H^∞ 制御系における外乱推定の役割†

川谷 亮 治*・藤井 隆 雄**・木村 英 紀*

On the Role of Disturbance Estimation in H^∞ Control Systems

Ryoji KAWATANI*, Takao FUJII** and Hidenori KIMURA*

In this paper, the physical structure of the H^∞ controllers (especially, the central controller) for the so-called four block and one block standard problems, which have been derived by the Conjugation method, is investigated based on the differential game theory. As the results of that, it makes clear that H^∞ controller has not only the mechanism of full state observer, but also that of reasonable disturbance estimator. The former is well-known fact, but the latter is an important structure to understand H^∞ controllers. The disturbance estimated in the controller is used to diminish the effect of exogenous input on the controlled output. Furthermore, from the view of this feedforward structure, the essential difference between four block and one block problem also makes clear.

Key Words: H^∞ control, disturbance estimation, state observers, feedforward control, differential games

1. はじめに

Zames¹⁾によって提案された H^∞ 制御に対して、多くの研究者の努力が実を結び、2本の Riccati 方程式の解を利用して、 H^∞ 制御問題の解の存在条件ならびに制御器の Parametrization が得られることが明らかになった^{2), 3)}。最適レギュレータのもつ本質的な問題を克服することから出発した H^∞ 制御も、その解が最適レギュレータを設計するときと同数の Riccati 方程式の解から求めることができるという結果となった

のは非常に興味深い。

また、このようにして得られた H^∞ 制御器のもつ物理構造や従来の制御器との関係についての検討も行われており、文献4)において、標準プロセスの直達項に制約を設けた上で、“最悪外乱”に基づく全状態観測器の構造が示され、ある極限として LQG レギュレータを含むことも同時に示された。また、文献4), 5)では、 H^∞ 制御と線形2次微分ゲーム理論との密接な関係が示されている。

ところで、文献4)では、前述の制約が H^∞ 制御器の本質を見失わないと主張しているが、実は、この制約のもとでは H^∞ 制御器のもつ重要な側面が見落とされることになる。本論文の目的は、このような制約を設けずに構造解析を行うことで、 H^∞ 制御器のより本質的な構造を明らかにすることにある。なお、本論文では、『共役化』の概念に基づいて導出された解法³⁾により得られた H^∞ 制御器の解析を行う。

本文中で使用する記号は以下のとおりである。

R^n : n 次元実数ベクトルの集合

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{\omega} \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

$\sigma_{\max}$: 行列の最大特異値

$$\begin{bmatrix} A & B \\ \vdots & \vdots \\ C & D \end{bmatrix} := D + C(sI - A)^{-1}B$$

2. H^∞ 制御問題

Fig. 1 に示す H^∞ 標準制御系を考える。ここで、

Fig. 1 The standard H^∞ control system

† 第19回制御理論シンポジウムで発表 (1990・5)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

** 九州工業大学情報工学部 飯塚市大字川津 680-4

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita

** Faculty of Computer Science and Systems Engineering, Kyusyu Institute of Technology, Iizuka

(Received January 14, 1991)

(Revised May 10, 1991)

図中の標準プロセス $G(s)$ に対する状態空間実現が次式で与えられているものとする。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned}\quad (2.1)$$

(2.1) 式中、各ベクトルの次元はつぎのとおりである。

状態量: $x \in R^n$, 外部入力: $w \in R^r$,

操作量: $u \in R^p$, 制御量: $z \in R^m$, 観測量: $y \in R^q$

さらに、(2.1) 式で表わされるプロセスはつぎの仮定を満足するものとする。

(A 1) (A, B_2, C_2) は可安定、可検出、

(A 2) $m > p, r > q$,

(A 3) D_{12}, D_{21} はそれぞれフル列ランク、フル行ランクをもつ。

$$\begin{aligned}\text{rank}[C_1 \ D_{11} \ D_{12}] &= m, \\ \text{rank}[B_1^T \ D_{11}^T \ D_{12}^T]^T &= r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= n + p, \\ \text{rank}\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} &= n + q, \quad \forall \omega\end{aligned}\quad (A5)$$

