、複素カルマンフィルタに基づく指数減衰スペクトル推定法が提案されている²⁾。しかし、この方法は雑音に対する影響が考察されていなかった。一方、従来より NMR の分野において、白色雑音対策として指数減衰窓が、しばしば離散フーリエ変換と併用されていたが、SN 比が改善される反面、分解能およびスペクトル強度が低下するといった問題が生じていた¹⁾。これは、基本的に離散フーリエ変換がスペクトルの指数関数的な減衰を考慮できないことに起因する。

本報告では、指数減衰窓と指数減衰スペクトル推定法との新しい組合せによって、SN 比を改善するとともに、分解能およびスペクトル強度の改善も可能であることを、数値実験によって示す。また、有色雑音の影響に関しても考察する。ただし、この場合有色雑音とは、指数減衰スペクトル推定法において、あらかじめ考慮されなかった信号成分を意味する。

2. 信号モデルと問題設定

本報告では、つぎのような信号モデルを考える。

$$y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^k \exp(j\omega_i t_k) + v_k, \\ \alpha_i^k = a_i \exp(-t_k/T_i), \quad t_k = k\Delta T \quad (1a)$$

ただし、

$$E\{v_k\} = 0, \quad E\{v_k^* v_{k'}\} = \sigma_v^2 \delta_{kk'}, \\ \delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & k=k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases} \quad (1b)$$

ここで、指数減衰スペクトル推定とは、 $\{T_i\}$ 、 v_k を未知、 $\{\omega_i\}$ を既知として、 $y_0, y_1, \dots$ から $\{|\alpha_i|\}$ を求めることとする。

3. 複素カルマンフィルタに基づく指数減衰スペクトル推定法と指数減衰窓

(1)式を注意深く複素確率システムで表現し、これに複素カルマンフィルタを適用すれば、つぎのような複素カルマンフィルタに基づく指数減衰スペクトル推定法が得られる²⁾。

$$\hat{z}_k = F_k \hat{z}_{k+1} + L_k (y_k - H_k F_k \hat{z}_{k+1}) \quad (2a)$$

$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k+1} - L_k H_k \hat{P}_{k+1} \quad (2b)$$

$$\hat{P}_k = F_k \hat{P}_{k+1} F_k^* + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_o^2} A \quad (2c)$$

$$L_k = \hat{P}_k H_k^* (1 + H_k \hat{P}_k H_k^*)^{-1} \quad (2d)$$

ただし、

$$\hat{z}_k = [\alpha_0^k, \dots, \alpha_{n-1}^k, \alpha_0^{k+1}, \dots, \alpha_{n-1}^{k+1}]$$

$$F_k = \begin{bmatrix} F_k(1, 1) & F_k(1, 2) \\ F_k(2, 1) & F_k(2, 2) \end{bmatrix}$$

$$F_k(1, 1) = \text{diag}\{1 + \Delta \theta_0^k, \dots, 1 + \Delta \theta_{n-1}^k\}$$

$$F_k(1, 2) = \text{diag}\{-\Delta \theta_0^k, \dots, -\Delta \theta_{n-1}^k\}$$

$$F_k(2, 1) = I_{n \times n}, \quad F_k(2, 2) = O_{n \times n}$$

$$H_k = [\exp(j\omega_0 t_k), \dots, \exp(j\omega_{n-1} t_k), 0, \dots, 0]$$

$$A = \text{diag}\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, 0, \dots, 0\} \quad (2e)$$

詳細は文献2)を参照されたい。ここで、(2)式によって t_{2n-1} から t_0 へと $\hat{z}_k$ を逐次推定すれば、 $|\hat{z}_0|$ からスペクトル $\{|\alpha_i|\}$ が得られる。このとき、 $\hat{z}_k$ 、 $\hat{P}_k$

* 職業訓練大校 相模原市相原 1960

* The Institute of Vocational Training, Sagami-hara
(Received July 20, 1990)

(Revised November 13, 1990)

の初期値はつぎのように設定する。

$$\hat{\varepsilon}_{2n-1} = O_{2n}, \quad \hat{P}_{2n-1} = I_{2n \times 2n} \quad (2f)$$

