離散・線形システムにおける l^p -ロバスト安定性の判定法

上 家 和 幸*・古 田 勝 久*

A Criterion for l^p -Robust Stability of Discrete Linear Time-Invariant Systems

Kazuyuki JOYA* and Katsuhisa FURUTA*

A necessary and sufficient condition for all members of a family of polynomials to be Schur stable is given in the case that the variation of the coefficients of polynomials is constrained with l^p -norm.

With a computer, the condition becomes to be feasible. Two examples are given to show that.

Key Words: stability, polynomial, Schur stable polynomial, l^p -norm

1. はじめに

Kharitonov¹⁾の定理が世に知られて以来、不確定性を含む特性多項式の安定性を判別する方法が数多く報告²⁾されているが、これらの結果は、本質的には、二つのタイプに分類できると考えられる。

一つは、ある多項式の族を構成するすべての多項式の安定性を、実用上十分少ない数の代表多項式の安定性に帰着させるものであり、Kharitonovの定理や Bartlett³⁾による有名なエッジ定理および Chapellat⁴⁾による disk polynomial についての安定性の定理などがこれに属する。他の一つは、多項式の族が与えられたときこの族に属するすべての多項式の安定性を、与えられた情報を用いて実際に判定する手法を与えるものであり、Bialas⁵⁾による二つの Hurwitz 多項式の凸結合が Hurwitz 多項式となるための必要十分条件や、このアイデアを Schur 安定多項式の凸結合の場合に適用した Ackermann and Barmish⁶⁾の結果および Tsykin and Polyak⁷⁾による l^p -ロバスト安定性の判別手法などがこれに属する。

この Tsykin と Polyak の結果は連続・線形システムの特性多項式の族が l^p -ノルムによる不等式で与え

られた場合に、そのロバスト安定判別を複素平面上の固定された閉集合と一つの多項式から作られるある軌跡との共通部分の有無に帰着させており、ある意味で Nyquist の安定判別法の拡張ともいえるものである。

本論文はこの Tsykin と Polyak のアイデアを離散・線形システムの場合に適用したものである。

2. 問題の設定

$n \geq 1$ を固定して、nominal な特性多項式 $G(z)$:

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (1)$$

を Schur 多項式とする。ただし、Schur 多項式とは Schur 安定（すなわち、そのすべての根を単位円板の内部にもつ）多項式のことを意味するものとする。このとき、係数の不確定性が以下の制約条件:

$$\left\{ \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right|^p \right\}^{1/p} \leq r \quad (2)$$

ただし、 $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n > 0$, $r > 0$ はおのとの与えられた定数

を満たすような多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \cdots + a'_n z^n \quad (3)$$

がすべて Schur 多項式となるか否かを判定する方法を考え、また逆に $p, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ が与えられたとき、制約条件(2)を満たす $G'(z)$ がすべて Schur 多項式となりうる最大の $r(>0)$ を求める方法を考える。

ここで、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ は実（または、複素）定数とし、 $a'_0, a'_1, \dots, a'_n$ は制約条件(2)を満たす複素数とする。

また、制約条件(2)を満たす(3)の多項式 $G'(z)$ を admissible な多項式と呼ぶことにすると、多項式(3)と $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の一点 $[a'_0 \cdots a'_n]^T \in \mathbf{C}^{n+1}$ とは1対1に対応するので、admissible な多項式の全体は $\mathbf{C}^{n+1}$ 内のある点集合と同一視できることになる。

なお、制約条件(2)は $p = \infty$ のときには

$$|a'_k - a_k| \leq r \beta_k, \quad (0 \leq k \leq n)$$

となって、多項式(3)はいわゆる disk 多項式となる

* 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received December 4, 1990)
(Revised February 14, 1991)

ことに注意する。

3. 数学的準備と定義

以下では、ある変数 t が開区間 $a < t < b$ に存在するとき $t \in]a, b[$ と表わし、閉区間 $a \leq t \leq b$ に存在するときには $t \in [a, b]$ 、また半開区間 $a < t \leq b$, $a \leq t < b$ に存在する場合にはおのおの $t \in]a, b]$, $t \in [a, b[$ と表わすことにする。

さて、制約条件(2)に現れる固定した $p (\geq 1)$ に対して

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たす正数 q を考え (ただし、 $p=1$ のときは $q=\infty$, $p=\infty$ のときは $q=1$ と規定する)、閉円板 D_p を以下のように定義する。

