大型宇宙構造物の姿勢制御実験[†]

—LQR のループ成形機能によるロバスト安定化—

木 田 隆*・山 口 功*・池 田 雅 夫**

LSS Attitude Control Experiment

—Application of LQ Loop-Shaping Capability—

Takashi KIDA*, Isao YAMAGUCHI* and Masao IKEDA**

This paper studies the LQ regulator loop shaping capability in order to enhance the LSS stability robustness, experimentally. To this end, a frequency-dependent optimal regulator gain is designed to give the low-pass property to the loop transfer function in a LQ framework. Then a state estimator is constructed to preserve its property in a Loop Transfer Recovery manner. A ground-based experiment is performed by utilizing a single-axis air-table.

Key Words: large space structures, LQ regulator, loop-shaping, loop transfer recovery

1. ま え が き

大型宇宙構造物 LSS: Large Space Structures の姿勢制御に最適レギュレータ: LQR を適用することを考える。制御則は、通常、LSS の低次元モデルについて設計されるが、このときの最大の問題は、低次元化において無視した残余モードによる spillover とその不安定化である。LQR は優れた制御性能をもつと同時に良いロバスト性があることが知られているが、このロバスト性も残余モードの存在のもとで安定性を確保するには不十分な場合がある。そこで、低周波帯域での制御性能を保ちつつ、同時に高周波帯域でロバスト安定性を保証する制御器の構成が必要となる。

そのための一方法として、LQR に周波数領域でのループ成形機能をもたせる設計法¹⁾を用いて spillover を抑制する制御系を構成できることを筆者らは示してきた^{2)~4)}。これは、周波数依存の 2 次形式評価関数を最小にするという意味で最適であり、同時に、そのフィードバック・ゲインに高域遮断特性をもたせること

によって、高周波帯域の残余モードによるモデル誤差に対するロバスト安定性を積極的に向上する能力をもつ制御則である。

本稿は、この LQR のループ成形を利用した spillover 抑制機能を地上実験によって検証した結果を述べ、その有効性を示すことが目的である。このために用いた実験装置の概要とモデリング法を次章で述べ、3 章で設計法とその諸性質をまとめる、最後に 4 章で実験結果を示し、得られた制御則の性能、機能を議論する。

2. 実験装置とそのモデル

ここでは、大型人工衛星、技術試験衛星 VI 型 (ETS-VI)¹⁾を念頭において LSS の姿勢制御を考える。宇宙空間での LSS の挙動を地上で実現するために、1 軸エアテーブル装置を使用する。Fig. 1 および Photo. 1 にその外観を示す。装置の中心剛体部分はエアベア

Fig. 1 Experimental setup

[†] 第 5 回宇宙航空の誘導制御シンポジウムで一部発表 (1988・12)

* 航空宇宙技術研究所 調布市深大寺東町 7-44-1

** 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* National Aerospace Laboratory, Chofu

** Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe (Received April 30, 1991)

(Revised July 16, 1991)

Photo. 1 Outlook of experiment setup

リングを用いて空気の静圧で非接触で浮上しており、図の鉛直軸まわりに無摩擦で回転できる。これによって実際の LSS の 3 軸姿勢運動のうち 1 軸まわりの運動を地上で検証できる。これに取り付けられている柔軟構造物は 2 枚の CFRP の網目状のアイソグリッド構造をヒンジ結合したもので、実衛星の太陽電池板を模擬している。そして、操作量は剛体部分に作用するトルク入力で、観測量は剛体部分の回転角である。それぞれ、ブラシレス DC モータ、非接触磁気エンコーダを使用している。これらは、実機に使われるリアクション・ホイール、姿勢センサを原理的に模擬したものである。そして、LSS の姿勢制御は Fig. 1 のエアテーブルの角度 θ を目標角度に制御することに対応している。制御則の演算は A/D, D/A コンバータを経由してデジタル計算機で行う。

この実験系のモデルはつぎのように作成した。全系の運動は次式で記述できる⁶⁾。

$$M\ddot{q} + Kq = Lu \quad (1)$$

$$z = H^T q \quad (2)$$

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} J & P^T \\ P & I \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H^T = [1 \ 0]$$

ここで、 J は回転軸まわりの全体系の慣性モーメントで、 θ が姿勢角、 u 、 z が操作量と観測量である。(2)式の H は入力点、出力点が同一場所なので、 $H=L$ となる collocation 条件が成り立っている。また、 Ω は柔軟構造の振動を表わす量である。いずれも、剛体部分を固定した片もち状態、すなわち、(1)式で $\theta=0$ とおいた拘束モード方程式

$$\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi = 0$$

から求められる。 Ω を拘束モード周波数と呼ぶ。ま

た、 P は拘束モード座標 ξ と衛星全体の回転運動 θ の干渉を表わす行列で、拘束モードの形状行列 Ψ から計算される量である。この拘束モードモデルは有限要素法 FEM などでも計算したが、ここでは、振動試験によって実験的に求めた結果を利用した。Fig. 2 にそれを示す⁶⁾。

