ファジィルール制御系の安定条件†

——円板条件の拡張——

北 村 新 三*

A Stability Condition for Fuzzy Ruled Control Systems

——An Extension of the Circle Criterion——

Shinzo KITAMURA*

For fuzzy-rule based feedback control systems, a stability condition in the form of an extension of the circle criterion was presented. Nonlinear characteristic of a fuzzy controller with two inputs and one output variables may be restricted in an extended form of the sector condition. This leads to an absolute stability condition (or input-output stability condition) in the frequency domain with a multiplier depending on the form of transfer functions before the fuzzy controller. The condition covers stability problems for many classes of practical fuzzy control systems. Two numerical examples are given.

Key Words: fuzzy control systems, extended sector condition, absolute stability, input-output stability, extension of the circle criterion

1. ま え が き

近年、ファジィルールを用いた制御技術が開発され実用例も多く報告されつつある。これは、言語表現的な記述をコントローラに利用しているため、制御理論的扱いがむずかしい。とくに制御系の設計において、その安定性は一番に問題となるところである。ファジィ制御系の安定性については、記述関数^{1),2)}、記号解析³⁾、リアプノフ関数³⁾、エネルギー量の定義⁴⁾、位相面解析⁵⁾、線形化法の適用^{6),7)}、円板定理の適用⁸⁾などの報告がある。しかし、これらの結果は記述関数を除いては制御系の安定解析としては特定化した場合を扱っている感が強い。また、文献2)においては、ファジィコントローラが、多レベルのリレーに置きかえられ

ることが述べられているが、これは、ファジィ推論より操作量を決定する演算（デファジィ化演算）に最大値を取る方式を採用した場合のことである。文献8)は、この置き換えにより周波数領域での円板定理の利用を提案しているが、これは1入力1出力のコントローラに対応したものであり、実際応用には不十分であるとともに、リレーのような不連続非線形関数を含む場合の安定性が厳密に検討されていない。

本論文では、2変数入力のファジィコントローラを対象とし、多くの場合その入出力の非線形特性が拡張したセクタ条件で取り扱えることを示す⁹⁾。つぎに、フィードバック系の安定条件として、1入力非線形関数を含む系に対し知られている円板条件が、変形した形で適用できることを示す。この結果は系の絶対安定性（あるいは入出力安定性）の十分条件を非線形関数の形を制限するセクタ定数と、線形伝達関数実部との関係で与えるものである。終りに、二つの代表的な例についての安定解析結果を示す。

2. 2変数入力ファジィコントローラの非線形セクタ特性

2.1 拡張したセクタ条件

まず、1変数非線形関数に関し知られているセクタ条件^{10),11)}を、2変数入力のファジィコントローラの非線形特性を把握するために拡張する⁹⁾。多くのファジィルール制御ではコントローラ部分に2変数入力、1変数出力のルールテーブルが用いられている。このテーブルを用いてコントローラ出力を決定するが、ここではMamdaniの推論方法¹²⁾を用いることにする。他の推論法の場合も同様に考えられる。

以下、最も基本的な場合のコントローラの動作として観測量 x_1 , x_2 より操作量 y の決定法を述べる。

制御ルール: R^i : if x_1 is A_{i1} and x_2 is

† 第5回ファジィシステムシンポジウムで発表(1989・6)

* 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received March 7, 1990)

(Revised December 27, 1990)

$$A_{i2} \text{ then } y \text{ is } B_i \quad (1)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

に対し、メンバーシップ関数 $A_{i1}(x)$, $A_{i2}(x)$, $B_i(y)$ が与えられるとし、 x_1 と x_2 の確定値 (測定データ) を x_1^0 と x_2^0 とするときつぎの過程により確定出力 y_0 を決定する。

$$w_i = A_{i1}(x_1^0) \wedge A_{i2}(x_2^0), \quad (2)$$

$$B^0(y) = \bigvee_i [w_i \wedge B_i(y)], \quad (3)$$

ただし、 $\wedge$ は最小演算を、 $\vee$ は最大演算を示す記号である。このとき、重心公式により

$$y_0 = \frac{\int B^0(y) y dy}{\int B^0(y) dy} \quad (4)$$

を操作量とする。

これらの関係式よりコントローラ入力 x_1^0 , x_2^0 と出力 y_0 は非線形関係にあるので、これを

$$y = f(x_1, x_2) \quad (5)$$

と表わす。しかし、この関係は確定的であり、3次元空間に図示できる。そしてこのような非線形特性は多くの場合、Fig. 1 に示すような3次元空間での原点を通る平面よりなるセクタ内に入るようにできる。