【定義1】 $1 \leq p \leq \infty$ なる任意の p に対して、複素平面上の原点を中心とする閉円板 D_p を以下のように定義する。

$$D_p \equiv \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r \left(\sum_{k=0}^n \beta_k^q \right)^{1/q} \right\}$$

ただし、 $q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす正数で、 $q=\infty$ のときには

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \beta_k^q \right)^{1/q} = \max \{ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \}$$

となる。また r は制約条件(2)で与えられたものとする。

つぎに、任意の多項式 $F(z)$ に対して、 $z=e^{i\theta}$ とし、 θ を 0 から 2π まで連続的に変化させたとき、点 $F(e^{i\theta})$ が複素平面上に連続曲線を描くことに注目して $\text{plot}(F)$ を以下のように定義する。

【定義2】 任意の多項式 $F(z)$ に対して、複素平面上的点集合 $\{F(e^{i\theta}) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ を $\text{plot}(F)$ と呼ぶ。すなわち、

$$\text{plot}(F) \equiv \bigcup_{0 \leq \theta < 2\pi} \{F(e^{i\theta})\}$$

4. 主要な結果

以上の仮定のもとに以下の補題と定理が成り立つ。

【補題1】 admissible な多項式の全体は凸集合である。

(証明) 任意の二つの admissible な多項式を

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \dots + a'_n z^n$$

$$G''(z) = a''_0 + a''_1 z + a''_2 z^2 + \dots + a''_n z^n$$

とすると、 $\forall \lambda \in]0, 1[$ に対して

$$\lambda G'(z) + (1-\lambda)G''(z) = \sum_{k=0}^n (\lambda a'_k + (1-\lambda)a''_k) z^k$$

が制約条件(2)を満たすことを示せばよい。今、 $1 \leq p < \infty$ とするとき

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left| \frac{(\lambda a'_k + (1-\lambda)a''_k) - a_k}{\beta_k} \right|^p \\ &= \sum_{k=0}^n \left| \frac{\lambda(a'_k - a_k) + (1-\lambda)(a''_k - a_k)}{\beta_k} \right|^p \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{\lambda |a'_k - a_k|^p + (1-\lambda) |a''_k - a_k|^p}{\beta_k^p} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right|^p + (1-\lambda) \sum_{k=0}^n \left| \frac{a''_k - a_k}{\beta_k} \right|^p \\ &\leq \lambda r^p + (1-\lambda)r^p = r^p \end{aligned}$$

となって、 $\forall \lambda \in]0, 1[$ に対して $\lambda G'(z) + (1-\lambda)G''(z)$ が admissible とわかる。

また、 $p=\infty$ のときは $0 \leq k \leq n$ として

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\lambda a'_k + (1-\lambda)a''_k) - a_k}{\beta_k} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda(a'_k - a_k) + (1-\lambda)(a''_k - a_k)}{\beta_k} \right| \\ &\leq \lambda \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right| + (1-\lambda) \left| \frac{a''_k - a_k}{\beta_k} \right| \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

となって、 $p=\infty$ のときにも $\forall \lambda \in]0, 1[$ に対して $\lambda G'(z) + (1-\lambda)G''(z)$ が admissible とわかる。

Q. E. D.

【補題2】 特性多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \dots + a'_n z^n$$

が admissible ならば、

$$\text{plot}(G' - G) \subset D_p$$

となる。

(証明) $\forall \theta \in [0, 2\pi[$ に対して

$$G'(e^{i\theta}) - G(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n (a'_k - a_k) e^{ik\theta}$$

だから、 $G'(z)$ が admissible なら

$$\left\{ \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right|^p \right\}^{1/p} \leq r$$

となることを考慮すると

$$\begin{aligned} & |G'(e^{i\theta}) - G(e^{i\theta})| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right| \beta_k \\ &\leq \left\{ \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^q \right\}^{1/q} \\ &\quad (\because \text{Hölder の不等式}^{8)) \\ &\leq r \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^q \right\}^{1/q} \end{aligned}$$

となって

$$\text{plot}(G' - G) \subset D_p$$

を得る。

Q. E. D.

以上の補題を利用すれば以下の定理が得られる。

《定理 1》 $G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ を nominal な Schur 多項式とすると、制約条件 (2) を満たす任意の多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \dots + a'_n z^n$$

