低次元コントローラのモデルマッチング

大久保 元 晶*

Model-Matching for Reduced-Order Controller

Motoaki OHKUBO*

This note presents a model-matching problem of the controller with the reduced-order observer. We obtain the closed-loop transfer function matrix Φ which is a simple affine function of the parameter matrix Q .

Key Words: reduced-order observer, model-matching, H_∞ -control

1. はじめに

最近低次元オブザーバに関する研究が、いくつか発表された。すなわち2重既約分解に関するもの^{1),2)}, カルマンフィルタに関するもの³⁾, ディスクリプタシステムに関するもの^{4),5)}などがある。しかし H_∞ 制御理論^{6),7)}と低次元オブザーバ^{8),9)}を直接結びつけるような研究は見当たらないようである。

出力フィードバックによる安定化の方法では、状態フィードバックによる安定化と同一次元オブザーバを組合せたものが最もよく用いられている^{6),7)}。

本研究ではつぎの2条件を満足する低次元オブザーバを用いたコントローラのモデルマッチング問題について考察する。(i) $D_{21}=0$, (ii) $D_{22}=0$ 。

2. H_∞ 制御問題

H_∞ 制御では n 次元線形定数係数システムをつぎのように記述する。

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (1)$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \quad (2)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \quad (3)$$

ここに

x : 状態ベクトル, w : 外部入力,

u : 操作入力, z : 制御量,

y : 観測出力,

であり, $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ は定数行列である。なお時間変数 t は省略してある。

また本研究では(3)式において $D_{21}=0, D_{22}=0$ と

したつぎの式を用いる。

$$y = C_2 x \quad (4)$$

(4)式において $C_2=I$ とすれば、文献10)の仮定と一致する。

(1)~(3)式を伝達関数行列で表現すると、つぎのようになる^{6),7)}。

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

ただし

$$\begin{aligned} G_{ij}(s) &:= [A_\phi, B_j, C_i, D_{ij}] \\ &= C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j=1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

である。

なおラプラス変換の変数 s は以下必要がない限り省略する。また

$$G(s) := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

のような表現も用いる。

さらにコントローラは

$$u = -Ly \quad (8)$$

で表わされる。

3. 低次元オブザーバの構成

制御対象が安定化できるためには、つぎの条件が必要である。

(I): (A, B_2) は安定化可能で, (A, C_2) は検出可能である⁷⁾。

以下(I)の条件が満足されている場合について考察する。

出力フィードバックによる安定化の方法として、状態フィードバックによる安定化とオブザーバを組合せたものを用いる。

ところで通常は同一次元、すなわち n 次元のオブザーバで構成するが、本論文ではつぎのような p 次元 ($n > p$) のオブザーバを構成する。

$$\dot{\xi} = F\xi + H y + T B_2 u \quad (9)$$

$$u = -K\xi \quad (10)$$

* 群馬大学工学部 桐生市天神町 1-5-1

* Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu
(Received October 11, 1990)

$$\dot{x} = \theta \xi + \psi y \quad (11)$$

そこで K , H はそれぞれ $A - B_2 K$, F が安定であるように選ぶ。また $F: (p \times p)$, $H: (p \times m)$, $T: (p \times n)$, $\theta: (n \times p)$ 行列であり, つぎの条件を満足しているものとする。

$$TA - FT = HC_2 \quad (12)$$

$$\phi C_2 + \theta T = I \quad (13)$$

そこで同一次元オブザーバとの関係を考察してみる。

(11) ~ (13) 式において $p = n$, $\phi = 0$, $\theta = T = I$ とおくと, (9) 式はつぎのようになる。

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC_2)\hat{x} + Hy + B_2 u \quad (14)$$

(14) 式は同一次元オブザーバの式⁹⁾と一致する。

4. コントローラのモデルマッチング

$$e = x - \hat{x} \quad (15)$$

$$\sigma = y - C_2 \hat{x} \quad (16)$$

とし, さらに (10) 式において新しい制御入力 v を加えて

$$u = -K\hat{x} + v \quad (17)$$

とする。

(9), (11) および (17) 式からつぎの式が得られる。

$$\dot{\xi} = (F - TB_2 K \theta) \xi + (H - TB_2 K \phi) y + TB_2 v \quad (18)$$

これより

$$\xi = (SI - \hat{F})^{-1} \{ (H - TB_2 K \phi) y + TB_2 v \} \quad (19)$$

$$\hat{F} = F - TB_2 K \theta \quad (20)$$

が求まる。

(15), (17) ~ (20) 式からつぎの諸式が得られる。

$$u = J_{11} y + J_{12} v \quad (21)$$

$$\sigma = J_{21} y + J_{22} v \quad (22)$$

ここに

$$J(s) = \begin{bmatrix} J_{11}(s) & J_{12}(s) \\ J_{21}(s) & J_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F} & H - TB_2 K \phi & TB_2 \\ -K \theta & -K \phi & I \\ -C_2 \theta & I - C_2 \phi & O \end{bmatrix} \quad (23)$$