外部入力 w から制御量 z までの閉ループ伝達関数 $\Phi(s)$ は、制御器を $u = K(s)y$ とすると

$$\Phi(s) = G_{11} + G_{12}K(1 - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (2.2)$$

ここで、 $G_{ij} := D_{ij} + C_i(sI - A)^{-1}B_j$

で与えられる。

Fig. 1 の標準制御系に対して、 H^∞ 制御問題はつぎのように定義される。

H^∞ 制御問題

(1) 閉ループ系を内部安定にし、

(2) ノルム条件

$$\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma^2 \quad (2.3)$$

を満足する制御器が存在するための条件を示し、もし存在する場合には、そのような制御器をすべて見つけよ。

なお、1 章で述べた文献 4) における制約の一部は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}(B1) \quad D_{11} &= 0 \\ (B2) \quad D_{12}^T C_1 &= 0 \\ (B3) \quad B_1^T D_{21} &= 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

3. H^∞ 制御器の状態空間実現

最初に、文献 3) において導出された 4 ブロック問題に対する解 (H^∞ 制御器) を求めるアルゴリズムを示す。

設計アルゴリズム

Step 0.

$$\begin{aligned}D_{1i} &:= I_m - D_{11}D_{11}^T/\gamma^2, \\ D_{i1} &:= I_r - D_{11}^T D_{11}/\gamma^4\end{aligned}\quad (3.1)$$

Step 1. つぎの方程式を満足する $D_{12}^\dagger, D_{12}^\ddagger, D_{21}^\dagger, D_{21}^\ddagger$ を求める。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \gamma D_{12}^\dagger \\ D_{12}^\ddagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}/\gamma & D_{1i}(D_{12}^\dagger)^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{m-p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_{21}/\gamma \\ (D_{21}^\dagger)^T D_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma D_{21}^\ddagger & D_{21}^\ddagger \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{r-q} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Step 2. つぎの Riccati 方程式に対して $\bar{A}_a$ を安定にする解を求める。

$$\begin{aligned}-A_a X_a - X_a A_a^T - (B_1 D_{11}^T/\gamma^2 + X_a C_1^T)(D_{12}^\dagger)^T \\ \cdot D_{12}^\dagger (B_1 D_{11}^T/\gamma^2 + X_a C_1^T)^T/\gamma^2 + P_a = 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned}A_a &:= A - B_2 D_{12}^\dagger C_1 \\ P_a &:= \gamma^2 B_2 D_{12}^\dagger (B_2 D_{12}^\dagger)^T \\ &\quad - (B_1 - B_2 D_{12}^\dagger D_{11})(B_1 - B_2 D_{12}^\dagger D_{11})^T/\gamma^2 \\ \bar{A}_a &:= -A_a - (B_1 D_{11}^T/\gamma^2 + X_a C_1^T)(D_{12}^\dagger)^T D_{12}^\dagger C_1/\gamma^2\end{aligned}$$

この解を利用してつぎの計算を行う。

$$\begin{aligned}K_a &:= -(B_1 D_{11}^T/\gamma^2 + X_a C_1^T)(D_{12}^\dagger)^T \\ L_a &:= K_a D_{12}^\dagger/\gamma^2 + B_2 D_{12}^\dagger \\ M_a &:= L_a D_{11} - B_1\end{aligned}$$

Step 3. つぎの Riccati 方程式に対して $\bar{A}_b$ を安定にする解を求める。

$$\begin{aligned}-X_b A_b - A_b^T X_b - (C_1^T D_{11}/\gamma^2 + X_b B_1) D_{21}^\dagger \\ \cdot (D_{21}^\dagger)^T (C_1^T D_{11}/\gamma^2 + X_b B_1)^T/\gamma^2 + P_b = 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned}A_b &:= A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 \\ P_b &:= \gamma^2 (D_{21}^\dagger C_2)^T D_{21}^\dagger C_2 \\ &\quad - (C_1 - D_{11} D_{21}^\dagger C_2)^T (C_1 - D_{11} D_{21}^\dagger C_2)/\gamma^2 \\ \bar{A}_b &:= -A_b - B_1 D_{21}^\dagger (D_{21}^\dagger)^T (D_{11} C_1/\gamma^2 + B_1^T X_b)/\gamma^2\end{aligned}$$