が Schur 多項式となるための必要十分条件は、

$$\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$$

となることである。

(証明) 背理法による。

必要性: admissible な任意の $G'(z)$ が Schur 多項式で、かつ $\text{plot}(G) \cap D_p \neq \phi$ であったと仮定する。

このとき、 $\text{plot}(G) \cap D_p \neq \phi$ だから、 $\exists \theta_0 \in [0, 2\pi[$ と $\exists \phi_0 \in [0, 2\pi[$ と $\exists h \in [0, 1]$ とが存在して

$$G(e^{i\theta_0}) = hr \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k \right\}^{1/q} e^{i\phi_0} \quad (4)$$

が成り立つ。そこで、以下の三つの場合に分けて考える。

(A) $p=1$ の場合

$p=1$ のとき、 $q=\infty$ と規約してあったから $\beta_0, \dots, \beta_n$ のうちの最大のものの一つを β_m とすると、 D_p の半径は $r\beta_m$ となる。今、 $G'(z)$ を

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \dots + a'_n z^n$$

ただし、 $a'_m = a_m - hr\beta_m e^{i\phi_0} e^{-im\theta_0}$

$$a'_k = a_k \quad (0 \leq k \leq n, k \neq m)$$

とすると、 $p=1$ だから、

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right| = hr \leq r$$

となって $G'(z)$ は admissible となる。

一方、 $z = e^{i\theta_0}$ と置くと、

$$G'(e^{i\theta_0}) = a'_0 + a'_1 e^{i\theta_0} + \dots + a'_n e^{in\theta_0}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta_0} \right\} - hr\beta_m e^{i\phi_0}$$

$$= G(e^{i\theta_0}) - hr\beta_m e^{i\phi_0} = 0 \quad (* (4))$$

となって $G'(z)$ は単位円周上に根をもつので Schur 多項式でない。これは始めの仮定に矛盾する。ゆえに、 $p=1$ の場合

$$\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$$

を得る。

(B) $1 < p < \infty$ の場合

今度は、 $G'(z)$ の係数を

$$a'_k = a_k - \frac{hr\beta_k e^{i\phi_0} e^{-ik\theta_0}}{(\beta_0^q + \dots + \beta_n^q)^{1/p}} \quad (0 \leq k \leq n)$$

とすると、 $(q-1)p=q$ に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right|^p &= \frac{h^p r^p}{\beta_0^q + \dots + \beta_n^q} \sum_{k=0}^n \beta_k^{(q-1)p} \\ &= \frac{h^p r^p}{\beta_0^q + \dots + \beta_n^q} \sum_{k=0}^n \beta_k^{q-1} \end{aligned}$$

$$= h^p r^p \leq r^p$$

となって $G'(z)$ は admissible となる。

一方、 $z = e^{i\theta_0}$ と置くと、

$$G'(e^{i\theta_0}) = a'_0 + a'_1 e^{i\theta_0} + \dots + a'_n e^{in\theta_0}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta_0} \right\} - \frac{hr e^{i\phi_0}}{(\beta_0^q + \dots + \beta_n^q)^{1/p}} \sum_{k=0}^n \beta_k^q$$

$$= G(e^{i\theta_0}) - hr e^{i\phi_0} \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^q \right\}^{1/q}$$

$$= 0 \quad (* (4))$$

となって $G'(z)$ は Schur 多項式でない。これは始めの仮定に矛盾する。ゆえに、 $1 < p < \infty$ の場合にも

$$\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$$

となる。

(C) $p=\infty$ の場合

$p=\infty$ のとき、 $q=1$ と規約してあったから、 D_p の半径は $r(\beta_0 + \dots + \beta_n)$ となることに注意する。それで $G'(z)$ の係数を

$$a'_k = a_k - hr\beta_k e^{i\phi_0} e^{-ik\theta_0} \quad (0 \leq k \leq n)$$

とすると、

$$\left| \frac{a'_k - a_k}{\beta_k} \right| = hr \leq r \quad (0 \leq k \leq n)$$

となって $G'(z)$ は admissible となる。

一方、 $z = e^{i\theta_0}$ と置くと、

$$G'(e^{i\theta_0}) = a'_0 + a'_1 e^{i\theta_0} + \dots + a'_n e^{in\theta_0}$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta_0} \right\} - hr e^{i\phi_0} \sum_{k=0}^n \beta_k$$

$$= 0 \quad (* (4))$$

となって $G'(z)$ は Schur 多項式でない。これは始めの仮定に矛盾する。ゆえに、 $p=\infty$ の場合にも

$$\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$$

となる。

十分性: つぎに十分性については、 $\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$ であって、かつ admissible な $G'(z)$ で Schur 多項式でないものが存在すると仮定する。