ただし, O_{2n} , $I_{2n \times 2n}$ は $2n$ 次の零ベクトル, $2n \times 2n$ 単位行列を表わす。ここで, 有限個のデータでは初期値が推定値に影響を与えるが, 本方法では初期値 ($\hat{\varepsilon}_{2n-1}$, $\hat{P}_{2n-1}$) を (O_{2n} , $I_{2n \times 2n}$) に固定し, 推定値の収束性は σ_s^2/σ_v^2 の値で対応するように考えている。もし, 初期値を変えると, σ_s^2/σ_v^2 と ($\hat{\varepsilon}_{2n-1}$, $\hat{P}_{2n-1}$) は相互に影響し, 設計が複雑になる。また, 本方法の追従性が σ_s^2/σ_v^2 の値に敏感に影響されず, ある設定値において比較的広範囲の T_i に適応できることも, σ_s^2/σ_v^2 によって推定値の収束性に対応する理由である。

つぎに白色雑音対策として, 指数減衰窓との併用を考察する。まず, つぎのように (1) 式の信号 y_k に指数減衰窓 $\exp(-t_k/T_w)$ を掛け合せた場合を考える。

$$y_w(k) = \exp(-t_k/T_w) \cdot y_k \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(k) \exp(j\omega_i t_k) + v_w(k) \quad (3a)$$

ただし,

$$\alpha_i(k) = a_i \exp\{-t_k/T_w(i)\} \\ T_w(i) = (T_i T_w)/(T_i + T_w), \\ v_w(k) = \exp(-t_k/T_w) \cdot v_k \quad (3b)$$

ここで, (3) 式は (1) 式と同様に相変わらずスペクトルが指数減衰的であることに注意されたい。(2) 式の推定法では, (1) 式の $\{T_i\}$ が未知でよかったので, (3) 式において $\{T_i\}$ が $\{T_w(i)\}$ に代わっても基本的には問題はない。一方, 雑音 $v_w(k)$ は $\exp(-t_k/T_w) \cdot v_k$ のように, 時間と共に減少できる。よって, 信号モデルの形式 (指数減衰スペクトル) を維持したまま, 雑音の影響を軽減することができる。ここで, 信号に含まれる最も小さい T_i から, 使用できる最も効果的な指数減衰窓 (T_w) が決まるが, 一般にこの T_i は未知である。よって, 実際には T_w を $1.0T_s \Rightarrow 0.6T_s$ 程度まで徐々に減少し ($T_s = n\Delta T$), 推定したスペクトルが大幅に変化せず (理想的には, $T_w = 1.0T_s$ でも, $T_w = 0.6T_s$ でも本方法で推定したスペクトル $\{\alpha_i\}$ は変わらない), かつ雑音の軽減効果のある T_w の値を最適値とすることが適当と考えられる。

4. 数値実験

つぎのような (1) 式の信号モデル ($n=64$) を用いて数値実験を行う。

$$\alpha_{26} = 0.4 \times 10^3, \quad \alpha_{28} = 2.0 \times 10^3, \quad \alpha_{30} = 4.0 \times 10^3, \\ \alpha_{34} = 0.2 \times 10^3, \quad \alpha_{38} = 1.6 \times 10^3, \\ \text{その他 } 0 \quad (\text{Fig. 1 参照}) \\ T_{26} = 10.0T_s, \quad T_{28} = 0.6T_s, \quad T_{30} = T_s,$$

Fig. 1 Model spectrum

$$T_{34} = T_s, \quad T_{38} = 4.0T_s, \quad \text{その他 } \infty, \quad T_s = n\Delta T,$$

$$n=64, \quad \Delta T: \text{サンプリング間隔}$$

$$E\{v_k\} = 0, \quad E\{v_k^* v_{k'}\} = \sigma_v^2 \delta_{kk'}, \quad \sigma_v^2 = 2.0 \times 10^5$$