たとえば、Table 1¹⁾ と Table 2¹²⁾ にルールテーブルの例を示す。Table 1 で、 $e = x_1$, $\dot{e} = x_2$ とした場合の非線形特性を Fig. 2, Table 2 の場合を Fig. 3 に示す (ただし、Table 2 の空白部はクリップの零値をとるとし、また、Fig. 3 は e , $\dot{e}$ 軸の刻み幅を 0.5 間隔で量子化した場合である。4章の例題2参照)。ただし、各ファジィラベルのメンバーシップ関数は $[-6, 6]$ 上で区間4を底とし、高さ1の三角形のものをを用いている。Fig. 2 あるいは Fig. 3 の非線形関数に対し、Fig. 1 に示すようなセクタとして上下より含むような平面を取ることができる。

さて、一般に3次元空間での平面の方程式は次式で表わされる。

$$y = g_1 x_1 + g_2 x_2 \quad (6)$$

Fig. 1 A sector by two planes in 3-dimensional space

Table 1 Rule table from Braae and Rutherford¹⁾ (each label means: P: positive, N: negative, B: big, M: medium, S: small or ZO: zero)

e	$\dot{e}$						
	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NB	NM	NS	ZO
NM	NB	NB	NB	NM	NS	ZO	PS
NS	NB	NB	NM	NS	ZO	PS	PM
ZO	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
PS	NM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB
PM	NS	ZO	PS	PM	PB	PB	PB
PB	ZO	PS	PM	PB	PB	PB	PB

Table 2 Rule table from Sugeno¹²⁾

e	$\dot{e}$						
	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
NB				NB			
NM				NM			
NB				NS			
ZO	NB	NM	NS	ZO	PS	PM	PB
PS				PS			
PM				PM			
PB				PB

Fig. 2 Nonlinear characteristic $f(g_1e, g_2e)$ for the case of Table 1, where $g_1 = 30/\sqrt{901}$, $g_2 = 1/\sqrt{901}$, $(e, \dot{e}) \in [-6, 6] \times [-6, 6]$ and $y \in [-5.37, 5.37]$

ただし、 g_1 , g_2 は定数である。そして、非線形関数 $N(x_1, x_2)$ が Fig. 1 のように、 (x_1, x_2) 面での交線 $g_1 x_1 + g_2 x_2 = 0$ を共通とする二つの平面のセクタ内に存在する条件は、

$$k_1 \sigma^2 \leq N(x_1, x_2) \sigma \leq k_2 \sigma^2 \quad (7)$$

と表現できる。ここに、

$$\sigma = g_1 x_1 + g_2 x_2 \quad (8)$$

である。(7)式を拡張したセクタ条件と呼ぶことにする。

Fig. 3 Nonlinear characteristic $f(q_1, q_2, d)$ for the case of Table 2, where $q_1 = q_2 = 1/\sqrt{2}$, $(e, d) \in [-6, 6] \times [-6, 6]$ and $v \in [-4.02, 4.02]$

Fig. 4 A fuzzy control system

ここで上に仮定したセクタ条件の意味について考えてみる。まず、(2)~(4)式の演算を行う際に、これが(5)式のように一種の非線形ゲインで表現できることはすでに示されている¹³⁾。さらに、制御系においては操作量は定常動作点のまわりで対象に取られる場合が多い。ゆえに、(5)式の非線形関数は2変数関数として正負の値を取ることで、必然的に (x_1, x_2) 面と交わることになる。さらに、Fig. 4 のシステムの偏差についての漸近安定性 (オフセットが生じない) を保証するためには、非線形関数と (x_1, x_2) 面の交線は原点を通過することが必要である。これらの条件より、最も簡単なルールテーブルの設定は、Table 1 あるいは Table 2 のように逆対角軸に対しラベルを正負対称とすることになり、結局、これより得られる非線形特性は(7)式のセクタ条件を満足する。実際、文献 1), 13), 14) に示されている例では、多くがこの条件を満足しており、ここでの仮定は工学的に妥当性をもつ。

上の(7)式の関係ファジィコントローラの場合の(5)式に適用する。このとき定数 q_1, q_2, k_1, k_2 はファジィコントローラの特長で定まるものである。以下、これについて説明する。