このとき、 $\text{plot}(G) \cap D_p = \phi$ だから、 $\forall \theta \in [0, 2\pi[$ に対して

$$|G(e^{i\theta})| > r \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^q \right\}^{1/q} \quad (5)$$

となることに注意する。

さて、admissible であって Schur でない多項式を $G^*(z)$:

$$G^*(z) = a_0^* + a_1^* z + a_2^* z^2 + \dots + a_n^* z^n$$

とし、 $G^*(z)$ と $G(z)$ との凸結合

$$\tilde{G}_\lambda(z) = \lambda G^*(z) + (1-\lambda) G(z) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

を考えると、補題 1 によって admissible な多項式の全体は凸集合だから、 $\tilde{G}_\lambda(z)$ は admissible となる。

ここで、多項式の根がその係数の連続関数であることを考慮すれば、 $\tilde{G}_\lambda(z)$ の根は λ の連続関数となるので $\exists \lambda_1 \in [0, 1]$ に対して

$$\tilde{G}_{\lambda_1}(z) = \lambda_1 G^*(z) + (1 - \lambda_1) G(z)$$

は単位円周上に少なくとも一つ根をもつ。その根を $e^{i\theta_1}$ とすると

$$\tilde{G}_{\lambda_1}(e^{i\theta_1}) = 0 \quad (6)$$

となる。一方、補題2により admissible な多項式 $\tilde{G}_{\lambda_1}(z)$ に対しては

$$\text{plot}(\tilde{G}_{\lambda_1} - G) \subset D_p$$

が成り立つから

$$|\tilde{G}_{\lambda_1}(e^{i\theta_1}) - G(e^{i\theta_1})| \leq r \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^2 \right\}^{1/2}$$

となる。これは(6)式を考慮すれば

$$|G(e^{i\theta_1})| \leq r \left\{ \sum_{k=0}^n \beta_k^2 \right\}^{1/2}$$

を意味するが、(5)式に矛盾する。ゆえに $\text{plot}(G) \cap D_p = \emptyset$ ならば admissible な多項式はすべて Schur 多項式となる。 Q. E. D.

5. 具体例

以下に定理1を適用して、特性多項式の集合のロバスト安定性を判別できる例を示す。

〔例1〕 nominal な特性多項式 $G(z)$:

$$G(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3$$

に対して、制約条件:

$$\{|a'_0 - 1|^p + |a'_1 - 2|^p + |a'_2 - 3|^p + |a'_3 - 4|^p\}^{1/p} \leq r$$

のもとで多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3$$

がすべて Schur 多項式となるような $r(>0)$ の範囲を求める問題を考える。

これは制約条件(2)において、 $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ とした場合に相当する。 $\text{plot}(G)$ を描けば Fig. 1 のようになり、

$$\text{plot}(G) \cap D_p = \emptyset$$

となるためには

$$D_p \text{ の半径} < 2 \quad (7)$$

が必要十分条件となる。よって、

(A) $p=1$ の場合、 $q=\infty$ となるので

$$D_p \text{ の半径} = r(\beta_0^q + \dots + \beta_3^q)^{1/q} = r$$

となり、(7)式から $r < 2$ とすればよい。すなわち、

$$|a'_0 - 1| + |a'_1 - 2| + |a'_2 - 3| + |a'_3 - 4| < 2$$

を満たす任意の $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 \in \mathbb{C}$ に対して

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3$$

は常に Schur 多項式となる。

(B) $p=2$ の場合は、 $q=2$ となり

Fig. 1 Plot(G) and D_p (the radius of the disk=1.9)

$$D_p \text{ の半径} = r(\beta_0^2 + \dots + \beta_3^2)^{1/2} = 2r$$

となり、(7)式から $r < 1$ とすればよい。すなわち、

$$|a'_0 - 1|^2 + |a'_1 - 2|^2 + |a'_2 - 3|^2 + |a'_3 - 4|^2 < 1$$

を満たす任意の $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 \in \mathbb{C}$ に対して

