緩やかな 3 次元濃度分布に対する投影からのパターン計測[†]

田 山 典 男*・楊 学 東*

Pattern Measurement from a Few View Projections for Smooth 3-Dimensional Density Distribution

Norio TAYAMA* and Xue dong YANG*

This paper is concerned with a theoretical possibility of a speedy 3D-pattern measurement based on reconstructing digital 3-dimensional images (3D-images). A theory of reconstructing from a few X-ray projection pictures into a smooth 3D density distribution which gratifies the condition of 3D sampling theorem and the Bernstein's approximation, is discussed. First, it is shown that we can reconstruct the original 3D distribution from a projection picture by reading at intervals of the $1/\sqrt{n}$ of one edge of a voxel. Then, a reconstruction algorithm for a smooth 3D density distribution is proposed, and the results of computer simulation with the algorithm are shown.

Key Words: 3D reconstruction algorithm, 3D pattern measurement, smooth 3D density distribution

1. はじめに

G. H. Hounsfield により発明された X 線 CT 装置は、飛躍的に進歩普及して医学に不可欠の診断装置となり、さらに、3 次元 CT の開発が求められている¹⁾。現在、2 次元の CT 画像を多数積み重ねて補間を施す多断層法が用いられているが十分ではない²⁾。3 次元画像を直接再構成する一般の理論としては、これまで Radon 変換を始めとして平行ビームや円錐ビームの場合^{3)~6)}、さらにヘリカルスキャン⁷⁾などについて、再構成の公式が詳しく論じられている。しかし計算量が膨大であり、実用化には至っていない。

一方、特殊な方法として、投影方向を限定し少数または単一方向からの投影データより再構成する研究が

最近なされている^{8)~15)}。これらは投影方向が少ないので撮影時間を大幅に短縮でき、X 線被爆量の削減や 3 次元動画像再構成などへの可能性が考えられ、期待がもたれている。筆者らも、この投影方向を少数限定する立場から、3 次元デジタル物体に対する投影画像からの再構成方法を検討し、逐次型計算による高速な再構成アルゴリズムを提案した¹⁶⁾。ここでは、この考え方を発展させて、濃度が緩やかに変化する 3 次元濃度物体に対する適用を検討する¹⁷⁾。

CT 画像再構成の考え方は汎用性が高いので、近年、医用分野から派生し各種の工業的応用分野において、X 線だけでなく種々のセンサを利用して盛んに研究され始めている。たとえば磁界分布¹⁸⁾、¹⁹⁾や、誘電液中の電界分布²⁰⁾、プラズマ密度分布²¹⁾、温度分布²²⁾、樹木中の年輪分布²³⁾などの新しい対象を映像化して 2 次元パターンとして計測しようとする試みが、年々多くの分野に広がりつつある。

このような新しい対象物の中には、空間における熱拡散現象や樹木中の水分分布のような変化の緩やかな 3 次元濃度分布を、2 次元さらには 3 次元のパターンとして瞬時に計測し映像化して、高速にパターン計測したいという要望も強い。従来の 2 次元 CT の手法は、緻密な形状の再構成に優れているが、膨大な計算量が必要なので、たとえば樹木中の水分分布の測定などには、高速性や価格の面で必ずしも十分でない。このように対象では、再構成される形状がだまかでも、高速に 3 次元濃度分布を再構成してパターン計測するという手法が可能になるならば、きわめて有効と思われる。

そこで本研究の目的は、濃度変化の緩やかな境界のはっきりしない 3 次元濃度物体に対して、標本化定理を導入し高速化の観点から少数方向の投影データより 3 次元再構成する手法を考察することである。

本論文では、標本化定理を満たし Bernstein 近似を

[†] 第 122 回計測自動制御学会東北支部研究集会で発表 (1990・7)

* 岩手大学工学部 盛岡市上田 4-3-5

* Faculty of Engineering, Iwate University, Morioka (Received September 17, 1990)

(Revised February 4, 1991)

適用できる“緩やかな3次元濃度分布”というモデルに対して、透過性のある平行ビームを立体角 (α, β) の方向から照射して得る2次元投影データより、理論的には元の3次元濃度物体が再構成できることを明らかにしており、逐次型の積和計算による高速な3次元再構成の手法を導出している。

以下に、空間周波数成分の最高値が制限されている濃度変化の緩やかな3次元濃度物体に Bernstein²⁵⁾の区分的3次多項式を導入して任意点濃度と標本点濃度との関係を導く。つぎに標本化座標軸に対し特定方向の (α, β) から平行照射した2次元投影データと3次元標本点濃度の間の関係を検討して、積分をせずに逐次型の“積分影響係数”を用いた積和計算により高速に標本点濃度を算出する新しい3次元再構成の手法を導き、具体的な再構成のためのデータ構造とアルゴリズムを提示する。最後に、計算機シミュレーションにより再構成を確認する。