この解を利用してつぎの計算を行う。

$$\begin{aligned}K_b &:= -(D_{21}^\dagger)^T (D_{11} C_1/\gamma^2 + B_1^T X_b) \\ L_b^T &:= D_{21}^\dagger X_b/\gamma^2 + D_{21}^\dagger C_2 \\ M_b^T &:= D_{11} L_b^T - C_1\end{aligned}$$

Step 4. (H^∞ 制御器の存在条件)

つぎの行列の正定性を調べる。

$$P_0 := \begin{bmatrix} X_a & I_n \\ I_n & X_b \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

もし正定であれば、解が存在し、Step 5 へ。

そうでなければ、 γ を大きくして Step 1 へ。

Step 5.

$$D_{co} := \begin{bmatrix} \gamma (D_{12}^\dagger)^T & D_{11} D_{21}^\dagger/\gamma \\ (D_{12}^\dagger D_{11})^T/\gamma & \gamma D_{21}^\dagger \end{bmatrix} W \quad (3.6)$$

ここで、 W は

$$D_{co}^T \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_r \end{bmatrix} D_{co} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

を満足するように選ぶ。

Step 6. このとき, (2.3)式を満足する H^∞ 制御器のすべては次式で与えられる.

$$K(s) = (z_{11}S + z_{12})(z_{21}S + z_{22})^{-1}, \quad \|S(s)\|_\infty < \gamma^2 \quad (3.7)$$

ここで,

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z & B_{z1} & B_{z2} \\ \hline C_{z1} & D_{z11} & D_{z12} \\ C_{z2} & D_{z21} & D_{z22} \end{bmatrix}$$

$$A_z = -(A - L_a C_1)^T$$

$$[B_{z1} \ B_{z2}] = -[I_n \ 0]P_0^{-1}LM(\gamma)D_{eo}$$

$$\begin{bmatrix} C_{z1} \\ C_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12}^T(C_1 X_a + \gamma^2 L_a^T - D_{11} M_a^T / \gamma^2) \\ C_1 X_a - D_{21} M_a^T / \gamma^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_{z11} & D_{z12} \\ D_{z21} & D_{z22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 D_{12}^T D_{11} (D_{12}^T)^T & 0 \\ D_{21} D_{11}^T (D_{12}^T)^T / \gamma^2 & I_q \end{bmatrix} W$$

$$LM(\gamma) := \begin{bmatrix} -L_a \gamma & M_a \gamma \\ -M_b / \gamma & L_b \gamma \end{bmatrix}$$

(3.7)式で与えられる H^∞ 制御器の状態空間表現に対してつぎの定理が成り立つ.

《定理 1》 (3.7)式で示される H^∞ 制御器は, 自由パラメータ $S(s)$ に対する入出力をそれぞれ u_s , y_s とするとき, つぎの状態空間表現をもつ.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A x_k + B_1 \bar{w}_k + B_2 u + [0 \ I_n] P_0^{-1} LM(\gamma) DS \\ u &= D_{12}^+ x_k - (C_1 x_k + D_{11} \bar{w}_k) + [\gamma I_m \ 0] DS \\ [0 \ D_{21} / \gamma] DS &= y - C_2 x_k - D_{21} \hat{w}_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで,

$$\hat{w}_k := -M_a^T X_a^{-1} x_k / \gamma^2 \quad (3.9)$$

$$\bar{w}_k := \hat{w}_k + [0 \ I_r / \gamma] DS \quad (3.10)$$

$$F_\infty := -\gamma^2 L_a^T X_a^{-1} \quad (3.11)$$

$$DS := D_{eo} [y_s^T \ u_s^T]^T \quad (3.12)$$

(証明) 簡単な代数演算から得られる. ■

ところで, 自由パラメータ $S(s)$ を 0, すなわち $y_s = 0$ としたときの解を特に central solution (CS) と呼ぶが, (3.8)式の CS ($= z_{12} z_{22}^{-1}$) は, つぎの正定条件のもとで系 1 で与えられる.