2.2 非線形特性からセクタ定数の決定

一般にコントローラが2変数入力の際のファジィ制御系は Fig. 4 のような構成をとる。 A_1 と A_2 は与えられた定数で、コントローラ入力が PD 形なら $G_2(s) = s$, PI 形なら $G_2(s) = 1/s$, さらに $G(s)$ は制御

Fig. 5 Equivalent system with separated gain A

対象の伝達関数とし、速度形コントローラの場合は $1/s$ を付加するとする。

このとき、以下の解析の便宜のために(7), (8)式の q_1, q_2, k_1, k_2 をつぎのように単位傾き (勾配=1) の平面を基準として定めることにする。まず、Fig. 1 で原点を通り (x_1, x_2) 面に対し勾配1 (45°の傾き) をもった規格化した平面を(8)式で表わすとする。ここで、Fig. 4 で A_1 と A_2 は与えられるので

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{q_2}{q_1} \quad (9)$$

の関係と、平面の勾配が1となる条件

$$q_1^2 + q_2^2 = 1 \quad (10)$$

の2式より、 q_1 と q_2 が定まる。

つぎに

$$\frac{q_1}{A_1} = \frac{q_2}{A_2} = \frac{1}{A} \quad (11)$$

なる定数ゲイン A が定まるから、これを Fig. 5 のように制御対象側へ組み入れ、 e_1 を新しく偏差とみることにする。

このとき、 $f(x_1, x_2)$ はファジィコントローラの特長として与えられているから、上に定めた q_1, q_2 を用いて

$$k_1 = \inf_{x_1, x_2} \frac{f(q_1 x_1, q_2 x_2)}{q_1 x_1 + q_2 x_2} \quad (12)$$

$$k_2 = \sup_{x_1, x_2} \frac{f(q_1 x_1, q_2 x_2)}{q_1 x_1 + q_2 x_2} \quad (13)$$

ととれば、

$$N(x_1, x_2) = f(q_1 x_1, q_2 x_2) \quad (14)$$

として(7)式の不等式が成立する。

3. 安定条件

3.1 マルチプライアの導入

Fig. 5 の系を対象とする。まず上で定めた q_1 と q_2 を用いた(8)式の σ と偏差 e_1 の間につぎのマルチプライア $G_m(s)$ を導入して Fig. 5 を Fig. 6 のように変換する。ただし

$$G_m(s) = \frac{1}{q_1 + q_2 G_2(s)} \quad (15)$$

である。このとき、

$$\sigma = (q_1 + q_2 G_2(p)) e_1, \quad p = d/dt \quad (16)$$

Fig. 6 Transformed system with multiplier $G_m(s)$

であるから

$$x_1 = e_1, \quad x_2 = G_2(p)e_1 \quad (17)$$

となり、Fig. 6 で σ から (14) 式の f への写像について、上で述べたように拡張したセクタ条件として (7), (8) 式が成立する。

3.2 円板形安定条件

(7) 式の形のセクタ条件を満足する場合の Fig. 6 の系の安定性としては、 $r=0$ の場合の絶対安定性、 $r \neq 0$ の場合の有界入力有界出力安定（入出力安定）が考えられる。そしてそのための十分条件として円板条件を適用できる。ただし、(5) 式の実線形関数は連続とする（連続でない場合、すべり動作などが生じる可能性があり、他の考察を必要とする）。以下、絶対安定性について述べることにする。

【定義】 Fig. 6 の系 ($r(t) \equiv 0$) で (7) 式のセクタ条件を満足する任意の実線形関数に対し、この系の状態変数表現（付録 (A.1) 式参照）の零解が大域漸近安定するとき、システムは絶対安定という。

【円板形条件】 Fig. 6 の系 ($r(t) \equiv 0$) で、(14) 式の実線形関数は (7) 式のセクタ条件を満足とする。また、 $G(s)G_m^{-1}(s)$ は厳密にプロパーで、安定（極の実部が負）な伝達関数とし、さらに $g_1 \cdot g_2$ は非負とする。このとき、 $AG(s)G_m^{-1}(s)$ のナイキスト軌跡が円板条件を満足するとき、システムは絶対安定である。

（証明） 付録参照。

（注意 1） 円板条件は、つぎの形に表現できる。

$$\operatorname{Re} \frac{AG(j\omega)G_m^{-1}(j\omega)}{1 + k_1 AG(j\omega)G_m^{-1}(j\omega)} + \frac{1}{k_2 - k_1} \geq \delta > 0 \quad (18)$$