2. 標本化定理に基づく3次元再構成

2.1 緩やかな3次元濃度分布

3次元物体の濃度分布 $f(x, y, z)$ を Fig. 1 に示す。3次元格子点で標本化するとき、3次元標本化定理よ

Fig. 1 The 3D images with smooth density distribution

り、標本化間隔 T_x, T_y, T_z と元の3次元物体に含まれる最大空間角周波数 $\omega_{xm}, \omega_{ym}, \omega_{zm}$ との間につきの

$$\omega_{xm} \leq \pi/T_x, \quad \omega_{ym} \leq \pi/T_y, \quad \omega_{zm} \leq \pi/T_z$$

制限式が成立する場合には、標本化された3次元画像 $f(x_k, y_j, z_i)$ から元の3次元物体 $f(x, y, z)$ が完全に復元される。その復元される3次元物体、つまり元の3次元物体の任意点 (x, y, z) での濃度値 $f(x, y, z)$ は、標本点 (x_k, y_j, z_i) での濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ を用いて次式で記述されることが知られている²⁴⁾。

$$f(x, y, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_k, y_j, z_i) \cdot \frac{\sin \omega_{xm}(x-x_k)}{\omega_{xm}(x-x_k)} \cdot \frac{\sin \omega_{ym}(y-y_j)}{\omega_{ym}(y-y_j)} \cdot \frac{\sin \omega_{zm}(z-z_i)}{\omega_{zm}(z-z_i)}$$

この式は、標本化関数 $c(s) = \sin \pi s / \pi s$ の形になるように座標軸を規準化して改めると、次式で表わせる。

$$f(x, y, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(x_k, y_j, z_i) \cdot c(x-x_k) \cdot c(y-y_j) \cdot c(z-z_i) \quad (1)$$

ここで、標本化関数 $c(s) = \sin \pi s / \pi s$ に対して Bernstein の区分的3次多項式近似²⁵⁾を導入する。

$$c(s) = \begin{cases} 1-2|s|^2+|s|^3 & 0 \leq |s| < 1 \\ 4-8|s|+5|s|^2-|s|^3 & 1 \leq |s| < 2 \\ 0 & 2 \leq |s| \end{cases} \quad (2)$$

Fig. 2 にこのグラフを示す。このような Bernstein 近似が適用できると仮定すると、標本点での濃度値は、各軸方向に距離2未満の領域内に対してその復元に影響を与えることになる。これを裏返して考えると、元の3次元物体の任意点での濃度値 $f(x, y, z)$ が、その点からの各方向成分が距離2未満の標本

Fig. 2 Bernstein's 3-order polynomial approximation

点における濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ から復元されるということである。

3次元標本化定理を満たすように空間周波数成分の最大値が制限されていて Bernstein 近似が適用できるような3次元物体モデルを、以下では“緩やかな3次元濃度分布”と呼ぶことにする。このような“緩やかな3次元濃度分布”においては、空間周波数の帯域制限式を満たし、任意の点での濃度値 $f(x, y, z)$ が、その点の周囲64個の標本点での濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ を用いて記述できるということである。その関係は次式となる。

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 f(x_k, y_j, z_i) \cdot c(x-x_k) \cdot c(y-y_j) \cdot c(z-z_i) \quad (3)$$

ここで隣合う8個の標本点を頂点とする立方体領域をボクセルと呼ぶ。点 (x, y, z) を含むボクセルに対して、そのボクセルを中心とした隣合う $3 \times 3 \times 3$ の27個のボクセルからなる立方体領域をマクロボクセルと呼ぶ。このマクロボクセルの基準点を $\lfloor x-1 \rfloor = x_0$, $\lfloor y-1 \rfloor = y_0$, $\lfloor z-1 \rfloor = z_0$ の頂点 (x_0, y_0, z_0) とする。記号 $\lfloor w \rfloor$ は w を超えない最大の整数を表わす。マクロボクセルに含まれる64個の標本点を点 (x_k, y_j, z_i) で表わす。ここで、 $0 \leq k, j, i \leq 3$ である。

2.2 逐次型3次元再構成の原理

Fig. 1に示すように、3次元連続空間を立方格子点で標本化した空間に、対象の緩やかな3次元濃度分布が入っているとする。隣接する8個の格子点を頂点とする立方体をボクセルといい、ボクセルの一辺のサイズを e とする。 n は、 $\sqrt{n}$ が整数となるような正の整数とする。

