感度を考慮した最適ロバストサーボ系の設計†

愛田 一雄*・北森 俊行**

Design of a Reduced Sensitivity Optimal Robust Servo System

Kazuo AIDA* and Toshiyuki KITAMORI**

This study is concerned with a design method of the robust servo system which is optimal in the sense that a performance index, comprising the quadratic forms of both the output error vector and the deviation control vector, is minimized.

The design method is an exact model matching with pole-zero cancellations. The model is an optimal control system without servo compensator, designed with the optimal regulator technique. The initial values of the servo compensator are set according to the initial conditions of the plant and the reference signal generator.

The sensitivity can be reduced utilizing the configurations of cancelled pole-zero pairs. The order of the Butterworth pole pattern is constant regardless of the dimension of the servo compensator. Moreover, this servo system has the same stability robustness, in the sense that the criterion for optimizing is satisfied, as typical optimal servo systems designed using different performance indices.

A numerical example illustrates the efficiency of this servo system.

Key Words: robust servo system, optimal control, reduced sensitivity, stability robustness, exact model matching

1. ま え が き

次式で示される可制御、可観測な線形定係数プラントを考える。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $x(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $y(t)$ 、 $u(t)$ は $m \times 1$ の出力および制御入力ベクトルとし、 A 、 B および C は適当な次元の行列である。

制御系が追従すべき目標入力、つぎの線形自由系 (目標入力発生器) の出力で与えられるものとする。

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = A_r g(t) \\ r(t) = C_r g(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

ここで、 $g(t)$ は $p \times 1$ 状態ベクトル、 $r(t)$ は $m \times 1$ 目標入力ベクトルであり、 A_r 、 C_r を

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & I_m & & & \\ & 0 & I_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & I_m \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \\ -\beta_0 I_m & -\beta_1 I_m & \dots & -\beta_{p-1} I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$C_r = [I_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

とする。 (C_r, A_r) は可観測であり、 A_r の最小多項式 $\phi(s)$ は次式となる。

$$\phi(s) = s^p + \beta_{p-1}s^{p-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$$

(1.2) 式の目標入力 $r(t)$ に定常偏差なく追従する、最適ロバストサーボ系の設計問題では、おもに下記の2通りの設計法が使われてきたと思われる。

(1) プラントを拡大したエラーシステムに対して最適レギュレータ手法を用いる設計法^{1), 2)}

(2) 偏差ベクトルで表現された拡大系に対して最適レギュレータ手法を用いる設計法^{3), 4)}

これらの設計法で構成されるロバストサーボ系はつぎのような欠点をもつ。

i) 一般にロバストサーボ系が最適となるためには、プラントと目標入力発生器の初期状態に対する適当な補償が必要である。設計法(2)ではサーボ補償器の初期設定でこれを実現できる⁴⁾が、設計法(1)では、 $p \geq 2$ の目標入力信号に対して、この実現は困難と考

† 第18回制御理論シンポジウムで発表 (1989・5)

* 新潟大学工学部 新潟市五十嵐2の町 8050

** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata

** Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received September 3, 1990)

(Revised January 14, 1991)

えられる。

ii) 設計法(2)で使われる評価関数は、周波数重みをかけた誤差を抑える意味をもつと解釈することもできるが、過渡現象を扱う時間領域の設計では、その意義が不明確になる。

iii) サーボ補償器の次元が大きくなると、制御系の漸近的極配置を与える Butterworth Pattern (B. P.) の次数が大きくなるので、評価関数の重みの選択によってはパラメータが変動した場合の目標入力や、外乱に対する過渡応答の減衰が悪くなる。

本研究では、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{e^T(t)Qe(t) + \bar{u}^T(t)R\bar{u}(t)\} dt \quad (1.4)$$

$$e(t) \triangleq y(t) - r(t), \quad \bar{u}(t) \triangleq u(t) - \bar{u}(t)$$

$\bar{u}(t): \lim_{t \rightarrow \infty} \{u(t) - \bar{u}(t)\} = 0$ を満足する関数

Q, R : 正定対称行列

を最小にする意味で最適であり、B. P. の次数を抑え、かつ低感度なロバストサーボ系を設計する方法が提案される。

設計法は極、零点相殺をもつ exact model matching 法である。モデルは最適レギュレータ手法で設計された、サーボ補償器をもたない最適制御系である。これによって、目標入力に対する最適応答と B. P. の低次化および低感度化が達成される。サーボ補償器の初期値は、プラントと目標入力発生器の初期条件に基づいて設定されるが、これによって、初期状態に対する最適レギュレーションが得られる。