(1)式で、 M 、 K ともに対称行列であることを考慮すれば、 $\Phi^T M \Phi = I$ 、 $\Phi^T K \Phi = \Sigma^2$ と同時対角化が可能である。そして、変数変換 $q = \Phi \eta$ を(1)、(2)式に施せば、つぎのモード方程式が得られる。

$$\ddot{\eta} + 2Z\Sigma\dot{\eta} + \Sigma^2\eta = \Phi^T Lu \quad (3)$$

$$z = H^T \Phi \eta \quad (4)$$

これを、非拘束モードモデルとよぶ。ここで、 η はモード座標である。また、 $\Sigma, Z, \Phi \in R^{N \times N}$ はそれぞれ、

Fig. 2 Contrained modal shape (experimentally obtained)
modal frequency $\Omega = \{\Omega_i\}$ (*) and its damping ratio(†)

非拘束モードの周波数, 減衰比, モード形状行列で, Σ, Z は半正定対角行列である. **Table 1** にこれらの値をまとめて示した. そして, 操作量 u から観測量 z までの伝達関数 $\tilde{G}(s) = H^T \Phi (Is^2 + 2Z\Sigma s + \Sigma^2)^{-1} \Phi^T L$ を **Fig. 3** に示す.

Fig. 2 に示した 6 個の拘束モードのうち, 捩れ振動 11.83 (Hz) と面内曲げ振動 17.37 (Hz) は **Table 1** の 5, 7 番目の非拘束モードに対応している. これらは, 表からもわかるように 1 軸エアテーブルを使った姿勢制御実験系では実用上, 非可制御, 非可観測なので **Fig. 3** には表われていない. 残りの 4 個の振動モードと剛体モードを以下では考える.

実際には, 制御に使用するアクチュエータの作動帯域, 計算機のサンプル周期などの制約から, この数学モデルで表現したすべてのモードを制御することはできない. そこで, 低次元モデル $G(s) = H^T \Phi_c (Is^2 + 2Z_c \Sigma_c s + \Sigma_c^2)^{-1} \Phi_c^T L$ を作成し, 制御則はこれについて設計する. ここで, (3) 式の係数行列を

$$\Phi = [\Phi_c \ \Phi_r], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_c & 0 \\ 0 & \Sigma_r \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_c & 0 \\ 0 & Z_r \end{bmatrix}$$

とブロック分割した. $\Sigma_c, Z_c, \Phi_c \in R^{N_c \times N_c}$ で, 周波数の低いモードを, この低次元モデルに取り入れること

Table 1 Airtable model
Modal parameters*

Mode No. i	σ_i (Hz)	ϕ_i	ζ_i
1	0.00	3.09e ⁻¹	0.0
2	1.15	-3.71e ⁻¹	5.0e ⁻³
3	4.00	-7.98e ⁻²	5.0e ⁻³
4	4.17	2.85e ⁻²	5.0e ⁻³
5	11.83	3.98e ⁻³	5.0e ⁻³
6	13.65	-2.06e ⁻¹	5.0e ⁻³
7	17.36	-1.64e ⁻³	5.0e ⁻³

* $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i\}$, $Z = \text{diag}\{\zeta_i\}$
($\Phi^T L$)^T = $H^T \Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots]$

Fig. 3 Transfer function $\tilde{G}(s)$

にする. 添え字 r で示したモードは設計に考慮しない残余モードである.

制御則の設計は時間領域で行うので, この低次元モデルを状態方程式で表現しておく.

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (5)$$

$$z = cx \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Sigma_c^2 & -2Z_c \Sigma_c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_c^T L \end{bmatrix},$$

$$c = [H^T \Phi_c \ 0]$$

つぎが成り立つ.

[性質 1]

1.1 (A, b) は可制御, (c, A) は可観測である.

1.2 (A, b, c) は最小位相系である.