この再構成手法は、Fig. 1の座標系をもつ $n \times n \times n$ のボクセルからなる空間において、X線のような透過性の平行ビームを立体角度 (α, β) の方向より照射し、 $Y=0$ の平面に平行した面で得られる2次元投影画像をボクセルサイズ e の $1/\sqrt{n}$ の間隔で読出したデータから、逐次的な計算を行ってすべての3次元標本点の濃度値を求めるというものである。ここで、透過線の傾き α, β は、Fig. 1に示すようにおのおの $X=0$ の面、 $Z=0$ の面に射影したときの Z 軸、 X 軸となす角度であり、つぎのような特定の値を採用。 $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{n}$, $\beta = \tan^{-1} n$ 。以下に、その3次元再構成の原理を説明する。その前に使用する座標系について述べる。

① Fig. 1で、標本化座標系を $\langle X, Y, Z \rangle$ とし、その中の点を (x, y, z) とする。

② Fig. 1で、上面から見た透過線の侵入位置座標

系を $\langle U, V \rangle$ とし、その中の点を (u, v) とする。

この透過線が $Y=0$ の上面への侵入点とボクセルを透過して行き着く投影画像上の読出しの点とは、1対1対応の関係にあるから、投影画像上の読出し座標位置にも (u, v) を使用する。つまり侵入位置座標系の点 (u, v) から侵入する透過線に対して、投影画像上での投影値を $p(u, v)$ とする。

それでは、3次元再構成の原理について説明する。Fig. 1に示すように、 $n \times n$ のボクセルの平面に対して、 n^3 本の平行で等間隔な立体角 (α, β) の透過線を考える。つまり、ボクセル一辺当りにつき X 方向、 Z 方向に各 $\sqrt{n}$ 本の透過線を等間隔で侵入させる。まず、Fig. 1の Z 軸で m と $m+1$ の間にあるその第1行目の侵入点列において透距線を左から右へ順番に観察して、これら $n\sqrt{n}$ 本の透過線に対する $n\sqrt{n}$ 個の投影値を読出すと、未知の $n\sqrt{n}$ 個の標本点での濃度値が逐次的に決定できることを示す。これらの透過線の手前までの透過線によって、透過した各ボクセルに対しそれを取り囲む $3 \times 3 \times 3$ の27個のボクセルのその頂点における64個の標本点濃度値がすべて得られているとする。Fig. 3には右側面から見たときの透過線の通過状況を示しており、ボクセル一辺当り $\sqrt{n}$ 本の透過線が Z 軸に対し α の角度から侵入している。Fig. 4には正面から見たときの通過状況を示しており、ボクセル一辺当り $\sqrt{n}$ 本の透過線が X 軸に対し β の角度から侵入している。したがって右側面図 Fig. 3の真中に Z 軸で m と $m+1$ の間の第1行目の透過線が1本だけ実線で記されているが、これは立面図 Fig. 4における $n\sqrt{n}$ 本の透過線を表わしている。Fig. 4において、これらの $n\sqrt{n}$ 本の透過線を左から右へ順番に観察していくと、Fig. 3と Fig. 4での透過線の位置関係から、1本の透過線が通過するときに Fig. 3と Fig. 4の“○”で示される未知濃度値標本点の1個から影響を受けるというボクセルを1個だけ通ることがわかる。つまり、1本の透過線が通り抜ける一連のボクセルとその各ボクセルを取り囲む27個のボクセルのそれらすべてのボクセルの頂点の中に、ただ1個だけ濃度値のわからない標本点が含まれているということである。ここで、「1本の透過線に対して、投影画像から読出したその投影値は、透過線上の濃度値の線積分した値に等しい」として、問題を定式化できるので、一つの方程式が得られる。このようにして $n\sqrt{n}$ 本の透過線に対して順番に左から右へ方程式を立て計算をすると、各方程式に未知の標本点濃度値が一つだけ含まれるので、“○”の標本点での $n\sqrt{n}$ 個の未知濃度値が逐次的に求められること

Fig. 3 The projection of X-ray observed from right

Fig. 4 The projection of X-ray observed from front

になる。

つぎに上述と同様にしてZ軸で m と $m+1$ の間の第2行目, さらに第3行目, ..., 第 $\sqrt{n}$ 行目へと透過線进行分析すると, Fig. 4の“ Δ ”の標本点での未知濃度値が求められる。1行について $n\sqrt{n}$ 個の未知濃度値が求められ, m と $m+1$ の間には $\sqrt{n}$ 行あるから, n^2 個($=n\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$)の未知濃度値が求められる。つまり, Fig. 1のZ軸で m と $m+1$ の間の侵入位置から侵入する n^2 本($=n \times \sqrt{n}$ 列 $\times \sqrt{n}$ 行)の透過線によって, Fig. 4の“ $\circ$ ”や“ Δ ”の標本点(すなわち $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$ の標本点)での n^2 個の未知濃度値が求められることがわかる。