本サーボ系は、相殺される極、零点を適当に選ぶことにより、設計法(1)、(2)で得られるような他の最適サーボ系と同じように円条件を満足する。

以下、2章で設計法を示したあと、制御系の性質、すなわち、3章で最適性、4章では、感度と安定性を検討する。5章では数値例によって本制御系の有効性を示す。

2. 設計

2.1 原理

まず、サーボ補償器をもたない Fig. 1 のような最適制御系 Σ_R を考える。(1.4)式の J を最小にする最適フィードバック係数行列 F は定常 Riccati 方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T Q C = 0 \quad (2.1)$$

の正定解を用いて

$$F = R^{-1}B^T P \quad (2.2)$$

で求まる。また、 Γ は

Fig. 1 Block diagram of an optimal control system, Σ_R

$$\Gamma = [F \ I_m] \begin{bmatrix} T_x \\ T_u \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

で設計できる。ここで、 $\bar{x}(t)$ と $\bar{u}(t)$ を

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t) - \bar{x}(t)\} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{u(t) - \bar{u}(t)\} = 0$$

を満足する関数とすると、 T_x, T_u は

$$\bar{x}(t) = T_x g(t), \quad \bar{u}(t) = T_u g(t)$$

の関係を満たす定係数行列であり、(2.10)式が満足されるとき次式の一意解である⁹⁾。

$$\begin{cases} AT_x - T_x A_r + BT_u = 0 \\ CT_x - C_r = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Σ_R は任意の初期条件に対して最適になるが、プラントにパラメータ変化があると定常偏差が生ずる。

そこでつぎに、Fig. 2 のようなサーボ補償器を内蔵したロバストサーボ系 Σ_C を構成する。 Σ_C, Σ_R の目標入力 $r(t)$ から出力 $y(t)$ へと伝達関数行列を、それぞれ $G_C(s), G_R(s)$ とし、恒等式

$$G_C(s) \equiv h(s)G_R(s) \quad (2.5)$$

を満足するように、 Σ_C の制御係数行列 K, K_x および K_g を設計する。ここで、 $h(s)$ は分母、分子が p 次の同じ多項式からなる安定な有理式であり

$$h(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \quad (2.6)$$

$$\phi(s) \triangleq s^p + \xi_{p-1}s^{p-1} + \dots + \xi_1 s + \xi_0$$

とする。 $h(s)$ は Σ_C と Σ_R の目標入力から出力への伝達関数を同じにするとともに、 Σ_C の低周波感度を抑える目的で導入されている。 $\phi(s)$ は制御系の感度と安定性に関係するので係数 ξ_i の決め方は4章で述べ

Fig. 2 Block diagram of a robust servo system, Σ_C

る。

このように、 Σ_c は初期状態 $x(0)$, $q(0)$ を無視した伝達関数の model matching 法で設計されているので、このままでは $x(0)$, $q(0)$ に対する最適レギュレーションが達成されない。この初期状態に対する補償はサーボ補償器の初期設定で行われる (3章)。

2.2 Σ_c の制御パラメータの設計

Fig. 1 の制御系 Σ_R の制御則は、(1.1)式のプラントに対し、

$$u(t) = -Fx(t) + \Gamma q(t) \quad (2.7)$$

となる。

Fig. 2 のサーボ系 Σ_c において、(1.2)式の内部モデルとなるサーボ補償器を

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c e(t) \\ e(t) &\triangleq y(t) - r(t), \quad z(t) \in R^{pm} \end{aligned} \quad (2.8)$$

と表現する。ここで、 $A_c = A_r$ とし、 B_c を

$$B_c \triangleq [0 \cdots 0 \quad I_m]^T$$

とする。(1.1)式のプラントと、(2.8)式のサーボ補償器をあわせた拡大系は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_c \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.9)$$

となる。この拡大系が可制御となるためのつぎのランク条件が成立するものとする。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (2.10)$$

ここで、 λ_i ($i=1, \dots, p$) は A_c すなわち A_r の固有値。 Σ_c の制御則は次式となる。

$$u(t) = -[K \quad K_z] \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + K_r q(t) \quad (2.11)$$

A_r が(1.3)式で与えられるとき、 $q(t)$ のラプラス変換 $q(s)$ は、 $q(0)$ を無視すると

$$q(s) = N(s)r(s) \quad (2.12)$$

$$N(s) \triangleq [I_m \quad sI_m \cdots s^{p-1}I_m]^T$$

と表わされるので、 $G_R(s)$ と $G_C(s)$ は

$$G_R(s) = G_p(s)T_R(s)^{-1}\Gamma N(s) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} G_C(s) &= G_p(s)T_C(s)^{-1}\{K_z(sI_{pm} - A_c)^{-1} \\ &\quad \times B_c C_r + K_\theta\} N(s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$G_p(s) \triangleq C(sI_n - A)^{-1}B$$

$$T_R(s) \triangleq I_m + F(sI_n - A)^{-1}B \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} T_C(s) &\triangleq I_m + \{K + K_z(sI_{pm} - A_c)^{-1} \\ &\quad \times B_c C\}(sI_n - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。 $\det(sI_n - A)$ および $\text{adj}(sI_n - A)B$ を

$$\begin{aligned} \det(sI_n - A) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \\ \text{adj}(sI_n - A)B &= D_{n-1}s^{n-1} + D_{n-2}s^{n-2} + \cdots \\ &\quad + D_1s + D_0 \end{aligned}$$

