多変数フィードバック制御系に対する位相余裕の計算法

梶原 宏之*

A Computation Method of Phase Margins for Multivariable Feedback Systems

Hiroyuki KAJIWARA*

J. R. Bar-On, et al. presented a computation method of phase margins for multivariable feedback systems, solving a minimization problem under two constraints by Newton-Rapson technique. This note shows that their repetitive method can be revised to an new algebraic method by reducing the two constraints to only one.

Key Words: phase margin

1. はじめに

文献1)では、多変数フィードバック制御系に対する位相余裕の新しい定義が与えられ、これを二つの制約条件付きの最適化問題の解として Newton-Rapson 法によって求める計算法が示されている。本稿は、この二つの制約条件を一つに減らすことにより、ある固有値問題を經由する位相余裕の計算法を提案することを目的とする。

2. 位相余裕の定義

Fig. 1 に示す安定な多変数フィードバック制御系に対して、環送差比行列 $L(s)=G(s)K(s)$ または $K(s)$ $G(s)$ を考える。 L の極形式分解を

$$L=L_q L_p, \quad L_q \geq 0, \quad L_p: \text{ユニタリ-行列}$$

とすると、位相情報はユニタリ-行列 L_p に含まれると考えられる。そこで、閉ループ系を不安定にするフィードバックパス上のユニタリ-行列の摂動の集

Fig. 1 Multivariable feedback system

* 九州工業大学情報工学部 飯塚市大字川津 680-4

* Faculty of Computer Engineering and Computer Science, Kyushu Institute of Technology, Iizuka
(Received April 8, 1991)

合、すなわち、 $\omega \geq 0$ に対して、集合

$$\mathcal{D} = \{\Delta: \text{ユニタリ-行列} | \det(I_m + L(j\omega)\Delta) = 0\}$$

を定義し、これが空とはならない ω の集合を Ω で表わしておく。 $\omega \in \Omega$ に対して、 $\Delta \in \mathcal{D}$ は

$$\Delta = T \exp(j\theta) T^H \quad (1)$$

ただし

$$T = [t_1 \cdots t_m]: \text{ユニタリ-行列}$$

$$\theta = \text{diag} \{\theta_1, \dots, \theta_m\} (\theta_1, \dots, \theta_m \in (-\pi, \pi])$$

のように表わすことができる。文献1)では、位相余裕を

$$\text{PM} = \min_{\omega \in \Omega} \phi(\omega) \quad (2)$$

ただし

$$\phi(\omega) = \min_{\Delta \in \mathcal{D}} \max_{1 \leq i \leq m} |\theta_i| \quad (3)$$

により定義している。

3. 問題設定

(1)式より、任意の $i=1, \dots, m$ について $t_i^H \Delta t_i = e^{j\theta_i}$ また $t_i^H \Delta^H t_i = e^{-j\theta_i}$ が成り立つことから、 $2 \cos \theta_i = t_i^H (\Delta + \Delta^H) t_i$ 、したがって、 $|\theta_i| \in [0, \pi]$ は

$$|\theta_i| = \cos^{-1} \left(\frac{t_i^H (\Delta + \Delta^H) t_i}{2} \right)$$

となる。ここで、 $\Delta + \Delta^H$ は固有値 $\{2 \cos \theta_i\}$ をもつエルミート行列であり、 $\cos^{-1}$ は単調減少関数なので

$$\max_{1 \leq i \leq m} |\theta_i| = \cos^{-1} \left(\min_{\xi^H \xi = 1} \frac{\xi^H (\Delta + \Delta^H) \xi}{2} \right)$$

のように表わされることに注意すると、(3)式より

$$\phi(\omega) = \cos^{-1} \left(\max_{\Delta \in \mathcal{D}} \min_{\xi^H \xi = 1} \frac{\xi^H (\Delta + \Delta^H) \xi}{2} \right) \quad (4)$$