同様にして, Z軸で -1 から $n-1$ までの n^3 本($=n^2 \cdot n$)の透過線により, n^3 個の未知濃度値が求められる。

しかし, 右側面図 Fig. 3 からわかるように, 求められる標本点の位置が再構成したい領域($1 \leq x, y, z \leq n$)と一致しているわけではないので, $1 \leq z \leq n$ の標本点での未知濃度値が求められるようにする特別な工夫が必要になる。そこで, 考える領域を拡張して, これまでの $n \times n \times n$ の立方体領域から $n \times n \times (n + 2\sqrt{n})$ の直方体領域に広げる。つまりZ軸を $n-1$ より正方向にさらに $\sqrt{n}$ だけ延長し, -1 より負方向に $\sqrt{n}$ だけ延長する。X軸方向やY軸方向には変えない。したがって, 考える領域を $(-(\sqrt{n}+1) \leq z \leq n + \sqrt{n}-1)$ の直方体領域に拡張して考える。Fig. 5の縦縞状部分③には, 初期データとしてあらかじめ“0”を格納しておく。前述の方法で透過線を平行照射すると, 透過線本数が $n\sqrt{n} \cdot (n + \sqrt{n}-1)\sqrt{n}$ 本($=n^3 + n^2(\sqrt{n}-1)$)になり, Fig. 5の太線を包む部分②における $n^3 + n^2(\sqrt{n}-1)$ 個の未知濃度値が求められ再構成がなされる。ただし, ここで再構成したい

Fig. 5 The 3D expansive areas reconstructed

物体が格納される領域においてだけ値が得られればよいので, $1 \leq z \leq n$ の横縞状部分①の標本点においてだけ濃度値を求める。物体が格納されることのない領域の標本点では, 常に濃度値を“0”として扱う。

3. 3次元再構成の手法

3.1 積分影響係数とデータ構造

ここでは, 再構成で, 時間のかかる積分計算を行わずに“積分影響係数”の積和形式で高速に計算する方法を示し, そのデータ構造を導入する。緩やかな3次元濃度分布においては, 前述の(2), (3)式より任意点 (x, y, z) での濃度値がその周囲64個の標本点での濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ から求められる。そこで, 透過線がボクセル内部を通るときに, 透過線分の各点での濃度値の積分値 V を, つぎのようにして求める。ここで, ボクセルへの侵入点を (s_x, s_y, s_z) , 脱出点を (e_x, e_y, e_z) とする。透過線の単位方向ベクトルの成分を k_x, k_y, k_z とし, 侵入点から点 (x, y, z) までの長さを l とし, ボクセル内の線分の長さを L とする。 $0 \leq l$

$\leq L$.

$$L = \sqrt{(s_x - e_x)^2 + (s_y - e_y)^2 + (s_z - e_z)^2},$$

$$x = s_x + k_x \cdot l, \quad y = s_y + k_y \cdot l, \quad z = s_z + k_z \cdot l.$$

このとき,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^L f(x, y, z) dl \\ &= \int_0^L \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 f(x_k, y_j, z_i) \\ &\quad \cdot c(x - x_k) \cdot c(y - y_j) \cdot c(z - z_i) dl \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 f(x_k, y_j, z_i) \\ &\quad \cdot \int_0^L c(x - x_k) \cdot c(y - y_j) \cdot c(z - z_i) dl \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 f(x_k, y_j, z_i) \cdot v_{k,j,i} \quad (4) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} v_{k,j,i} &= \int_0^L c(s_x + k_x \cdot l - x_k) \cdot c(s_y + k_y \cdot l - y_j) \\ &\quad \cdot c(s_z + k_z \cdot l - z_i) dl \quad (5) \end{aligned}$$