と表現する。ここで、

$$\begin{cases} D_{n-1} \triangleq B \\ D_{n-i} \triangleq (A^{i-1} + a_{n-1}A^{i-2} + \cdots \\ \quad + a_{n-i+2}A + a_{n-i+1}I_n)B \\ (i=2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

また、 $(sI_{pm} - A_c)^{-1}B_c$ も次式で表現する。

$$\begin{aligned} (sI_{pm} - A_c)^{-1}B_c &= \frac{E_{p-1}s^{p-1} + \cdots + E_1s + E_0}{\phi(s)} \\ &= \frac{N(s)}{\phi(s)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$E_0 \triangleq [I_m \quad 0 \cdots 0]^T,$$

$$E_1 \triangleq [0 \quad I_m \cdots 0]^T, \dots, E_{p-1} \triangleq [0 \cdots 0 \quad I_m]^T$$

(2.13)式から次式が得られる。

$$\frac{\phi(s)}{\psi(s)} G_R(s) = G_p(s) \{\phi(s)T_R(s)\}^{-1} \psi(s) \Gamma N(s) \quad (2.18)$$

(2.14)式を、(2.17)式を使って変形すると

$$\begin{aligned} G_C(s) &= G_p(s) \{\phi(s)T_C(s)\}^{-1} \{K_z N(s)C_r \\ &\quad + \phi(s)K_\theta\} N(s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。したがってつぎの恒等式は(2.5)式が成立するための十分条件となっている。

$$\{\phi(s)T_C(s) \equiv \phi(s)T_R(s)\} \quad (2.20a)$$

$$\begin{cases} \{K_z N(s)C_r + \phi(s)K_\theta\} N(s) \\ \equiv \phi(s) \Gamma N(s) \end{cases} \quad (2.20b)$$

この恒等式からつぎの関係式が得られる。

$$K \hat{D} \Phi_0 + K_z \Phi_5 = \Phi_1 \Phi_2 + \Phi_3 \Phi_4 \quad (2.21a)$$

$$[K_z \quad K_r] \Psi_0 = \Gamma \Psi_1 \quad (2.21b)$$

ここで

$$\hat{D} \triangleq [D_0, D_1, \dots, D_{n-1}]$$

$$\Phi_0 \triangleq \begin{bmatrix} I_m & & & & \\ & \beta_{p-1} I_m & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & \beta_0 I_m & & & \\ & 0 & & \beta_0 I_m & \cdots & \beta_{p-1} I_m & I_m \end{bmatrix}$$

$$; nm \times nm$$

$$\Phi_1 \triangleq [a_0 I_m \quad a_1 I_m \cdots a_{n-1} I_m \quad I_m]$$

$$; m \times (n+1)m$$

$$\Phi_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{p-1} I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \delta_0 I_m \\ \mathbf{0} & \cdots & \delta_0 I_m \cdots \delta_{p-1} I_m \end{bmatrix}$$

; $(n+1)m \times nm$

$$\delta_i \triangleq \xi_i - \beta_i, \quad i=0, \dots, p-1$$

$$\Phi_3 \triangleq F \hat{D}; \quad m \times nm$$

$$\Phi_4 \triangleq \begin{bmatrix} I_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \xi_{p-1} I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \xi_0 I_m \\ \mathbf{0} & \cdots & \xi_0 I_m \cdots \xi_{p-1} I_m \end{bmatrix}$$

; $nm \times nm$

$$\Phi_5 \triangleq \begin{bmatrix} CD_p \cdots CD_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CD_1 \cdots CD_p & \cdots & CD_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

; $pm \times nm$

$$\Psi_0 \triangleq \begin{bmatrix} I_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \beta_0 I_m \cdots \beta_{p-1} I_m & I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_0 I_m \cdots \beta_{p-1} I_m & I_m \end{bmatrix}$$

; $2pm \times 2pm$

$$\Psi_1 \triangleq \begin{bmatrix} \xi_0 I_m \cdots \xi_{p-1} I_m & I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \xi_0 I_m \cdots \xi_{p-1} I_m & I_m \end{bmatrix}$$

; $pm \times 2pm$

(注意 1) Φ_0 の中に, $p=n$ では β_0 が, $p=n+1$ では β_0, β_1 が現れない. Φ_2, Φ_4 も同様に扱う. これから, Σ_c の設計に関するつぎの定理が得られる.