$$\omega_i = 2\pi(i - n/2)/T_s, \quad i=0, \dots, n-1 \quad (4)$$

この信号モデルの $y_0 \sim y_{63}$ を, 離散フーリエ変換して得たスペクトルを Fig. 2(a) に示す。これより, スペクトルの分解能および SN 比が低下していることがわかる。この SN 比の改善策として, 信号 $y_0 \sim y_{63}$ に指数減衰窓 ($T_w = 0.6T_s$) を掛け, これを離散フーリエ変換すれば, Fig. 2(b) のように SN 比がある程度改善される。しかし, この場合 SN 比は改善できるが, 分解能およびスペクトル強度は, Fig. 2(a) と比べて, さらに低下している。これは T_i から $T_w(i)$ となることから, スペクトルの減衰が増し, もともと減衰を考慮できない離散フーリエ変換では, その影響が顕著となるためである。たとえば, $T_{28} = 0.6T_s$ に対し, $T_w(28) = 0.3T_s$ となり減衰は 2 倍となる。一方, 指数減衰スペクトル推定法において, 信号 $y_0 \sim y_{127}$ に指数減衰窓を併用しない場合を Fig. 2(c) に, また併用した場合を Fig. 2(d) に示す。指数減衰窓を併用しない場合, スペクトルの分解能および強度は改善されるが, 白色雑音の影響は大きくなっている。しかし, 指数減衰窓を併用した場合, 白色雑音の影響が軽減され, かつスペクトルの分解能および強度は改善され, 推定の際考慮されなかった成分 a_{26} , a_{34} もある程度推定できており, モデルスペクトル (Fig. 1) に近い, 高分解能のスペクトルが得られている。このとき, 行列 A は事前に決定する必要があるが, Fig. 2(a) より 3 成分を含むことは明らかなので, 行列 A は $A = \text{diag}\{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, 0, \dots, 0\}$, $\lambda_{28} = \lambda_{30} = \lambda_{38} = 1.0$, その他 $\lambda_i = 0$ とし, $\sigma_s^2/\sigma_v^2 = 0.001$ とした。ここで, σ_s^2/σ_v^2 の最適値の決定方法として, 実際の観測信号に, 単数あるいは複数の既知の信号成分 (ω_i , a_i , T_i が既知) を重ね合せた新たな信号を, 本方法によって処理し, 既知の信号成分の推定精度から σ_s^2/σ_v^2 の最適値を

(a) Spectrum of the DFT without the window

(b) Spectrum of the DFT with the window

(c) Spectrum of the Kalman method without the window

(d) Spectrum of the Kalman method with the window

Fig. 2 Comparison of the DFT and the Kalman method in case of adding white noise

(a) Spectrum of the DFT without the window

(b) Spectrum of the Kalman method without the window

Fig. 3 Comparison of the DFT and the Kalman method in case of not adding white noise

近似的に決定する方法が考えられる。

一方、白色雑音がなく、事前に確認されなかった成分、すなわち有色雑音のみが存在する場合はどうか。このときの離散フーリエ変換と複素カルマンフィルタに基づく推定法の結果を **Fig. 3** に示す（指数減衰窓は使用していない）。ここで、行列 A と σ_1^2/σ_2^2 は **Fig. 2** と同じであるので、推定の際に a_{26} 、

a_{34} の成分は考慮されていない ($\lambda_{26} = \lambda_{34} = 0.0$) がある程度推定できている。これは、考慮されていない成分に対しても、この推定法はある程度追従できるためである²⁾。また、この場合指数減衰窓を併用しても大きな変化はなかった。

5. おわりに

先に報告した複素カルマンフィルタに基づく指数減衰スペクトル推定法と指数減衰窓との新しい組合せによって、SN 比、分解能およびスペクトル強度の改善を可能とした一歩進んだ指数減衰スペクトル推定を提案し、その有効性を数値実験を用いて示した。また、本方法を実際に適用する手順をまとめるとつぎのようになる。

① 本方法の行列 A を決定するために、事前に離散フーリエ変換などでスペクトルを求め、存在する大まかな信号成分から行列 A の各成分 a_i を決定する。もし、本方法で新たに大きな成分が発見されれば、必要に応じてそれを行列 A に加える。

② 既知の成分を観測信号に重ね合わせた信号を、本方法で処理し、その既知成分の推定精度から最適な σ_1^2/σ_2^2 を決定する。

③ 雑音が大きければ、指数減衰窓の T_w を $1.0T_s \Rightarrow 0.6T_s$ 程度まで徐々に減少し、本方法で推定したスペクトルが大幅に変化せず、かつ雑音の軽減効果のある T_w の値を最適値とし、このときの推定値を採用する。

以上より、本方法では最低限、大まかな信号成分の周波数が事前にわかっ

ていれば、ある程度適用可能であると考えられる。

参考文献

- 1) D.G. Gadian: Nuclear Magnetic Resonance and Its Applications to Living Systems, 7+156, Oxford University Press (1982)
- 2) 西山 清: 時間的に変化する周波数スペクトル推定の一方法, 電子情報通信学会論文誌, **J73-A-3**, 411/418 (1990)