を得る。さて、 $\Delta \in \mathcal{D}$ ならば

$$(I_m + L\Delta)\xi = 0$$

を満足する $\xi (\xi^H \xi = 1)$ が存在するので、 $x = \Delta \xi$ とおくと、 $\xi = -Lx$ 、したがって

$$\xi^H (\Delta + \Delta^H) \xi = -x^H (L^H + L)x \quad (5)$$

および

$$x^H L^H L x = 1, \quad x^H x = 1 \quad (6)$$

を得る。以上から、(5)式の負号に注意して、二つの

制約条件(6)のもとで、評価関数 $J = x^H(L + L^H)x$ を最小にする問題を解いて、その最小値を

$$J^* = \min_{x^H L^H L x = x^H x = 1} x^H(L + L^H)x \quad (7)$$

とすると、 $\phi(\omega)$ は

$$\phi(\omega) = \cos^{-1} \left(\frac{-J^*}{2} \right) \quad (8)$$

のように与えられる。

4. J^* の計算

複素行列 L の特異値分解を

$$L = U_L \Sigma_L V_L^H$$

ただし

$$\Sigma_L = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_m \} \quad (\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m)$$

U_L : ユニタリー行列, V_L : ユニタリー行列

とする。制約条件(6)は、 $V_L^H L^H L V_L = \Sigma_L^2$ より、 $y = V_L^H x$ とおくと

$$y^H \Sigma_L^2 y = 1, \quad y^H y = 1 \quad (9)$$

となる。これらが満足されるならば

$$\min_{\eta} \frac{\eta^H \Sigma_L^2 \eta}{\eta^H \eta} \leq \frac{y^H \Sigma_L^2 y}{y^H y} \leq \max_{\eta} \frac{\eta^H \Sigma_L^2 \eta}{\eta^H \eta}$$

と特異値の性質から

$$\sigma_m^2 \leq 1 \leq \sigma_1^2 \quad (10)$$

が必要条件として出る。これを満足する ω の集合は、ゲイン・クロスオーバー領域と呼ばれ、 Ω と一致する¹⁾。

さて、評価関数 J は

$$J = y^H V_L^H (L + L^H) V_L y = y^H Q y$$

ただし

$$Q = V_L^H U_L \Sigma_L + \Sigma_L U_L^H V_L$$

と書けるので

$$J^* = \min_{y^H \Sigma_L^2 y = y^H y = 1} y^H Q y \quad (11)$$

となる。制約条件(9)は

$$y^H (\Sigma_L^2 - \sigma_m^2 I_m) y = 1 - \sigma_m^2, \quad y^H y = 1$$

Fig. 2 An example of phase margin for multivariable feedback system

と同値である。これは

$$y = \begin{bmatrix} \vartheta \\ y_m \end{bmatrix} \quad (\vartheta \in \mathbb{C}^{m-1})$$

の分割のもとで

$$\vartheta^H \Sigma_L^2 \vartheta = 1, \quad y_m^H y_m = 1 - \vartheta^H \vartheta$$

ただし

$$\Sigma_L = \{(1 - \sigma_m^2)^{-1} (\text{diag} \{ \sigma_1^2, \dots, \sigma_{m-1}^2 \} - \sigma_m^2 I_{m-1})\}^{1/2}$$