《定理 1》 $h(s)$ が与えられるとき, (2.5) 式を満足する Σ_c の制御パラメータはつぎの式で設計できる.

$$[K_x \ K_g] = \Gamma \Psi_1 \Psi_0^{-1} \quad (2.22)$$

$$K = \Theta \hat{D}^T (\hat{D} \hat{D}^T)^{-1} \quad (2.23)$$

ここで,

$$\Theta \triangleq (\Phi_1 \Phi_2 + \Phi_3 \Phi_4 - K_x \Phi_5) \Phi_0^{-1}$$

であり, Γ は (2.3) 式で与えられる.

(略証) Ψ_0 は明らかに正則. ゆえに, (2.21 b) 式の解は (2.22) 式で与えられる. Φ_0 も明らかに正則だから (2.22) 式の K_x を (2.21 a) 式に代入すれば, $K \hat{D}$ は求められる. 過程は省略するが, K が (2.21 a) 式の解となることを示すことができる. 仮定より, (A, B) は可制御. このとき $\hat{D}$ は行フルランクとなるので, (2.21 a) 式から得られる $K \hat{D} = \Theta$ の解 K は一意となり, (2.23) 式で求められる. (2.21 a) 式は (2.20 a) 式の一部から導かれているが, このようにして得られた K, K_x が (2.20) 式を満足することも証明できる.

(証明終)

3. サーボ補償器の初期設定と Σ_c の最適性

ここでは, (2.11) 式の制御則で構成されるロバストサーボ系 Σ_c が, サーボ補償器の初期値 $z(0)$ を適当に設定することによって, 最適になることを示す.

$z(0)$ を

$$z(0) = U_x x(0) + U_g g(0) \quad (3.1)$$

と表現する. Σ_c の $x(0), z(0)$ および $g(0)$ に対する $u(t)$ の Laplace 変換 $u_c(s)$ を求め, (3.1) 式を使うと

$$\begin{aligned} u_c(s) = & -T_c(s)^{-1} \{K + K_x(sI_{pm} - A_c)^{-1} B_c C \\ & + K_x(sI_{pm} - A_c)^{-1} U_x(sI_n - A)\} \\ & \times (sI_n - A)^{-1} x(0) \\ & + T_c(s)^{-1} \{K_g + K_x(sI_{pm} - A_c)^{-1} B_c C_r \\ & - K_x(sI_{pm} - A_c)^{-1} U_g(sI_{pm} - A_r)\} \\ & \times (sI_{pm} - A_r)^{-1} g(0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

が得られる. $g(0)$ にかかる $\{ \}$ 内の第 1, 第 2 項が $g(s), r(s)$ による $u_c(s)$ の成分であり, 第 3 項が $g(s)$ を (2.12) 式によって定義したとき, 無視した $g(0)$ の影響によって, Σ_R の $\Gamma g(t)$ 成分が Σ_c で実現されるときに生ずる誤差を $z(0)$ で補償する $u_c(s)$ の成分である.

一方, 最適制御系 Σ_R の $x(0)$ および $g(0)$ に対する $u(t)$ の Laplace 変換 $u_R(s)$ は

$$\begin{aligned} u_R(s) = & -T_R(s)^{-1} F(sI_n - A)^{-1} x(0) \\ & + T_R(s)^{-1} \Gamma (sI_{pm} - A_r)^{-1} g(0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. このときつぎの定理が得られる.

《定理 2》 サーボ補償器の初期状態 $z(0)$ を与える (3.1) 式で, U_x, U_g をつぎの (3.4), (3.5) 式で与えるとき, (2.11) 式の制御則で, 定理 1 の制御パラメータを用いて構成されるロバストサーボ系 Σ_c は, (1.4) 式の評価関数 J を最小にする意味で最適となる.