ここに、 δ は任意の正数である。この条件の幾何学的解釈は k_1, k_2 の符号により異なるので詳細は文献 (10), (11) 参照。また、 $G(s)G_m^{-1}(s)$ が有理関数のときには $\delta = 0$ ととてよい。

（注意 2） $G(s)G_m^{-1}(s)$ が虚軸上の極を含む場合、たとえば速度形コントローラの例がこれにあたる。この場合に、(7) 式のセクタ条件だと、たとえば $N(x_1, x_2) \equiv 0$ も許されることになるが、このとき当然、システムの絶対安定性は成立しない（たとえば、偏差にオフセットが生じる）。これについては平衡点（不変集合）の存在から論じる必要があるので、ここではつ

ぎの点のみ補足する。非線形関数が原点以外で零値を取らない条件として

$$0 < k_1 \leq N(x_1, x_2)/\sigma \leq k_2 \quad (19)$$

に制限するとき、システムが絶対安定となるためには、上の円板形条件に加えて、極限安定条件（非線形関数を線形ゲインで置きかえたとき、微小ゲインに対する安定性）を付加すればよい^{(10), (15)}。

（注意 3） $G(s)G_m^{-1}(s)$ が分母分子同次数の場合、これは厳密にプロパーな伝達関数と定数に分解できるので、この定数分を Fig. 6（証明で用いる Fig. 7）の非線形部へ組み込み、新しい非線形関数に対してセクタ定数を定めれば、厳密にプロパーな伝達関数について、円板形安定条件を得ることができる。

（注意 4） Popov 形の安定条件の可能性

円板条件は 2 変数の非線形特性 $f(x_1, x_2)$ を前提としているため、これより得られる安定限界はどうしても保守的な結果となる。そこで、Popov 形の安定条件の成立が望まれるが、これはここでの証明では成立しない。もし、非線形特性が

$$f(q_1 x_1, q_2 x_2) = f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = f(\sigma) \quad (20)$$

と書けるなら、Popov の安定条件を証明できる。この条件を満足するような 2 変数関数の形についての一般論はよくわからないが、Fig. 1（あるいは Fig. 2）で、 (x_1, x_2) 面での直線 $q_1 x_1 + q_2 x_2 = 0$ に視線を合せて非線形特性 $f(q_1 x_1, q_2 x_2)$ をみると、この非線形特性が 1 枚に見える（重なって見えない、すなわち、1 価関数）ことに対応する。明らかに、Fig. 3 の非線形特性はその条件を満足していない。実際に (20) 式が成立する例は少ないのではないと思われる。

4. 例題

(1) 例題 1

文献 (1) 中の例題 3 を Fig. 4 に対応させ、 $A_1 = 6$, $A_2 = 0.2$,

$$G(s) = \frac{400}{(s^2 + 20s + 400)} \cdot \frac{1}{s} \quad (21)$$

とする。ルールテーブルは Table 1、非線形特性は Fig. 2 である。これは、区間線形に似た特性をもち、また、全体的にも線形に近い形をとっているのであるがもちろん、安定論からは、線形系とは見ることはできない。以下、ループゲイン A についての安定限界を求めよう。2.2 節の記述により、この系を Fig. 5 の形に変換する。このとき 2.2 節の方法により各定数を定めると

$$g_1 = 30/\sqrt{901}, \quad g_2 = 1/\sqrt{901},$$

となる。つぎに、Fig. 2 の非線形特性は、 $|e| > 6$ 、 $|\dot{e}| > 6$ (図示の領域外) では 2 象限および 4 象限では同じ形を延長し、また、1 象限、3 象限では飽和特性をもつものとする、(7)、(14)式のセクタ条件について $k_1 = 0$ であり、さらに(13)式を数値的に調べると $k_2 = 1.45$ である。また、 $G(s)G_m^{-1}(s)$ のナイキスト軌跡より、 $\min_{\omega} [\operatorname{Re} G(j\omega)G_m^{-1}(j\omega)] = -0.0516$ である。ゆえに円板形条件の(18)式から得られる許容ゲインは $A < 13.4$ となる。なお、ナイキスト軌跡の形より、原点に 1 重極のある場合の極限安定条件は成立する。