となる。さらに

%Phase Margin for Multivariable System

```
%-----
clear, clc
AG=[0 1 0 0;
    -3 -0.75 1 0.25;
    0 0 0 1;
    4 1 -4 -1];
BG=[0 0;
    0 1;
    0 0;
    0.25 0];
CG=[1 0 0 0;
    0 0 1 0];
DG=zeros(2);
[m,r]=size(DG); n=size(AG)*[1;0];
%-----
w=logspace(-1,1,501); nw=max(size(w));
jw=w*sqrt(-1);
[T,a]=hess(AG); b=T\BG; c=CG*T;
g=[];
for i=1:r
    s=litrfr(a,b(:,i),jw);
    s=c*s+diag(DG(:,i))*ones(m,nw);
    if i==1, g=s; else g=[g;s]; end
end
s=DG;
for k=1:nw
    s(:,k)=g(:,k); sv(:,k)=svd(s);
end
semilogx(w,sv), grid, pause
%-----
xw=w(sv(1,:) > 1 & 1 > sv(m,:));
W=[];
for s=xw
    L=CG/(j*s*eye(n)-AG)*BG;
    [U,S,V]=svd(L);
    Q=V'*U*S+S*U'*V;
    SH=S(1:m-1,1:m-1)^2-S(m,m)^2*eye(m-1);
    SH=(1/(1-S(m,m)^2)*SH)^(0.5);
    [T,R]=eig(SH\Q(1:m-1,1:m-1)/SH);
    [dummy,index]=sort(real(diag(R)));
    z=T(:,index(m-1));
    yH=SH\z; R=real(1-yH'*yH);
    J1=real(yH'*Q(1:m-1,1:m-1)*yH);
    J2=-2*abs(yH'*Q(1:m-1,m))*sqrt(R);
    J3=real(Q(m,m)*R);
    J=J1+J2+J3;
    W=[W J];
end
W=acos(-W/2)*180/pi;
PM=min(W)
plot(xw,W), grid, xlabel(' [rad/sec] '),
ylabel(' [deg] '), pause
%-----
eof
```

Fig. 3 M-file for Fig. 2

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{q} \\ \hat{q}^H & q_{mm} \end{bmatrix} (\hat{Q} \in \mathbf{C}^{m-1 \times m-1}, \hat{q} \in \mathbf{C}^{m-1})$$

の分割のもとで, (11)式は

$$J^* = J_1^* + J_2^* \quad (12)$$

ただし

$$J_1^* = \min_{\hat{q}^H \hat{\Sigma}_L^{-1} \hat{q} = 1} \hat{q}^H \hat{Q} \hat{q} = \min_{z^H z = 1} z^H (\hat{\Sigma}_L^{-1} \hat{Q} \hat{\Sigma}_L^{-1}) z \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_2^* &= \min_{y_m^H y_m = 1 - \hat{q}^H \hat{q}} (\hat{q}^H \hat{q} y_m + y_m^H \hat{q}^H \hat{q} + y_m^H q_{mm} y_m) \\ &= \min_{y_m^H y_m = 1 - \hat{q}^H \hat{q}} 2 \operatorname{Re}(\hat{q}^H \hat{q} y_m) + q_{mm}(1 - \hat{q}^H \hat{q}) \\ &= -2|\hat{q}^H \hat{q}| \sqrt{1 - \hat{q}^H \hat{q}} + q_{mm}(1 - \hat{q}^H \hat{q}) \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ここで, J_1^* は $\hat{\Sigma}_L^{-1} \hat{Q} \hat{\Sigma}_L^{-1}$ の最小固有値として求められ, J_2^* における $\hat{q}$ は, それに対応する固有ベクトルを $z \in \mathbf{C}^{m-1}$ とするとき

$$\hat{q} = \hat{\Sigma}_L^{-1} z \quad (15)$$

を用いればよい。

5. 例

文献1)の例について, 前節の計算法を適用してみると **Fig. 2** を得た。その結果, 位相余裕は 15.5(deg) であり, 文献1)の結果 15.4(deg) とほぼ一致している。その際使用したプログラムを **Fig. 3** に, MATLAB の M ファイルで示す。

6. 終わりに

(2)式の最適化は, 適当な最小値探索法を用いて行えば, メッシュ法より高精度の計算が行えよう。また多変数系ゲイン余裕の計算についても検討中である。

参考文献

- 1) J. R. Bar-On and E. A. Jonckheere: Phase Margins for Multivariable Control Systems, Int. J. Control, 52-2, 485/498 (1990)