$$U_x = L^{-1} N_x \quad (3.4)$$

$$U_g = L^{-1} N_g \quad (3.5)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
L &\triangleq L_1 \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix}; \quad pm \times pm \\
L_1 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_m & & \\ & \ddots & & \ddots & & \\ & & -K_z E_{p-1} & & & \\ & & \vdots & \beta_{p-1} I_m & & \\ & & -K_z E_1 & \vdots & & \\ & & & \beta_1 I_m & \cdots & \beta_{p-1} I_m & I_m \end{bmatrix} \\
&\quad ; \quad pm \times (2p-1)m \\
L_{21} &\triangleq \begin{bmatrix} \beta_0 I_m & \cdots & \beta_{p-1} I_m \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_0 I_m & \beta_1 I_m \end{bmatrix} \\
&\quad ; \quad (p-1)_m \times pm \\
L_{22} &\triangleq \begin{bmatrix} K_z E_0 & \cdots & K_z E_{p-1} \\ & \ddots & \\ 0 & & & K_z E_0 \end{bmatrix} \\
&\quad ; \quad pm \times pm \\
N_x &\triangleq \begin{bmatrix} F-K \\ \{F(\xi_{p-1} I_m + A) - K(\beta_{p-1} I_m + A) - K_z E_{p-1} C\} \\ \vdots \\ \left\{ F \sum_{i=1}^p \xi_i A^{i-1} - K \sum_{i=1}^p \beta_i A^{i-1} \right. \\ \left. - K_z \sum_{i=2}^p E_{i-1} C A^{i-2} \right\} \end{bmatrix} \\
&\quad ; \quad pm \times n \\
N_g &\triangleq \begin{bmatrix} K_g - \Gamma \\ \{K_g(\beta_{p-1} I_{pm} + A_r) + K_z E_{p-1} C_r - \Gamma(\xi_{p-1} I_{pm} + A_r)\} \\ \vdots \\ \left\{ K_g \sum_{i=1}^p \beta_i A_r^{i-1} - \Gamma \sum_{i=1}^p \xi_i A_r^{i-1} \right. \\ \left. + K_z \sum_{i=2}^p E_{i-1} C_r A_r^{i-2} \right\} \end{bmatrix} \\
&\quad ; \quad pm \times pm
\end{aligned}$$

ただし, $\beta_p = \xi_p = 1$ とする.

(略証) (3.2), (3.3)式の $u_c(s)$, $u_R(s)$ に対して, $u_c(s) \equiv u_R(s)$ が成立すれば, ロバストサーボ系 Σ_C の応答は最適制御系 Σ_R のそれと一致する. (2.17)および(2.20a)式を使うと, $u_c(s) \equiv u_R(s)$ が成立する十分条件として, s に関する恒等式

$$\phi(s)K + K_z N(s)C + \phi(s)K_z(sI_{pm} - A_c)^{-1}U_x(sI_n - A) \equiv \phi(s)F \quad (3.6)$$

$$\phi(s)K_g + K_z N(s)C_r - \phi(s)K_z(sI_{pm} - A_c)^{-1}U_g(sI_{pm} - A_r) \equiv \phi(s)\Gamma \quad (3.7)$$

が得られる. $A_c = A_r$ の最小多項式の次数 p を順次大きくしていき, (3.6), (3.7)式を満足する一般的な関係式を作ると, (3.6)式からつぎの(3.8), (3.10)

式, (3.7)式からつぎの(3.9), (3.11)式が得られる.

$$K\phi(A) = K_z \Pi_2 = F\psi(A) \quad (3.8)$$

$$\Pi_2 \triangleq [(C_r)^T (CA)^T \cdots (CA^{p-1})^T]^T$$

$$K_z \Pi_1 = \Gamma\psi(A_r) \quad (3.9)$$

$$\Pi_1 \triangleq [(C_r)^T (C_r A_r)^T \cdots (C_r A_r^{p-1})^T]^T$$

$$LU_x = N_x \quad (3.10)$$

$$LU_g = N_g \quad (3.11)$$

誘導は省略するが, (3.8)式は(2.20a)式を満足する関係式と (A, B) が可制御なることから, (3.9)式は(2.21b)式から導くこともできる. すなわち, (3.8), (3.9)式は K, K_z が定理1のように設計されていれば成立する. (3.10), (3.11)式は L が正則ならば U_x, U_g を(3.4), (3.5)式で与えれば成立する. ゆえに L が正則なることを証明する.

$$\hat{L}_1 \triangleq \begin{bmatrix} I_{(p-1)m} & \vdots & 0 \\ \vdots & L_1 & \vdots \end{bmatrix}, \quad \hat{L}_2 \triangleq \begin{bmatrix} L_{21} & L_3 \\ L_{22} & L_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &\triangleq \begin{bmatrix} I_m & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{p-1} I_m & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \beta_2 I_m & \cdots & \beta_{p-1} I_m & I_m \end{bmatrix} \\
L_4 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ K_z E_{p-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ K_z E_1 & \cdots & K_z E_{p-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

とすると,

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 = \begin{bmatrix} L_{21} & L_3 \\ L & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