$$(A6) \quad D_{1r} > 0, \quad D_{11} > 0 \quad (3.13)$$

[系 1] 仮定 (A6) が成り立つとき, CS は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A x_k + B_1 \bar{w}_k + B_2 u + L_\infty D_{21}^+ \\ &\quad \cdot (y - C_2 x_k - D_{21} \hat{w}_k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$u = D_{12}^+ (F_\infty x_k - (C_1 x_k + D_{11} \bar{w}_k))$$

ここで,

$$\bar{w}_k = D_{21}^+ (y - C_2 x_k) + (I - D_{21}^+ D_{21}) \hat{w}_k \quad (3.15)$$

$$L_\infty = (X_b - X_a^{-1})^{-1} (L_b \gamma^2 - M_b D_{11} / \gamma^2 + X_a^{-1} B_1) \quad (3.16)$$

(証明) (3.13)式が成り立つ場合, (3.6)式の D_{eo}

は次式で与えられる.

$$D_{eo} = \begin{bmatrix} \gamma (D_{12}^+)^T W_{11} & D_{11} D_{21}^+ W_{22} / \gamma \\ (D_{12}^+ D_{11})^T W_{11} / \gamma & \gamma D_{21}^+ W_{22} \end{bmatrix}$$

ここで, W_{11} , W_{22} は, つぎの方程式の解である.

$$\begin{aligned} \gamma^2 W_{11}^T D_{12}^+ D_{11} (D_{12}^+)^T W_{11} &= I_p \\ \gamma^2 W_{22}^T (D_{21}^+)^T D_{11} D_{21}^+ W_{22} &= I_q \end{aligned} \quad (3.17)$$

これより, (3.2), (3.8)式から,

$$W_{22} u_s = y - C_2 x_k - D_{21} \hat{w}_k$$

が得られ, (3.12)式を用いて

$$DS = \begin{bmatrix} D_{11} / \gamma \\ \gamma I_r \end{bmatrix} D_{21}^+ (y - C_2 x_k - D_{21} \hat{w}_k)$$

が導かれる.

以上の結果を定理 1 の各式に適用することで, (3.14)~(3.16)式が導出できる. ■

(注意) (3.14)式を導く過程で (3.17)式の解を必要としたが, (3.14)式を計算する際には, それらの解は不要となる.

次章では, (3.9), (3.11), (3.14)~(3.16)式のもつ物理的な意味を明確にする.

4. 構造解析

本章では, 仮定 (A1)~(A6)のもとで導かれた H^∞ 制御器 (3.14)式に対する構造解析を行う. なお, 以下の解析において, H^∞ 制御器の存在性を保証するために仮定 (A7), また一般性を失うことなく仮定 (A8)を設ける.

(A7) H^∞ 制御器は存在する. ($P_0 > 0$)

(A8) ノルム制限値 γ を 1 に正規化する.

ここで, 仮定 (A7)は, 設計アルゴリズム中の Riccati 方程式の解に対して,

$$X_a > 0, X_b > 0, X_{ba} (:= X_b - X_a^{-1}) > 0 \quad (4.1)$$

が成り立つことを意味している.

4.1 状態量がすべて観測できる場合の線形

2 次ゲーム理論の解

本節では, 仮定 (A1)~(A6)の各前半部が成り立つとする.

(2.1)式のプロセスに対して, 定義式 (3.11)と前述の補題を利用して状態量の初期値ならびに最終値を 0 とすることで, つぎの補題を示すことができる.