上式からわかるように、ボクセル内部の透過線分での濃度値積分 V を求めるために必要な $v_{k,j,i}$ は、そのボクセル周りの64個の標本点での濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ には関係せず、透過線のボクセルへの侵入点位置 (s_x, s_y, s_z) にだけ関係している。これは、透過線がボクセル内部を通るときに、そのボクセル周りの64個の各標本点での濃度値が、透過線分の各点での濃度値の積分にどの程度影響を与えるのかを示す係数である。そこでパラメータ $v_{k,j,i}$ を“積分影響係数”と呼ぶ。これは、(5)式によりあらかじめ計算しておくことができるので、透過線のボクセルへの侵入点位置 (s_k, s_j, s_i) が決まれば、そのボクセル内部での濃度値線積分 V が、そのボクセル周りの64個の各標本点濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ とその対応する積分影響係数 $v_{k,j,i}$ との積の和として高速に算出できることになる。したがって1本の透過線に対して、その通り抜ける $n+1$ 個のボクセルに関する各ボクセルの侵入点位置とそのマクロボクセルの基準点座標とがわかるならば、その投影値を用いて積分計算を含まない積和形式の方程式が一つ立てられることがわかる。

つぎに、透過線のボクセル侵入点位置の種類について検討し、積分影響係数のデータ構造を設定する。1本の透過線がボクセルに侵入する位置の種類は、第1個目のボクセルにおいては Fig. 1 よりわかるように x 方向に $\sqrt{n}$ 個で z 方向に $\sqrt{n}$ 個でありしたがって $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ 個しかない。第2個目のボクセルにおいては、侵入点位置が第1個目の侵入点より $-x$ 方向に

$\Delta x (=1/\tan \beta = 1/n)$, $-z$ 方向に $\Delta z (=1/\tan \alpha = 1/\sqrt{n})$ だけずれている。透過線が直進するので第3個目以降のボクセルにおいても同様である。したがって侵入点位置のすべての種類は $n \cdot \sqrt{n}$ 種類となる。

そこで、透過線分を侵入点位置により種類分けし、これらの各線分種類に対して64個の積分影響係数を取り出すための配列を考える。この配列の添字を線種座標と呼び、(l kind x , l kind z) で表わす。 $1 \leq l$ kind $x \leq n$, $1 \leq l$ kind $z \leq \sqrt{n}$ 。この配列は、サイズが $n \times \sqrt{n}$ でその要素が $4 \times 4 \times 4$ の積分影響係数の配列からなる5次元の影響配列 $MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][k][j][i]$ となる。ここで、 $0 \leq k, j, i \leq 3$ 。この影響配列 MV にあらかじめ積分影響係数を計算し格納しておく。

このようにして、1個のボクセル内部での濃度値線積分 V は、線種座標 (l kind x , l kind z) とマクロボクセルの基準点座標 (x_0, y_0, z_0) がわかれば、影響配列 MV からの積分影響係数 $v_{k,j,i}$ と標本点濃度値 $f(x_k, y_j, z_i)$ との積和形式で計算できる。

1本の透過線に対する最初のボクセルの線種座標 (l kind x , l kind z) とマクロボクセル基準点座標 (x_0, y_0, z_0) とが与えられるならば、以降に通り抜ける各ボクセルの線種座標やマクロボクセル基準点座標を順次ずらすことで求めることができるので、1本の透過線での濃度値線積分が積和形式で計算できる。

3.2 3次元再構成のアルゴリズム

アルゴリズムを示す前に、方程式の形を検討する。

1本の透過線の投影値 $p(u, v)$ は、この透過線が通り抜ける $n+3$ 個の各ボクセルでの濃度値線積分 V の和であるから、つぎの形で表わせる。

$$\begin{aligned} p(u, v) &= V(0) + V(1) + V(2) + \dots + V(l \text{ num} - 1) \\ &\quad + V(l \text{ num}) + V(l \text{ num} + 1) + \dots \\ &\quad + V(n + 2) \end{aligned}$$

ここで $V(l \text{ num})$ は侵入点位置 (u, v) を通る透過線の第 $l \text{ num}$ 個目ボクセルでの濃度値線積分で展開すれば、

$$\begin{aligned} p(u, v) &= V(0) + V(1) + V(2) + \dots + V(l \text{ num} - 1) \\ &\quad + f(x_0, y_0, z_0) \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z] \\ &\quad \cdot [0][0][0] + \dots + f(x_0, y_3, z_3) \\ &\quad \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][0][3][3] \\ &\quad + f(x_1, y_0, z_0) \cdot MV[l \text{ kind } x] \\ &\quad \cdot [l \text{ kind } z][1][0][0] + \dots \\ &\quad + f(x_1, y_3, z_3) \cdot MV[l \text{ kind } x] \\ &\quad \cdot [l \text{ kind } z][1][3][3] + f(x_2, y_0, z_0) \\ &\quad \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][2][0][0] \\ &\quad + \dots + f(x_2, y_3, z_3) \cdot MV[l \text{ kind } x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [l \text{ kind } z][2][3][3] + f(x_3, y_0, z_0) \\
& \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][3][0][0] \\
& + \cdots + f(x_3, y_3, z_3) \cdot MV[l \text{ kind } x] \\
& \cdot [l \text{ kind } z][3][3][3] \\
& + V(l \text{ num} + 1) + \cdots + V(n + 2)
\end{aligned}$$