となる. $\hat{L}_1$ と L_3 は正則だから, $\hat{L}_2$ が正則ならば L は正則. また, 制御系が安定に設計されていれば, (K_z, A_c) は可観測である⁵⁾. 誘導は省略するが, $A_c = A_r$ で, A_r が(1.3)式で表現されるとき, (K_z, A_c) が可観測となる必要十分条件は, $pm \times pm$ 行列 $R_p \triangleq [K_z^T, (K_z A_c)^T, \dots, (K_z A_c^{p-1})^T]^T$ が正則となることである.

$$\text{rank } \hat{L}_2 = \text{rank} \begin{bmatrix} L_{22} & L_4 \\ L_{21} & L_3 \end{bmatrix}$$

であり, L_3 は正則だから

$$\det \begin{bmatrix} L_{22} & L_4 \\ L_{21} & L_3 \end{bmatrix} = \det(L_{22} - L_4 L_3^{-1} L_{21})$$

となるが, $L_{22} - L_4 L_3^{-1} L_{21} = R_p$ が成立する. ゆえに, $\hat{L}_2$ は正則となり, L は正則. (証明終)

(注意2) 目標入力ステップで, サーボ補償器が1型のときは, $U_g = 0$ となる. このときさらに, 定常状態で目標値を変更するときは, $U_x x(0)$ は前の目標

値に対するサーボ補償器の定常値 $\bar{z}$ と一致するので、 $z(0)$ を改めて設定する必要がない。

4. 感 度

本章では、Fig. 1, Fig. 2 の a 点でループを開いたときの Σ_R と Σ_C の感度行列を比較する。ついで、 $h(s)$ すなわち $\phi(s)$ の一つの決め方について考察する。さらに、 Σ_C は 1 章で述べた設計法 (1), (2) の最適サーボ系と同じように円条件を満足することを示す。

4.1 感度行列

《定理 3》 Fig. 1, Fig. 2 の a 点でループを開いたときの Σ_R , Σ_C の感度行列をそれぞれ $S_R(s)$, $S_C(s)$ とすると、両者間にはつぎの関係が成立する。

$$S_C(s) = \gamma(s, \xi_i) S_R(s) \quad (4.1)$$

ここで、 $\gamma(s, \xi_i)$ は次式で与えられる。

$$\gamma(s, \xi_i) \triangleq \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \quad (4.2)$$

(証明) (2.15), (2.16) 式で定義される $T_R(s)$, $T_C(s)$ はそれぞれ、Fig. 1, Fig. 2 の a 点でループを開いたときの Σ_R , Σ_C の還送差行列である。

$$S_R(s) = T_R(s)^{-1}, \quad S_C(s) = T_C(s)^{-1}$$

だから、(2.20 a) 式から (4.1) 式が得られる。

(証明終)

4.2 $\phi(s)$ の一つの決め方と $r(s, \xi_i)$ の特性

$\phi(s)$ と $\psi(s)$ はどちらも p 次の多項式である。 $\phi(s)$ は (1.2) 式の入力発生器が与えられると決まるが、 $\psi(s)$ は $\phi(s) = 0$ の根が開いた複素左半平面内にあれば、その係数 ξ_i は設計者によって自由に決められる多項式である。

(4.2) 式の $\gamma(s, \xi_i)$ をつぎのように表現する。

(i) p が奇数のとき ($k = (p-1)/2$)

$$\gamma(s, \xi_i) = \frac{s + \theta_0}{s + \sigma_0} \prod_{j=1}^k \frac{s^2 + \eta_j s + \theta_j}{s^2 + 2\zeta_j s + \sigma_j^2} \quad (4.3)$$

(ii) p が偶数のとき ($k = p/2$)

$$\gamma(s, \xi_i) = \prod_{j=1}^k \frac{s^2 + \eta_j s + \theta_j}{s^2 + 2\zeta_j s + \sigma_j^2} \quad (4.4)$$

ここで、 $\phi(s)$ を決める ζ , σ_0 および σ_j はつぎの設計条件を満足するものとする。

[設計条件]

$$\begin{cases} \zeta \geq 2^{-1/2} \\ \sigma_0 \geq \max\{\sigma_{\min}, |\theta_0|\} \\ \sigma_j \geq \max\{\sigma_{\min}, |\theta_j|^{1/2}\}, \quad j=1, \dots, k \end{cases} \quad (4.5)$$

$\sigma_{\min}$ は Σ_C の消去極が代表極にならないための σ_0 , σ_j の下限値であり、ここでは

$$\sigma_{\min} = |\det(-A + BF)|^{1/n} \quad (4.6)$$

で与えることにする。

$\gamma(s, \xi_i)$ の代表的な要素

(1) 指数関数状目標入力するとき: $r(t) = \alpha e^t$

$$\gamma_1(s) = \frac{s-1}{s+\sigma_0}$$

(2) 正弦状目標入力するとき: $r(t) = \alpha \sin(t + \beta)$

$$\gamma_2(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2\zeta\sigma_1s+\sigma_1^2}$$