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3$$

は常に Schur 多項式となる。

(C) $p=\infty$ の場合は、 $q=1$ となり

$$D_p \text{ の半径} = r(\beta_0 + \dots + \beta_3) = 4r$$

となり、(7)式から $r < 1/2$ とすればよい。すなわち、

$$|a'_0 - 1| < \frac{1}{2}, |a'_1 - 2| < \frac{1}{2}, |a'_2 - 3| < \frac{1}{2},$$

$$|a'_3 - 4| < \frac{1}{2}$$

を満たす任意の $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 \in \mathbb{C}$ に対して disk 多項式

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3$$

は常に Schur 多項式となる。

〔例2〕 monic な多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + \dots + a'_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

が制約条件:

$$|a'_0|^2 + |a'_1|^2 + \dots + |a'_{n-1}|^2 \leq r^2$$

のもとで、Schur 多項式となるような $r(>0)$ の範囲を求める問題を考える。

ここで、 $G(z) = z^n$ と置けば $G(z)$ は Schur 多項式だから、定理1の結果を適用するには $p=2$ とし、

(2)式の制約条件:

$$\left| \frac{a'_0 - a_0}{\beta_0} \right|^2 + \dots + \left| \frac{a'_n - a_n}{\beta_n} \right|^2 \leq r^2$$

において、 $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$ および $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 1$, $\beta_n \rightarrow 0$ とすればよい。このとき

$$\text{閉円板 } D_2 \text{ の半径} = r(\beta_0^2 + \dots + \beta_n^2)^{1/2} = r\sqrt{n}$$

となり, また $\text{plot}(G) = \{e^{in\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ は原点中心, 半径 1 の円周となる. ゆえに $\text{plot}(G) \cap D_2 = \phi$ となるためには

$$r\sqrt{n} < 1 \quad (\text{すなわち, } r < 1/\sqrt{n})$$

であればよい. よって, 求める r の範囲は

$$0 < r < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となる.

6. おわりに

本論文の方法は実行が容易なので, 特性多項式の不確定性が制約条件 (2) の形で与えられる離散・線形システムの場合, パソコンなどを用いて定理 1 により, そのロバスト安定性を容易に判別することができる. ただし, 多項式の係数が実数値に限られる場合には, この定理はロバスト安定のための十分条件を与えるものとなる.

なお, n 次の多項式 $G(z)$ が Schur 多項式であることと, $z = e^{i\theta}$ として θ を 0 から 2π まで連続的に変化させたときの $G(e^{i\theta})$ の軌跡が原点を正方向にちょうど n 回まわることとが, 偏角の原理によって, 同値であることを考慮すれば, 定理 1 において, nominal な多項式 $G(z)$ が Schur 多項式であるという仮定を取り除くことができる. この場合, 定理は以下のように変更される.

《定理 2》 $G(z)$ を nominal な多項式とすると, 制約条件 (2) を満たす任意の多項式 $G'(z)$:

$$G'(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \cdots + a'_n z^n$$

が Schur 多項式となるための必要十分条件は, 以下の (i), (ii) が同時に成り立つことである.

(i) θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき, 点 $G(e^{i\theta})$ が原点を正方向に n 回まわって元の点にもどる

(ii) $\text{plot}(G) \cap D_r = \phi$ が成り立つ

参考文献

- 1) V. L. Kharitonov: Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differential Equations*, **14**-11, 1483/1485 (1979)
- 2) 森 武宏: パラメータ空間安定論の再考, システム/制御/情報, **33**-6, 282/292 (1989)
- 3) A. C. Bartlett, et al.: Root Locations of an Entire Polytope of Polynomials, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **1**-1, 61/71 (1988)
- 4) H. Chapellat, et al.: On the Robust Stability of a Family of Disk Polynomials, *Proc. 28th CDC*, 37/42 (1989)
- 5) S. Bialas: A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Convex Combinations of Stable Polynomials or Matrices, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, **33**-9/10, 473/480 (1985)
- 6) J. E. Ackermann and B. R. Barmish: Robust Schur Stability of a Polytope of Polynomials, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-33**-10, 984/986 (1988)
- 7) Y. Z. Tsypkin, B. T. Polyak: Frequency Domain Criteria for l^p -Robust Stability of Continuous Linear Systems, *Institute for Control Sciences, Moscow, USSR* (1990)
- 8) 河田, 三村: 現代数学概説 II, 岩波書店 (1972)