(証明) (3) 式は collocation 系なので最小位相である⁷⁾. そして, 行列 $[\Sigma^2, \Phi^T L]$, $[2Z\Sigma, \Phi^T L]$ がともに行最大ランクをもつとき, 可制御, 可観測である⁸⁾. ■

ここで, 設計に使う低次元モデルの伝達関数 G と, もとのモデル $\tilde{G}$ の関係はたとえば,

$$\tilde{G}(s) = G(s)(1 + \Delta(s))$$

と表わせる. Δ は低次元化によるモデル誤差で, 安定であり, その振幅 $|\Delta(j\omega)|$ は高周波帯域で大きい. 制御則は低次元モデルについて設計し, 実モデルに適用される. したがって, その制御則を施した閉ループ系がモデル誤差 Δ によって不安定とならないような制御則を設計することが LSS 制御の課題となる. この spillover 不安定化を抑制する能力をもつ制御則として, 以下で, ループ成形機能をもつ LQR を考え, その設計法とロバスト安定性に関する諸性質を示す.

3. 準備

低次元モデル (5) 式についてつぎの評価関数を考えよう.

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (y^*(j\omega)y(j\omega) + u^*(j\omega)R(j\omega)u(j\omega)) d\omega \quad (7)$$

ここで, $y(s) = Cx(s)$ は制御量で (C, A) を可検出とする. また, $R(s) = \rho r^*(s)r(s)$ で, ρ は正実スカラーの定数とし, $r^{-1}(s)$ には安定かつプロパーで, その零が $G(s)$ の不安定極と相殺しないような有理関数を選ぶものとする. いま, r^{-1} に

$$r^{-1}(s) = \frac{\alpha_0}{s^p + \alpha_{p-1}s^{p-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (8)$$

のような高域遮断特性をもたせる場合を考えてみる. このとき $r^{-1}(0) = 1$, $r^{-1}(\infty) = 0$ であるから, (7) 式の操作量 u にかかる重みは, 低域では従来の LQR と

同様 $\rho > 0$ であるが、高域では非常に大きい。(7)式を最小とするレギュレータゲインを求めれば、後述するように、それは周波数依存のゲイン $\mathbf{k}(s)$ となり、これにも高域遮断特性がある。

ここで、仮想的な操作量 $\mathbf{v}(s) = \mathbf{r}(s)\mathbf{u}(s)$ を考えると評価関数(7)式は、

$$J = \int_0^\infty (y^2 + \rho v^2) dt \quad (9)$$

と書き換えられる。したがって(5)式について周波数依存の評価関数(7)式を最小とする制御則は $\mathbf{v}$ を入力とする拡大系 $\mathbf{G}\mathbf{r}^{-1}(s)$ に関して評価関数(9)式を最小とする最適ゲインを求める標準的な LQR の問題となり、状態空間で設計できる。そのために、 $\mathbf{r}^{-1}(s)$ を可制御、可観測な状態方程式で

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o + \mathbf{b}_o v, \quad \mathbf{u} = \mathbf{c}_o \mathbf{x}_o \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -\alpha_o & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{p-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_o \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o = [1, 0, \dots, 0]$$

と実現すると、 $\mathbf{r}^{-1}(s)$ を $\mathbf{G}(s)$ の入力端に直列結合した拡大系は、

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}v$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b}\mathbf{c}_o \\ 0 & \mathbf{A}_o \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}_o \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。制御量 y は $\bar{\mathbf{x}}$ を使って $y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}, 0]$ と表わせる。そして、制御則 $\mathbf{v} = -\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$ は次式で求められる。

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{X} - \frac{1}{\rho} \mathbf{X}\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{X} + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} = 0$$

〔性質 2〕

2.1 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ が可安定 (可制御) のとき、 $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}})$ は可安定 (可制御) である。

2.2 $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ が可検出 (可観測) でかつ $\mathbf{r}^{-1}$ の極が $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ の零と一致しない) のとき、 $(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{A}})$ は可検出 (可観測) である。

したがって閉ループ系 $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$ は安定である。

(証明) 付録 A. ■

操作量 v は仮想的な量であるが、 $\bar{\mathbf{k}}$ を状態変数 $\mathbf{x}$ にかかる部分と、 $\mathbf{x}_o$ にかかる部分に分割して $\bar{\mathbf{k}} = [\mathbf{k}, \mathbf{k}_o]$ とおけば、 $\mathbf{v} = -\mathbf{k}\mathbf{x} - \mathbf{k}_o \mathbf{x}_o$ となり、(10)式から実際の操作量 $\mathbf{u}$ が求められ、つぎが成り立つ。

〔性質 3〕 実際の操作量 $\mathbf{u}$ は、 $\mathbf{u}(s) = -\mathbf{k}(s)\mathbf{x}(s)$ である。ここで、 $\mathbf{k}(s) = \mathbf{r}_o^{-1}(s)\bar{\mathbf{k}}$ と書けて、

$$\mathbf{r}_o^{-1}(s) = \mathbf{c}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o + \mathbf{b}_o \mathbf{k}_o)^{-1} \mathbf{b}_o$$