上式の右辺から唯一の $f(x_3, y_3, z_3) = f(x, y, z)$ に関する項を除いた残りを $V(f(x, y, z))$ と置くと、次式となる。

$$\begin{aligned}
p(u, v) &= V(f(x_3, y_3, z_3)) + f(x_3, y_3, z_3) \\
& \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][3][3][3] \\
& = V(f(x, y, z)) + f(x, y, z) \\
& \cdot MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][3][3][3]
\end{aligned}$$

したがって、

$$f(x, y, z) = \frac{\{p(u, v) - V(f(x, y, z))\}}{MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][3][3][3]}$$

このように $V(f(x, y, z))$ がすでに得られているならば、 $p(u, v)$ が与えられるので、上式により $f(x, y, z)$ の値が簡単に求められる。

なお、再構成の必要でない位置では再構成手続きに入らないようにすれば、計算時間を短縮できる。そこで、透過線の侵入点位置 (u, v) から再構成される標本点座標 (x, y, z) の値を計算して、その z 値により再構成の可否を判定し再構成手続に入るかどうかを決める。

《標本化定理に基づく 3 次元再構成アルゴリズム》

初期データとして Fig. 5 の縦縞状部分 ③を “0” にしておく。読み出した投影値 $p(u, v)$ として、 $p(1, 1)$ から $p((n + \sqrt{n} - 1)\sqrt{n}, n\sqrt{n})$ まだが与えられている。つぎの処理 ①, ②, ③, ④を実行し、逐次的に標本点での濃度値 $f(x, y, z)$ を求める。ただし、記号 $\lceil x \rceil$ は x より小さくない最小の整数とし、 $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数とする。 $u \pmod{n}$ は、 u を n で割った余りとする。for は繰返し文である。説明文を /* と */ で囲んで示す。

For $u=1$ から $(n + \sqrt{n} - 1)\sqrt{n}$ まで

For $v=1$ から $n\sqrt{n}$ まで繰返して終了する。

① 侵入点位置 (u, v) の透過線から再構成される標本点位置 (x, y, z) を位置する。

(1) (u, v) から y を得るための (u', v') を求める。

$$u' = \begin{cases} u \pmod{\sqrt{n}} & u \pmod{\sqrt{n}} \neq 0 \\ \sqrt{n} & u \pmod{\sqrt{n}} = 0 \end{cases}$$

$$v' = \begin{cases} v \pmod{\sqrt{n}} & v \pmod{\sqrt{n}} \neq 0 \\ \sqrt{n} & v \pmod{\sqrt{n}} = 0 \end{cases}$$

(2)

$$y = u' + \sqrt{n}(v' - 1)$$

$$z = (u - y) / \sqrt{n} + 1$$

$$x = \lceil v / \sqrt{n} \rceil$$

求めた z が $z < 1$ または $z > n$ のときには先頭へ戻る。そうでないときには②へ。

② 最初のボクセルに対してマクロボクセル基準点座標 (x_0, y_0, z_0) と線種座標 $(l \text{ kind } x, l \text{ kind } z)$ とを求める。

$$V(f(x, y, z)) = 0$$

/* 投影値変数 $V(f(x, y, z))$ の初期化 */

$$x_0 = \lceil u / \sqrt{n} \rceil - 3$$

$$y_0 = -2$$

$$z_0 = \lceil v / \sqrt{n} \rceil - 3$$

/* 線分 $l \text{ num} = 0$ の基準点座標 (x_0, y_0, z_0) */

$$l \text{ kind } x = \begin{cases} \sqrt{n} v \pmod{n} & \sqrt{n} v \pmod{n} \neq 0 \\ n & \sqrt{n} v \pmod{n} = 0 \end{cases}$$

$$l \text{ kind } z = \begin{cases} u \pmod{\sqrt{n}} & u \pmod{\sqrt{n}} \neq 0 \\ \sqrt{n} & u \pmod{\sqrt{n}} = 0 \end{cases}$$