[補題 1]

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T z - w^T w) dt \\ &= \|D_{12} u - F_\infty x + C_1 x + D_{11} w\|_2^2 - \|w - \hat{w}\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで,

$$\hat{w} := -M_a^T X_a^{-1} x \quad (4.3)$$

$$\|x\|_2^2 := \int_0^\infty x^T x dt$$

である。

(証明)

$$\begin{aligned} d(x^T X_a x)/dt &= (C_1 x + D_{11} \bar{w} + D_{12} u - F_\infty x)^T \\ &\quad \cdot (C_1 x + D_{11} \bar{w} + D_{12} u - F_\infty x) \\ &\quad - (w - \hat{w})^T (w - \hat{w}) - z^T z + w^T w \end{aligned}$$

したがって、上式の両辺を積分することで(4.2)式が得られる。■

(4.2)式は、線形2次微分ゲーム理論において用いられる評価関数であり、つぎの鞍点条件を満足する解\$(u^*, w^*)\$が存在するとき、それぞれを最適操作量、最悪外乱と呼ぶ。

$$J(w, u^*) \leq J(w^*, u^*) \leq J(w^*, u) \quad (4.4)$$

今、状態量がすべて観測できるとして、(4.2)式に対してつぎの\$w^*\$、\$u^*\$の候補を考える。

$$\begin{aligned} u^* &= D_{12}^+ (F_\infty x - C_1 x - D_{11} \bar{w}_u) \\ w^* &= \hat{w} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで、\$\bar{w}_u\$は外乱の推定値を意味しており、

$$w = \hat{w} \text{ のとき } \bar{w}_u = \hat{w}$$

となるように選ぶとする。(4.5)式を(4.2)式に代入し、付録の補題2を利用すると

$$\begin{aligned} J(w^*, u^*) &= \|D_{12} D_{12}^+ (F_\infty x - C_1 x - D_{11} \hat{w}) \\ &\quad - F_\infty x + C_1 x + D_{11} \hat{w}\|_2^2 \\ &= \|D_{11} (D_{12}^+)^T D_{12} (-L_a^T X_a^{-1} \\ &\quad - C_1 + D_{11} M_a^T X_a^{-1}) x\|_2^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

一方、(4.2)式から任意の操作量に対して、\$J(w^*, u) \ge 0\$であるため、鞍点条件(4.4)式の右側の不等式が成り立つ。つぎに、鞍点条件の左側の不等式が成り立つ、すなわち\$J(w, u^*)\$が負となるための条件を求めると、

$$\begin{aligned} D_{12} u^* - F_\infty x + C_1 x + D_{11} w \\ = D_{11} (w - \hat{w}) - D_{12} D_{12}^+ D_{11} (\bar{w}_u - \hat{w}) \end{aligned}$$

が成り立つことから、

$$\|w - \hat{w}\|_2^2 \geq \|D_{11} (w - \hat{w}) - D_{12} D_{12}^+ D_{11} (\bar{w}_u - \hat{w})\|_2^2 \quad (4.6)$$

を満足すればよい。このことは、前述の外乱推定値として

$$\bar{w}_u = \hat{w} \quad (4.7)$$

と選ぶばよいことを示している。以上から、つぎの定理が成り立つ。

《定理2》 状態量がすべて観測できる場合、(4.4)式の鞍点条件を満足する解の一つが次式で与えられる。

$$u^* = D_{12}^+ (F_\infty x - C_1 x - D_{11} \hat{w})$$

$$= -D_{12}^+ (L_a^T X_a^{-1} + C_1 - D_{11} M_a^T X_a^{-1}) x \quad (4.8)$$

$$w^* = \hat{w}$$

ところで、(4.8)式の\$u^*\$を操作量として選ぶことにより、(4.2)式の評価関数を負にすることができる。このことは、制御量をもつエネルギーが常に外部入力のもつエネルギーより小さい、すなわち閉ループ伝達関数\$\Phi(s)\$に対するノルム条件が満たされることを意味している。また、閉ループ系の安定性は、状態フィードバックゲイン\$F_\infty\$により満足されることが、付録の関係式から示される。したがって、(4.8)式の制御器が、状態量をすべて観測できる場合の\$H^\infty\$制御器の一つであるといえる。

なお、制約(B1)のもとで状態量がすべて観測できる場合の\$H^\infty\$制御問題の解が与えられているが⁶⁾、そのCSは、上式で\$D_{11}=0\$としたものと一致する。