他方、コントローラが、線形 PD 形 ($g_1 + g_2 s$, この場合、結果的には、系は線形 PI コントローラ + 2 次標準形の構成となる) としたときの Hurwitz セクタは $A < 60.6$ である。ゆえに、非線形特性をセクタ条件でおさえたときの円板条件による許容ゲインは、線形系の約 1/4 である。なお、これは、非線形特性が $|e|$ 、 $|\dot{e}|$ の大きい領域で飽和するとして、 $k_1 = 0$ とした場合であり、もし、飽和しないと考える場合には $k_1 > 0$ となり、(18)式より明らかなように、 A についての許容ゲインは、もっと大きくなる。また、文献 1) では、 $A = 72$ でリミットサイクルが報告されているが、これは線形化系が不安定なパラメータ領域であるので、安定論からは当然の結果である。実際に、上で解析した系をデジタルシミュレーションしてみると、 A が 25 程度より大きくなると、ステップ入力に対しリミットサイクルが現れるのが確認された。ゆえに、この系では上の意味で線形化した安定論は成立しないことになる。

(2) 例題 2

Fig. 4 において、ファジィコントローラが Fig. 3 の特性をもつとする。ただし、非線形特性は $|e| > 6$ あるいは $|\dot{e}| > 6$ の領域では、 $|e| = 6$ 、 $|\dot{e}| = 6$ の値を保持するものとする。制御対象の伝達関数が速度形コントローラと 1 次おくれ + むだ時間系

$$G(s) = \frac{Ae^{-Ls}}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \quad (22)$$

の場合について調べる。まず、2.2 節の記述により Fig. 3 の e 、 $\dot{e}$ 軸を 0.5 刻み幅で量子化した非線形特性を用いるとして、この特性よりセクタ条件の各定数を定めると

$$g_1 = g_2 = 1/\sqrt{2}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 7.48$$

である。ただし、Fig. 3 より明らかなようにこの非線形特性は原点以外で零値をとる領域が存在し、他方、 $G(s)G_m^{-1}(s)$ は $1/s$ を含むので、注意 2 に述べたように、システムの絶対安定性は保証されない。極端な

場合、非線形特性が零値を取る領域で状態が停止する可能性がある。これを避けるには、(19)式の条件が満足されるように、非線形関数の原点を除いて零値を取る部分を少しもち上げる必要がある。そのための最も簡単な方法は Fig. 5 のコントローラ出力 f に、線形項

$$f_1 = \varepsilon(g_1 e_1 + g_2 G_2(p)e_1), \quad \varepsilon > 0 \quad (23)$$

を付加することである。以下、 ε は微小として、このような付加項が存在する場合の絶対安定性を考えることにする。

ここで、 $T=2$ 、 $L=1$ としよう。この場合、

$$\min_{\omega} [\operatorname{Re} G(j\omega)G_m^{-1}(j\omega)] = -2$$

である。ゆえに、(18)式より $A < 0.067$ の絶対安定条件を得る。また、この場合にも極限安定条件は成立する。なお、コントローラが線形 PD 形の場合の Hurwitz セクタは $A < 3.07$ である。

上で得た円板形条件による A についての許容ゲインは、線形化系のそれと比較して非常に厳しい。これは、Fig. 3 の非線形特性の一部に非常に急な勾配をもつ領域が存在し、この結果 k_2 が大きくなる原因による。実は Fig. 3 の e 、 $\dot{e}$ 軸の刻み幅を零に近づけると、非線形特性に不連続部分が現れ、ここでの安定論は適用できない。また、(2)、(3)式の推論をそれぞれ積和に改めると $k_2 = 6.0$ (許容ゲイン $A < 0.083$) となる。さらに Table 2 の空白部を、ファジィラベルの ZO と解釈すると、非線形特性はずっと滑らかとなって⁹⁾、 $k_2 = 1.22$ (許容ゲイン $A < 0.58$) となる。デジタルシミュレーションで安定性を調べてみると、Fig. 2 の特性の場合、 A が 2.8 程度より大きくなると、ステップ入力に対しリミットサイクルが現れる。ゆえに、この系も線形化系の安定論は適用できないが、円板形条件による結果は非常に保守的となることがわかった。

5. あとがき

ここでは、2 変数入力、1 変数出力のファジィコントローラの非線形特性が、多くの場合、3 次元空間で、平面によるセクタ内に拘束され、新しくマルチプライアを導入することにより円板条件が拡張した形でシステムの絶対安定条件として適用できることを示した。ここで対象とした系の構成はファジィ制御系としては比較的一般性をもつものである。ただし、円板形安定条件であるため、得られる結果は厳しいものとなっていることに注意を要する。しかし、数値例で示したように、一般には非線形系の安定性は線形化系によっては論じられない。ゆえに、ここで示したように