/* 線分 $l \text{ num} = 0$ の線種座標 $(l \text{ kind } x, l \text{ kind } z)$ */

③ 線分変数 $l \text{ num}$ が 0 から $n + 2$ までの値を順次に取って $n + 3$ 個の濃度値線積分の和を求める。

For $l \text{ num} = 0$ から $l \text{ num} \leq n + 2$ まで

(1) For $k = 0$ から $k \leq 3$ まで

For $j = 0$ から $j \leq 3$ まで

For $i = 0$ から $i \leq 3$ まで

$$V(f(x, y, z)) = V(f(x, y, z))$$

$$+ MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z]$$

$$[k][j][i] \cdot f(x_k, y_j, z_i)$$

/* 線分 $l \text{ num}$ での濃度値線積分を求める処理 */

$l \text{ num} = y - 1$ のとき

$$c = MV[l \text{ kind } x][l \text{ kind } z][3][3][3]$$

(2) $l \text{ kind } x = l \text{ kind } x - 1,$

$$l \text{ kind } z = l \text{ kind } z - 1$$

1) $l \text{ kind } x \neq 0$ かつ $l \text{ kind } z \neq 0$ のとき

$$y_0 = y_0 + 1$$

2) $l \text{ kind } x = 0$ かつ $l \text{ kind } z \neq 0$ のとき

$$l \text{ kind } x = n, \quad x_0 = x_0 - 1, \quad y_0 = y_0 + 1$$

3) $l \text{ kind } x \neq 0$ かつ $l \text{ kind } z = 0$ のとき

$$l \text{ kind } z = \sqrt{n}, \quad y_0 = y_0 + 1, \quad z_0 = z_0 - 1$$

4) $l \text{ kind } x = 0$ かつ $l \text{ kind } z = 0$ のとき

$$l \text{ kind } x = n, \quad l \text{ kind } z = \sqrt{n},$$

$$x_0 = x_0 - 1, \quad y_0 = y_0 + 1, \quad z_0 = z_0 - 1$$

/* つぎの線分 $l \text{ num}$ の線種座標 $(l \text{ kind } x, l \text{ kind } z)$

と基準点座標 (x_0, y_0, z_0) を更新する処理 */

$$④ \quad f(x, y, z) = \{p(u, v) - V(f(x, y, z))\} / c$$

4. 再構成の計算機シミュレーション

上述の再構成アルゴリズムにより2次元投影画像から3次元画像を再構成できるのかどうかを確認するために、計算機シミュレーションを行った。使用計算機としては、SONYのワークステーションNEWS (UNIX, C言語)を用いた。対象としては、 $64 \times 64 \times 64$ の“緩やかな3次元濃度分布”であり、ここでは、中心から緩やかに拡散している濃度分布 $f(r)$ の例を示す。

$$f(r) = \begin{cases} 1 & |r| \leq 1, \\ 30/29 \cdot (1/r - 1/30) & 1 < |r| < 30, \\ 0 & 30 \leq |r|. \end{cases}$$

Photo. 1(a)は元の3次元物体 f_{kji} であり、64枚の内の30枚目と31枚目、32枚目、33枚目、34枚目の断面である。Photo. 1(b)は、(a)に対して立体角度 (α, β) から平行ビームを透過して作成した2次元の投影画像である。Photo. 1(c)は、(b)の投影画像から再構成アルゴリズムを用いて計算した3次元物体像 $(\hat{f}_{kji})$ である。再構成計算の誤差を評価するために、つぎの正規化誤差分散 E_1 と正規化絶対平均誤差 E_2 で数量的に評価する²⁶⁾。

$$\text{ただし } \overline{f_{kji}} = 1/N^3 \left(\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N f_{kji} \right)$$

$$E_1 = \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (f_{kji} - P_{kji})^2 \right. \\ \left. / \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (f_{kji} - \overline{f_{kji}})^2 \right\}^{1/2} \\ = 1.306071 \times 10^{-7}$$

$$E_2 = \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |f_{kji} - P_{kji}| \right. \\ \left. / \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |f_{kji}| \right\} \\ = 5.122755 \times 10^{-8}$$

元の3次元物体とほぼ同様のものを再構成していることがわかった。

5. む す び

3次元標本化定理とBernstein近似を適用できる“緩やかな3次元濃度分布”に対して、透過性のある平行ビームを特定方向から照射して得た2次元投影データより、逐次型の積和計算で3次元再構成する手法を導出した。具体的なデータ構造とアルゴリズムを示し、計算機シミュレーションにより確認した。

(a) Original 3D images

(b) 2D projection Picture of (a)

(c) Reconstructed 3D images from (b)

Photo. 1 Reconstruction simulation of 3D images

本手法は、“緩やかな3次元濃度分布”というモデルを対象にしたものでまだ理論上の段階であるが、

① 投影方向を少数に限定するので、3次元パターン計測の時間を大幅に短縮できる可能性がある。

② 通常再構成処理に膨大な計算量を必要とする積分を用いず、逐次型の積分影響係数を用いた積和計算を行うので、高速化が図れる。

③ 緻密な形状の再構成には向かないが、空間周波数成分の制限されている“緩やかな3次元濃度分布”を大まかに再構成する手法への可能性がある。

この手法を実際の対象物に適用するには多くの問題が残っている。今後、再構成画像の安定性などの点から投影方向をある程度増すことが必要である。また逐次型の計算手法は計算誤差を累積するので、誤差累積を少なくする工夫改良が必要である。