以上より

(1) (4.3)式の\$\hat{w}\$は、プロセスにとって(4.2)式の評価を最大にするという意味で最悪外乱である。

(2) (4.8)式から、最適操作量\$u^*\$が制御量\$z\$上の外乱項\$C_1 x + D_{11} w\$の一部(行列\$D_{12}\$が縦長であるため)を打ち消すフィードフォワード構造をもつ。

(3) \$F_\infty\$は、安定性を保証するフィードバックゲインである。

ことがわかる。

ここで、前述の制約(B1)ならびに(B2)について考えると、(B1)は、制御量に外乱が直接影響しないことを意味しており、(B2)は、\$\text{Im}(D_{12})\$と\$\text{Im}(C_1)\$が直交していることを意味している。これらは、いずれも上述のフィードフォワード構造(2)を不要とする仮定である。

4.2 出力フィードバック

前節で得られた最適操作量と系1における\$H^\infty\$制御器の操作量とを比較すると、プロセスの状態量が制御器の状態量で置きかえられた構造をもつことがわかる。(2.1)式のプロセスに対して、制御器は外部入力により乱された出力のみが利用できる情報であるため、\$H^\infty\$制御器のもつ動的な部分で状態推定を行い、その推定値を利用してノルム条件を満たす安定化制御器を実現していると考えられる。

このときの推定誤差(\$e := x - x_k\$)について検討するために、誤差方程式を導出する。(2.1)式、(3.14)式から次式が得られる。

$$\dot{e} = A_e e - L_\infty (w - \hat{w}) \quad (4.9)$$

ここで、

$$A_e := A - B_1 L_b^T - L_\infty (L_b^T - M_a^T X_a^{-1})$$

上式における\$A_e\$の安定性は、つぎのリアプノフ方程

式において, X_{ba} が正定 ((4.1)式) であることから示すことができる.

$$\begin{aligned} X_{ba}A_e + A_eX_{ba} \\ = -(L_b - X_a^{-1}M_a)D_{11}(L_b - X_a^{-1}M_a)^T \\ - (M_b - X_a^{-1}L_a - (L_b - X_b^{-1}M_b)D_{11}^T) \\ \cdot (M_b - X_a^{-1}L_a - (L_b - X_b^{-1}M_b)D_{11}^T)^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

つぎに, 線形 2 次ゲーム理論の立場から (3.14) 式の H^∞ 制御器を考える.

(4.9) 式の誤差方程式は外乱による強制力項を含んでいるが, 最悪外乱が入った場合には, 強制力項がなくなるので状態推定が可能となる. この場合, $x = x_k$ であることから前節の結果より

$$J(w^*, u^*) = 0$$

を示すことができる. また, 同様に (4.7) 式の鞍点条件の右側の不等式も成り立つことを示すことができる.

つぎに, 鞍点条件の左側の不等式について検討する. この場合, 最適操作量に対して一般の外乱が入る場合を対象としているため, (4.9) 式より, 状態量の推定には必ず誤差が伴うことがわかる. ところが, H^∞ 制御器は, もともとノルム条件を満足するように設計されているので, この不等式は成り立つはずである.

(3.14) 式の操作量を最適操作量 u^* とすると, つぎの関係式を示すことができる.

$$\begin{aligned} (D_{12}u^* - F_\infty x + C_1x + D_{11}w)^T \\ \cdot (D_{12}u^* - F_\infty x + C_1x + D_{11}w) \\ - (w - \hat{w})^T(w - \hat{w}) \\ = -\frac{d}{dt}(e^T X_{ba}e) - ((L_b - X_a^{-1}M_a)^T e \\ + (w - \hat{w}))^T D_{11}((L_b - X_a^{-1}M_a)^T e \\ + (w - \hat{w}))^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

誤差 e の初期値ならびに最終値を 0 として (4.11) 式の両辺を積分すると,

$$\begin{aligned} \|D_{12}u^* - F_\infty x + C_1x + D_{11}w\|_2^2 - \|w - \hat{w}\|_2^2 \\ = -\int_0^\infty ((L_b - X_a^{-1}M_a)^T e + (w - \hat{w}))^T D_{11} \\ \cdot ((L_b - X_a^{-1}M_a)^T e + (w - \hat{w}))^T dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

が得られ, 不等式が成り立つことがわかる.