となる。 $\mathbf{r}_o^{-1}(s)$ はやはりローパスフィルタであり、その次数も $\mathbf{r}^{-1}(s)$ と同一で p 次である。ただし、その極は(8)式の値とは異なる。 ■

$\mathbf{r}^{-1}$ に 1 次、2 次のローパス特性を与えた場合に得られる $\mathbf{r}_o^{-1}$ の例を以下に示しておく。いずれの場合も $\mathbf{r}_o^{-1}$ は安定となる (文献²⁾ 参照)。

〔例 1〕 $\mathbf{r}^{-1} = a/(s+a)$ のとき $\mathbf{r}_o^{-1} = a/(s+a')$ となる。ここで、 $a' \geq a$ である。

〔例 2〕 $\mathbf{r}^{-1} = \omega_o^2/(s^2 + 2\zeta_o \omega_o s + \omega_o^2)$ のとき、 $\mathbf{r}_o^{-1} = \omega_o'^2/(s^2 + 2\zeta_o' \omega_o' s + \omega_o'^2)$ となる。ここで、 $\omega_o' \geq \omega_o$ である。また ζ_o' は

$$\cdot \zeta_o \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ならば, } \zeta_o \geq \zeta_o' \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ であり,}$$

$$\cdot \zeta_o < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ならば, } \zeta_o < \zeta_o' < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる.} \quad \blacksquare$$

この性質 3 から、 $\mathbf{u}(s) = \mathbf{k}(s)\mathbf{x}(s)$ を(1)式に施したときの一巡伝達関数 $\mathbf{l}(s) = \mathbf{k}(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ と、その還送差 $1 + \mathbf{l}(s)$ の振幅はつぎの性質をもつことがわかる⁴⁾。

〔性質 4〕

4.1 高周波帯域 $\omega \rightarrow \infty$ で $|\mathbf{l}(j\omega)| \propto 1/\omega^{p+1}$ となり、

4.2 すべての周波数 $\forall \omega$ で

$$|1 + \mathbf{l}(j\omega)| \geq 1/|1 + \mathbf{k}_o(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{b}_o|$$

である。

(証明) 付録 B. ■

ここで、標準的な LQR の一巡伝達関数の振幅は、 $\omega \rightarrow \infty$ で $1/\omega$ に比例することを考えると、性質 4.1 は $\mathbf{l}(s)$ の振幅の減少率を、ループ成形によって標準的な LQR の場合よりも大きくできることを示している。モデル誤差が問題となる高周波帯域でのこの特性を使って良いロバスト安定性を制御系に与えることができる。また 4.2 から、LQR のいわゆる円条件はこの場合には成り立たない。しかしロバスト安定性は 4.1 の意味で確保できている。そして、実際の LSS 制御にはこのほうが、はるかに有効な設計法であることが、次章の実験でもわかる。

円条件は、モデル誤差 Δ の影響が大きい高周波帯域で一巡伝達関数の位相を -90 (度) まで進めるという意味でロバスト性を主張している。これは、古典的には「位相安定」と呼ばれる安定化の考え方である。しかし、設計どおりの位相安定を達成するためには、高域での正確なモデリング、浮遊的な位相遅れの厳密な管理がなされなければならない。複雑なシステムでは困難である。一方、高域遮断特性をもたせた LQR は、そのゲインを減少させることによって安定化を図る

「ゲイン安定」によるロバスト制御を行うものであって、位相安定方式における問題点は重要ではなくなる。ただし、4.2から低域での感度特性は標準的なLQRよりも劣化する可能性はある。

さて以上の議論は、状態量が直接使える場合のレギュレータ設計法であった。実際には、(6)式で表わされた観測量 z を使った出力フィードバック制御則 $u(s) = -K(s)z(s)$ を構成しなければならない。このために状態観測器を併用した制御則を

$$K(s) = k(s)(sI - A + bk(s) + lc)l \quad (12)$$

とする。ここで、 (c, A) は可観測である。そして、 l は次式の Riccati 方程式から得られる推定器のゲインである。いま

$$l = \frac{1}{\mu} Y c^T, \quad AY + YA^T - \frac{1}{\mu} Y c^T c Y + b b^T = 0 \quad (13)$$

とする。

ここで、 μ はレギュレータ設計時の ρ と双対な意味をもつ正実スカラーのパラメータで直観的にいえば $\mu \rightarrow 0$ とすれば広帯域の推定器が得られる。