(3) ランプ状目標入力するとき: $r(t) = \alpha t + \beta$

$$\gamma_3(s) = \frac{s^2}{s^2+2\zeta\sigma_2s+\sigma_2^2}$$

(α, β : 任意の実数)

で、 $\zeta = 2^{-1/2}$ のとき $|\gamma_i(j\omega)|$ ($i=1, 2, 3$) を、Fig. 3 の (1), (2) および (3) に示す。(1), (2) の場合は $\sigma_0, \sigma_1 > 1$ で、(3) の場合は $\sigma_2 > 0$ で $|\gamma_i(j\omega)| \leq 1$ となり、 σ_j ($j=0, 1, 2$) が大きくなるにつれて、低周波数成分が単調減少することがわかる。すなわちこのような $\gamma_i(s)$ の合成で $\gamma(s, \xi_i)$ を構成すれば、ロバストサーボ系 Σ_C の感度は、 σ_j ($j=0, 1, \dots, k$) を大きくすることによって、制御系 Σ_R のものを減少させることができる。

しかし、 Σ_R のループゲインがあまり大きくないときに $h(s)$ の極 ($\phi(s)=0$ の根) の絶対値のみを大きくすると、プラントの零点の配置によっては、プラント外乱に対して好ましくない応答を示す⁶⁾ことも考えられ、 σ_j の上限も存在する。

Fig. 3 Gain plots of $r_i(j\omega)$, $i=1, 2, 3$

実際に σ_j をどのように選ぶべきかは、シミュレーションに委ねるしかないが、 σ_j を $\sigma_{\min}$ の係数倍にとって、シミュレーションを行うと便利である。

4.3 安定性

Σ_C の安定性の指標を示すつぎの定理が得られる。

《定理4》 Σ_R , Σ_C の a 点でループを開いたときの還送差行列をそれぞれ $T_R(s)$, $T_C(s)$ とすると

$$T_C(s) = \gamma(s, \xi_i)^{-1} T_R(s) \quad (4.7)$$

となり、 $T_C(s)$ はつぎの不等式(円条件)を満足する。

$$T_C^T(-j\omega) R T_C(j\omega) \geq R, \text{ for all } \omega \quad (4.8)$$

(証明) (2.20 a) と (4.2) 式から (4.7) 式が得られる。 Σ_R は最適レギュレータ手法によって設計されているから、

$$T_R^T(-j\omega) R T_R(j\omega) \geq R, \text{ for all } \omega \quad (4.9)$$

が成立する⁷⁾。 ζ , σ_j が (4.5) 式を満足するとき、

$$|\gamma(j\omega, \xi_i)| \leq 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \gamma(j\omega, \xi_i) = 1$$

だから、(4.7), (4.9) 式を使うと

$$\begin{aligned} T_C^T(-j\omega) R T_C(j\omega) &\geq |\gamma(j\omega, \xi_i)|^{-2} R \\ &\geq R, \text{ for all } \omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

となり、(4.8) 式が成立する。

(証明終)

5. 数値例

つぎの2入出力プラント⁸⁾を考える。(1.1)式で A , B , C がつぎのように与えられる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3.5 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.2 & -0.4 & -1 & -5.25 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このプラントは可制御、可観測であり、伝達零点はない。 α_1 , α_2 は変動するパラメータで、nominal な値をそれぞれ 3.5, 5.25 とする。目標入力信号は、ランブ信号と正弦状信号からなるものとして、(1.3) 式の A_r を

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & -I_2 & 0 \end{bmatrix}$$

とした。このとき、 $\phi(s)$ は

$$\phi(s) = s^4 + s^2$$

となり、(4.4) 式の分子で、 $\theta_1=1$, $\theta_2=\eta_1=\eta_2=0$ となる。目標入力ベクトルを

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1t-1 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

プラントの初期条件を

$$x(0) = [-2 \quad 0.5 \quad 0 \quad 1 \quad -0.5 \quad 0]^T$$

とする。(1.4) 式の評価関数 J で重み行列 Q , R を

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

として設計する。このとき、(4.6) 式の $\sigma_{\min}$ は、 $\sigma_{\min}=2.0605$ となり、 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_{\min}$ は (4.5) 式を満足している。ここでは $\sigma_1=\sigma_2$ とし、これを σ とおく。また ζ を、 $\zeta=2^{-1/2}$ とする。

Fig. 4 は、上記設計によるロバストサーボ系 Σ_C の出力を描いたものである。(a) は nominal なプラントに対するものであり、サーボ補償器の初期値を