以上から, 出力フィードバック問題でも $\hat{w}$ は最悪外乱であり, (3.14) 式が最適操作量であることがいえる.

ところで, 通常の状態観測器では, (4.9) 式に対応した誤差方程式は, 外部入力の影響をまったく受けない構造をもつため, 仮定 (A1) が成り立てば必ず安定

化制御器を設計することができた. つまり, フィードバックゲインとオブザーバゲインは, 安定条件だけが課されるのみで, それぞれは独立に選ぶことができた. 一方, H^∞ 制御の場合, 状態量の推定誤差が存在するという前提のもとでノルム条件を満足する制御器を設計しなければならない. そのため, これらのゲインに対して安定性だけでは不十分で, ある関係が必要となる. これが (3.16) 式のオブザーバゲイン中で用いられている X_{ba} に対する正定条件であり, (3.5) 式の正定 (可解性) 条件に反映されている.

最後に, (3.9) 式と (3.15) 式の意味を考える.

前者は, 最悪外乱において用いられるプロセスの状態量を推定値で置き換えたものであり, 最悪外乱の推定値と考えてよい.

つぎに, 後者であるが, その意味を考えやすくするために, D_{21} が次式のようにスケーリングされているとする.

$$D_{21} = [I_q \ 0] \quad (4.13)$$

このとき簡単な式変形により次式が得られる.

$$\bar{w}_k = \begin{bmatrix} y - C_2 x_k \\ \hat{w}_k \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

これより, $\bar{w}_k$ は, 観測量から得られる外乱情報を用いる限り有効に利用し, D_{21} を通ることで消えてしまった情報に関しては, それを最悪外乱推定値で補う構造をもっており, プロセスに加わる外乱を合理的に推定していることがわかる.

ところで, (3.15) 式において, 制約 (B1) ならびに (B3) が成り立つとすると

$$\bar{w}_k = \hat{w}_k \quad (4.15)$$

であることを簡単に示せる. つまり, H^∞ 制御器は, 本来, 外乱の影響を受けた観測量を有効に利用して, 外乱を積極的に推定する構造をもっている ((4.14) 式) が, 文献 4) における制約のもとでは, このような構造が制御器には現れないことになる.

以上をまとめると

(1) H^∞ 制御器は, 全状態観測器の構造をもち, 最悪外乱入力時に, 状態量が推定可能となる. また, それ以外の外乱に対しては推定誤差が残るが, その場合でも, 安定性ならびにノルム条件を満足するように構成されている.

(2) そのために, H^∞ 制御器は, 観測量上の外乱情報をできるだけ有効に利用した外乱推定機構を内部にもつ.

本章では, CS の構造についての検討を行ったが, 仮定 (A6) のもとで自由パラメータへの入力 u_s が次式で与えられることを示すことができる.

$$u_s = W_{22}^{-1} D_{21} (\bar{w}_k - \hat{w}_k) \quad (4.16)$$

このことは、外部入力として \$\bar{w}\$ が入った場合、自由パラメータへの入力が 0 となることを意味する。

5. 1 ブロック問題に対する \$H^\infty\$ 制御器の構造

1 ブロック問題では、\$D_{12}\$ と \$D_{21}\$ の逆が存在する。ここでは、

(A9) \$A - B_2 D_{12}^{-1} C_1\$, \$A - B_1 D_{21}^{-1} C_2\$ が反安定であると仮定する。この仮定のもとでは、\$D_{12}^\dagger = D_{12}^{-1}\$, \$D_{21}^\dagger = D_{21}^{-1}\$, \$D_{12}^\dagger = 0\$, \$D_{21}^\dagger = 0\$ とおくことで、3 章で述べたアルゴリズムを適用することができる。簡単な式の変形から、つぎの系を示すことができる。