まだ多くの課題が残されているが、さらにモデルを現実的なものに改良することによって、投影方向を少数限定した超高速な再構成によるある特定対象物の3次元パターン計測への一つの可能性が期待される。

参 考 文 献

- 1) 尾上守夫: 医用画像処理, 朝倉書店 (1982)
- 2) 鳥脇純一郎: 最近の医用画像3次元表示の基本手法, ME誌, **24-5**, 293/308 (1986)
- 3) J. Radon: On the Determination of Functions from Their Integrals along Certain Manifolds, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss., **69**, 262/277 (1917)
- 4) J. B. Ra and Z. H. Cho: Generalized True Three-Dimensional Reconstruction Algorithm, Proc. IEEE, **69-5**, 668/670 (1981)
- 5) 井宮, 小川: 円錐ビームによる投影からの画像直接再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J68-D-4**, 523/529 (1985)
- 6) 松尾, 堀場, 岩田, 鈴木: コーンビームX線CTの為にフィルタ補正逆投影法, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J71-D-4**, 714/725 (1988)
- 7) 工藤, 斎藤: ヘリカルスキャンによる円錐ビーム投影からの3次元CT画像再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D-I), **J72-D-II-6**, 954/962 (1989)
- 8) K. R. Kashyap: Picture Reconstruction from Projections, IEEE Trans. Computers, **C-24-9**, 915/923 (1975)
- 9) G. Kowalski: Fast 3-D Scanning Systems Using a Limited Tilting Angle, Appl. Opt., **16-6**, 1686/1690 (1977)
- 10) T. Inouye: Image Reconstruction with Limited Angle Projection Data, IEEE Trans. Nuclear, Science, **NS-26-2**, 2666/2669 (1979)
- 11) 廣田 薫: 単一投影画像から2次元画像を再構成するための並列処理アルゴリズム, 情報理論とその応用研究会資料, **3**, 176/179 (1980)
- 12) 仁木, 神原, 高橋: 少数投影からの画像再構成法について, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J68-D-2**, 201/202 (1985)
- 13) 小林, 山口: 数値計画法による少数投影からの断層像再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J68-D-12**, 2056/2063 (1985)
- 14) 工藤, 斎藤: 投影角制限下における投影からの画像再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J70-D-8**, 1527/1534 (1987)
- 15) 井宮 淳: 単一投影からの3次元画像再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), **J73-D-II-1**, 130/132 (1990)
- 16) 田山, 孫, 太田原: 3次元デジタル物体に対する投影画像からの再構成, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), **J72-D-II-7**, 1095/1102 (1989)
- 17) 田山, 楊: 3次元拡散データの投影からの画像再構成, 計測自動制御学会東北支部研究集会資料, **122-4**, 1/14 (1990)
- 18) J. B. Elsbrock, W. Schroeder and E. Kubalek: Evaluation of Three-Dimensional Micromagnetic Stray-fields by Means of Electron-Beam Tomography, IEEE Trans. Magnetics, **MAG-21-5**, 1593/1595 (1985)
- 19) 草場, 斎藤, 中島, 油田: CT手法による磁界の映像化, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J71-D-2**, 424/429 (1988)
- 20) H. Hertz: Kerr Effect Tomography for Noninvasive Spatially Resolved Measurements of Asymmetric Electric field Distributions, Applied Optics, **25-6**, 914/921 (1986)
- 21) 日野, 松浦, 中島, 油田: 光ETCによるプラズマ計測の試み, 第1回産業画像センシング技術シンポジウム論文集, 377/381 (1985)
- 22) 内山, 竹沢, 阿部, 白, 中島, 油田: 熱線CTの提案, 電子情報通信学会論文誌 (D), **J67-D-9**, 1021/1027 (1984)
- 23) 木村, 小長井, 白山: CT (コンピュータ断層撮影装置)の工業の応用, O. plus. E, **46**, 99/106 (1983)
- 24) たとえば, 尾崎, 谷口, 小川: 画像処理, 共立出版 (1983)
- 25) R. Bernstein: Digital Image Processing of Earth Observation Sensor Data, in Digital Image Processing for Remote Sensing (R. Bernstein ed.), IEEE Press, 55/72 (1978)
- 26) G. T. Herman: Image Reconstruction from Projections, Academic Press (1980)