(a) For nominal plant; $\alpha_1=3.5$, $\alpha_2=5.25$ ($\Sigma_C=\Sigma_R$)

(b) The case that $\sigma=\sigma_{\min}$, for off-nominal plant; $\alpha_1=7.0$, $\alpha_2=10.5$

(c) The case that $\sigma=2\sigma_{\min}$, for off-nominal plant; $\alpha_1=7.0$, $\alpha_2=10.5$

Fig. 4 Output responses of Σ_C

(3.1)式に従って設定すると、 Σ_c は最適制御系 Σ_R と同じ応答を示し、最適となる。(b)、(c)はプラントのパラメータが $\alpha_1=3.5 \rightarrow 7.0$ 、 $\alpha_2=5.25 \rightarrow 10.5$ と変動したとき、(b) $\sigma=\sigma_{\min}$ 、(c) $\sigma=2\sigma_{\min}$ のものを示す。 Σ_c の応答は、 σ を大きくすると感度が抑えられ、 $\sigma=2\sigma_{\min}$ で nominal なプラントの応答とほとんど一致していることがわかる。

Fig. 5 は、1章で述べた設計法(2)に従って設計した最適ロバストサーボ系の応答を示す。このとき評価関数

$$J_2 = \int_0^{\infty} \{e^T(t)Q_e e(t) + \tilde{z}^T(t)Q_z \tilde{z}(t) + \tilde{u}^T(t)R \tilde{u}(t)\} dt$$

$$\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$$

$$\tilde{z}(t) : \lim_{t \rightarrow \infty} \{z(t) - \hat{z}(t)\} = 0 \text{ を満足する関数}$$

Q_e, Q_z : 半正定対称行列, R : 正定対称行列

で、 $Q_e=0$, $R=I_2$ とし、 Q_z は、設計されるサーボ系が Σ_R の平均固有値 $\sigma_{\min}=2.0605$ とほぼ一致するように選んだ。また、文献4)に従って、サーボ補償器の初期設定を行った。

Fig. 5(a)の nominal なプラントのときは、 Σ_R と同じ平均固有値をもち、B.P.の次数が高いので、 Σ_c に比べ追従が速くなるが、(b)のプラントのパラメー

タが変動したときは、B.P.の次数が Σ_c に比べて4次高く、 Q_z が比較的大きいために減衰性が悪くなっている。

なお、紙数の都合で例題は示せないが、サーボ補償器の極の近傍にそれと同数以下のプラントの零点がある場合は、設計法(2)のほうが、 $R \rightarrow 0$ に対して極が零点へ速く漸近するという利点がある。

6. む す び

サーボ補償器の初期設定をするという自由度を使い速いモードの相殺極を作って感度の改善を計る、最適ロバストサーボ系 Σ_c を設計する方法を提案した。

本ロバストサーボ系は、(3.1)式に従って、サーボ補償器の初期設定をすれば、(1.4)式の評価関数を最小にする意味で最適である。また、プラントとサーボ補償器からなる拡大系に対して、直接最適レギュレータ手法で設計される最適ロバストサーボ系に比べ、 $R \rightarrow 0$ での制御系の漸近的極配置を与えるB.P.の次数が p 次減少するので、プラントパラメータが変動した場合の目標入力に対する減衰特性も改善される。さらに、他の最適サーボ系と同じように、円条件を満足する。

参 考 文 献

- 1) C. D. Johnson: Further Study of the Linear Regulator with Disturbances —The Case of Vector Disturbances Satisfying a Linear Differential Equation—, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-15-2**, 222/223 (1970)
- 2) 古田勝久: ロバストサーボ系のデジタル設計, 計測自動制御学会論文集, **22-2**, 150/155 (1986)
- 3) E. J. Davison: The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods, IEEE Trans., **AC-26-1**, 93/110 (1981)
- 4) 安田, 野原, 池田: 最適ロバストサーボ系の構成, 計測自動制御学会論文集, **24-8**, 817/822 (1988)
- 5) 木村, 井上: 多変数制御系の理論と応用—Ⅷ, システムと制御, **22-12**, 743/751 (1978)
- 6) T. Mita: On Zeros and Responses of Linear Regulators and Linear Observers, IEEE Trans., **AC-22-3**, 423/428 (1977)
- 7) H. Kwakernaak and R. Sivan: Linear Optimal Control Systems, Chap. 3, Wiley-Interscience (1978)
- 8) 武田, 北森: 線形多入力多出力最適追従制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **14-4**, 359/364 (1978)
- 9) E. J. Davison: The Steady-State Invertibility and Feedforward Control of Linear Time-Invariant Systems, IEEE Trans., **AC-21-4**, 529/534 (1976)

Fig. 5 Output responses of an optimal servo system designed using the performance index J_2