[系 2] 仮定 (A9) のもとで、(3.14) 式の CS は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A x_k + B_1 \bar{w}_k + B_2 u + L_\infty (\bar{w}_k - \hat{w}_k) \\ u &= D_{12}^{-1} (F_\infty x_k - (C_1 x_k + D_{11} \bar{w}_k)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、

$$\bar{w}_k = D_{21}^{-1} (y - C_2 x_k) \quad (5.2) \blacksquare$$

系 1 と系 2 の比較により、1 ブロック問題の CS は、\$D_{12}^\dagger\$ が存在するので、(1) 制御量 \$z\$ 上の外乱項のすべてに操作量の効果を及ぼすことができる ((5.1) 式)、そして、\$D_{21}^\dagger\$ が存在することから、(2) 観測量から外乱情報をもれなく知ることができる ((5.2) 式)。これらが 4 ブロック問題との大きな相違点となる。

6. 結 論

本論文では、\$H^\infty\$ 制御問題の解 (特にここでは CS) に対してそのもつ物理構造の解析を行った。その結果、\$H^\infty\$ 制御器は、全状態観測器の構造をもち、プロセスの状態量を推定するとともにその内部に外乱推定機構をもち積極的に外乱を推定していることが明らかになった。そして、それらをフィードバック制御ならびにフィードフォワード制御のために有効に利用することで、プロセスの安定化とノルム条件を同時に実現していることが明らかとなった。また、以上の \$H^\infty\$ 制

御器のもつ構造の一部は、制約 (B1) ~ (B3) のもとでは現れてこないことも示した。

参 考 文 献

- 1) G. Zames: Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms and Approximate Inverses, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26-2**, 585/601 (1981)
- 2) K. Glover and J. C. Doyle: State-Space Formulae for Stabilizing Controllers that Satisfy a \$H^\infty\$ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems and Control Letters, **11-3**, 167/172 (1988)
- 3) H. Kimura, Y. Lu and R. Kawatani: On the Structure of \$H^\infty\$ Control Systems and Related Extension, IEEE Trans., **AC-36-8**, 653/667 (1991)
- 4) J. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. Francis: State-Space Solutions to Standard \$H_2\$ and \$H^\infty\$ Control Problems, IEEE Trans., **AC-34-8**, 831/847 (1989)
- 5) K. Uchida and M. Fujita: On the Central Controller: Characterizations via Differential Games and LEQG Control Problems, Systems and Control Letters, **13-1**, 9/13 (1989)
- 6) K. Z. Liu, T. Mita and R. Kawatani: Parametrization of \$H^\infty\$ State Feedback Control Solutions, Int. J. Control, **51-3**, 535/551 (1990)

《付 録》

いずれも簡単な代数計算で導出できるので証明は省略する。

[補題 2]

$$D_{12}^\dagger (D_{11} M_a^T X_a^{-1} - L_a X_a^{-1} - C_1) = 0 \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} B_2 D_{12}^\dagger (D_{11} M_a^T X_a^{-1} - L_a^T X_a^{-1} - C_1) \\ = -L_a C_1 - L_a L_a^T X_a^{-1} + M_a M_a^T X_a^{-1} + B_1 M_a^T X_a^{-1} \end{aligned} \quad (A.2) \blacksquare$$

[補題 3] (Riccati 方程式 ((3.3), (3.4) 式) の変形)

$$\begin{aligned} (A - L_a C_1) X_a + X_a (A - L_a C_1)^T &= L_a L_a^T - M_a M_a^T \\ X_b (A - B_1 L_b^T) + (A - B_1 L_b^T)^T X_b &= L_b L_b^T - M_b M_b^T \\ X_{ba} (A - B_1 L_b^T) + (A - B_1 L_b^T)^T X_{ba} \\ &= (L_b - X_a^{-1} M_a) (L_b - X_a^{-1} M_a)^T \\ &\quad - (M_b - X_a^{-1} L_a) (M_b - X_a^{-1} L_a)^T \end{aligned} \quad (A.3) \blacksquare$$