である。

(23) 式において $p = n$, $\phi = 0$, $\theta = T = I$ とおくと, 文献 11) の (2.6) 式で $D_{22} = 0$ とおいたものと一致する。

さて (1), (2), (4) 式および (15) ~ (17) 式から閉ループ系全体の状態空間表現はつぎのようになる。

$$\dot{x} = (A - B_2 K)x + B_2 K e + B_1 w + B_2 v \quad (24)$$

$$\sigma = C_2 e \quad (25)$$

$$z = (C_1 - D_{12} K)x + D_{12} K e + D_{11} w + D_{12} v \quad (26)$$

また (12), (13) 式および (15) 式から

$$e = \theta(Tx - \xi) \quad (27)$$

となる。

$$Tx - \xi = e \quad (28)$$

とおくと,

$$\dot{e} = F e + TB_1 w \quad (29)$$

となり, これより

$$e = (sI - F)^{-1} TB_1 w \quad (30)$$

を得る。したがって

$$e = \theta(sI - F)^{-1} TB_1 w \quad (31)$$

が求まる。また (24) 式から,

$$x = (sI - A + B_2 K)^{-1} (B_2 K e + B_1 w + B_2 v) \quad (32)$$

が得られる。

(31), (32) 式を (25), (26) 式に代入すると, つぎのような結果が求まる。

$$z = T_{11} w + T_{12} v \quad (33)$$

$$\sigma = T_{21} w, \quad T_{22} = 0 \quad (34)$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$T_{11}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A - B_2 K & B_2 K \theta & B_1 \\ 0 & F & TB_1 \\ \hline C_1 - D_{12} K & D_{12} K \theta & D_{11} \end{array} \right] \quad (36)$$

$$T_{12}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - B_2 K & B_2 \\ \hline C_1 - D_{12} K & D_{12} \end{array} \right] \quad (37)$$

$$T_{21}(s) = \left[\begin{array}{c|c} F & TB_1 \\ \hline C_2 \theta & 0 \end{array} \right] \quad (38)$$

ところで

$$v = -Q \sigma \quad (39)$$

とおけば, (33), (34) 式から

$$z = (T_{11} - T_{12} Q T_{21}) w \quad (40)$$

が得られる。これは閉ループ系の w から z までの伝達関数 Φ が

$$\Phi = T_{11} - T_{12} Q T_{21} \quad (41)$$

で与えられることを示している。(41) 式は自由パラメータ Q が線形で含まれ, 同一次元オブザーバとまったく同形となっている。

なお $p = n$, $\phi = 0$, $\theta = T = I$ とおけば, (35) ~ (38) 式および (40) 式は文献 11) の (2.7), (2.8) 式で $D_{21} = 0$ とおいたものと一致する。

以上により本研究における低次元オブザーバにおけるモデルマッチング問題は同一次元オブザーバの場合とまったく同様に扱えることがわかった。

5. おわりに

低次元オブザーバを用いたコントローラを構成し, H_∞ 制御問題におけるモデルマッチングを $D_{21} = 0$,

$D_{22}=0$ なる仮定のもとで考察した。この結果閉ループ系の伝達関数 ϕ は自由パラメータ Q が線形で含まれ、同一次元オブザーバの場合とまったく同じ形になることがわかった。したがってモデルマッチング問題は同一次元オブザーバの場合と同様に取り扱うことができる。

なお2重既約分解など、重要な問題がいくつかあるが、これらについては別の機会に報告したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) P. Hippe: Modified Doubly Coprime Fractional Representation Related to the Reduced-Order Observer, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-34-5**, 573/576 (1989)
- 2) B.D.O. Anderson and Y. Liu: Control Reduction: Concepts and Approaches, IEEE Trans., **AC-34-8**, 802/812 (1989)
- 3) B. Friedland: On the Properties of Reduced-Order Kalman Filters, IEEE Trans., **AC-34-3**, 321/324 (1989)
- 4) M. T. F. Saidahamed: A New Approach for Designing a Reduced-Order Controller of Linear Singular Systems, IEEE Trans., **AC-35-4**, 492/495 (1990)
- 5) 川路茂保: ディスクリプタシステムに対する Luenberger 型オブザーバ, 計測自動制御学会論文集, **24-11**, 1118/1123 (1988)
- 6) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag (1987)
- 7) 木村英紀: LQG から H^∞ へ, 計測と制御, **29-2**, 111/119 (1990)
- 8) 保田 豊: システム制御理論, 昭晃堂 (1989)
- 9) 増淵正美: システム制御, コロナ社 (1989)
- 10) K. Zhou and P. P. Khargonekar: An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, Systems and Control Letters, **11-2**, 85/91 (1988)
- 11) B. C. Chang and A. Yousuff: Pole Placement and Observer-Based Controller Parametrization, IEEE Trans., **AC-35-6**, 726/729 (1990)