十分条件としての非線形系の安定論も重要であり、今後、それをどの程度、改良できるかが課題である。

終りに本稿をまとめるに当たり、討論いただいた神戸大学工学部、池田雅夫教授に謝意を表する。

参考文献

- 1) M. Braae and D. A. Rutherford: Theoretical and Linguistic Aspects of the Fuzzy Logic Controller, *Automatica*, **15**, 553/577 (1979)
- 2) W. J. M. Kickert and E. H. Mamdani: Analysis of a Fuzzy Logic Controller, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 29/44 (1978)
- 3) S. Daley and K. F. Gill: The Fuzzy Logic Controller: An Alternative Design Scheme?, *Computers in Industry*, **6**, 3/14 (1985)
- 4) J. B. Kiszka, M. M. Gupta and P. N. Nikiforuk: Energetic Stability of Fuzzy Dynamic Systems, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-15-6**, 783/792 (1985)
- 5) 寺野, 増井, 森: ファジィ制御の安定問題, 第4回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 103/108 (1988)
- 6) 川瀬, 柳原: ファジィ制御の安定性について, 第11回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 101/104 (1988)
- 7) J. Aracil, A. Ollero and A. Garcia-Cerezo: Stability Indices for the Global Analysis of Expert Control Systems, *IEEE Trans.*, **SMC-19-5**, 998/1007 (1989)
- 8) K. S. Ray, A. M. Ghosh and D. D. Majumder: L_2 -Stability and the Related Design Concept for SISO Linear System Associated with Fuzzy Logic Controller, *IEEE Trans.*, **SMC-14-6**, 932/939 (1984)
- 9) 北村新三: ファジィルール制御系の安定解析のための円板形条件, システム制御情報学会研究発表講演会論文集, 495/496 (1989)
- 10) 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック基礎編, 6.3.4節, オーム社 (1983)
- 11) 平井, 池田: 非線形制御システムの解析, 5.4節および6.3節, オーム社 (1986)
- 12) 菅野道夫: ファジィ制御, 日刊工業新聞社 (1988)
- 13) 荒木, 張: ファジィ制御装置の数理モデルと倒立振子の制御, システム制御情報学会シグナル, システム, コントロール研究分科会資料 (1989)
- 14) 水本雅晴: わかりやすいファジィ理論Ⅲ, コンピュータロール **28**, 32/45 (1989)
- 15) M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher: Absolute Stability of Regulator Systems, Holden-Day (1964)
- 16) C. A. Desoer: A Generalization of the Popov Criterion, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-10-2**, 182/185 (1965)

《付録 安定条件の証明の概略》

まず, $g_1 \cdot g_2$ が非負の条件は(16)式が安定となるために必要である。つぎに, Fig. 6 ($r \equiv 0$) はつぎの Fig. 7 の形と同じである。 $G(s)G_m^{-1}(s)$ は有理関数とし, 仮定により厳密にプロパーとしてよいから, Fig. 7 の右側の線形部はつぎの状態変数表現が可能である。

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + g\tilde{f} \\ \sigma &= -cz\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

ただし, z は状態ベクトル, F , g , c は適当な次数の定数行列, $\tilde{f}$ は $\tilde{f} = f(q_1x_1, q_2x_2) - k_1\sigma$ で定義され(7)式のセクタ条件で k_1 を 0, k_2 を $k_2 - k_1$ で置き換えた条件を満足する非線形関数である。ゆえに, よく知られているように^{10), 11)}, 2次形式のリアプノフ関数

$$V = z^T P z \quad (\text{A.2})$$

を採用し, V が正定かつその時間微分が負定となる条件を Kalman-Yakubovich-Meyer の補助定理を用いて, 周波数領域で表現すれば, $AG(s)G_m^{-1}(s)$ のナイキスト軌跡についての円板条件を得る。つぎに $G(s)G_m^{-1}(s)$ が有理関数でない場合にはシステムの関係を重ね合せ積分で表現し, $G(s)G_m^{-1}(s)$ の逆変換より定まるインパルス応答についての適当な安定性と連続性の仮定より^{10), 11), 15)}, 本文の安定条件を導くことができる。

Fig. 7 Equivalent system to that in Fig. 6