状態推定器は拡大系ではなく(5)式のモデル $G(s)$ について設計してやればよい。また、 $A - lc$ は (A, b) , (c, A) が可制御、可観測であるから安定となる。制御則(12)式は状態方程式ではつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Fw + qz \\ u &= hw \end{aligned} \quad (14)$$

$$F = \begin{bmatrix} A_o - b_o k_o & -b_o k \\ bc_o & A - lc \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} o \\ l \end{bmatrix}, \quad h = [c_o \quad o]$$

そして $K(s)$ にはつぎの二つの性質がある³⁾。

【性質5】 $\bar{A} - \bar{b}\bar{k}$, $A - lc$ のそれぞれが安定のとき、制御則 $K(s)$ を $G(s)$ に施した閉ループ系は安定である。

【性質6】 一巡伝達関数 $L(s) = GK(s)$ は $\mu \rightarrow 0$ としたとき $L(s) \rightarrow I(s)$ と漸近する。

(証明) 付録C。

つまり、標準的な観測器併用のLQRの場合と同様に制御対象を安定とするレギュレータと安定な状態観測器を独立に設計しても全体系の安定性が保証される分離定理が成り立つ。そして、その一巡伝達関数 L を状態フィードバックの一巡伝達関数 I に漸近させるLTR: Loop Transfer Recoveryの機能をもつ状態観測器が普通のLQRの場合⁹⁾と同じく構成できることがわかる。

ところで、相補感度関数を $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ とすれば $|T| < 1/|A|$ が成り立つとき、2章で述べたモデル誤差 $A(s)$ にたいして制御系は安定である⁹⁾。 $|A|$

が大きい高周波帯域では $|T| \sim |L| = |GK|$ と近似できるので、 $|K(j\omega)|$ が高域遮断特性をもつことが、ロバスト安定のための条件 $|GK(j\omega)| < 1/|A(j\omega)|$ を満足するためには重要であることがわかる。

実際、本章で述べた制御則では k の高域遮断特性が K の周波数特性にそのまま反映される。特に、性質6を使えば $|L(j\omega)| \rightarrow |I(j\omega)|$ であり、 $I(j\omega) = k(j\omega)(j\omega I - A)^{-1}b$ は性質3から良い高域遮断特性をもっているため、安定性に有効であることが直接わかる。

4. 実験結果

第2章で述べたように、制御対象は1入力1出力系である。したがって、制御モデル G について設計した制御則 K が実モデル $\tilde{G}$ を安定としかどうかは、多入力多出力系の場合のような特異値線図ではなく、古典的に使われてきたボード線図を用いて調べることができる。これによって、ゲイン余裕、位相余裕などの考え方を使って設計した制御系の特性を調べていくこととする。制御実験では、連続系として設計した制御則 (F, g, h) をサンプル周期 ΔT で離散化したものを使用する。 $\Delta T = 10$ (ms) とした。

4.1 1モードモデル

剛体モードだけを制御モデルとしたときの設計、実験例を示す。このとき、1次の振動モードが最も大きいモデル誤差であり、安定性を左右する。

まず、評価関数を $J = \int_0^\infty (y^2 + \rho u^2) dt$ として求めた標準的なLQRに状態観測器を併用した場合の実験例を示してみる。Fig. 4(a)は、 $\rho = 10^{-3}$ とし状態観測器は(13)式で $\mu = 10^{-3}$ と設計したときの $\tilde{G}K$ のボード線図で、Fig. 4(b)が姿勢角度1(度)のステップ応答の実験結果である(注1)。1次振動モードの振幅の交差周波数で位相余裕が失われ、制御系が不安定となっている。spillover不安定の一例である。

それでは、同じ ρ , μ の値でこの制御系をロバスト安定とするようにループ成形した場合を示そう。重み関数 r^{-1} として2次ローパス特性を与え、 $\omega_o = 1$, $\zeta_o = 0.7$ とした場合の設計結果を Fig. 5(a) に示す。制御則の高域遮断特性によって、1次モードの共振周波数での振幅を20(dB)以上下げることができ、これによって制御系を安定とできている。モードパラメータのうち、減衰比は一桁程度の精度でしか同定できない

(注1) 以下、ボード線図中の実線は $\tilde{G}K$ の、点線は K の伝達関数を表す。また、実験結果のステップ応答の図は姿勢角度 θ (度)と制御トルク (Nm) を示す。図中の破線は数値シミュレーションの結果である。

(a) Design 1 (standard LQ)
 $\hat{G}K(\text{—}), K(\text{.....})$

(b) Step Response 1
 experimental (—), numerical (.....) results

Fig. 4

(a) Design 2 (single mode)
 $\hat{G}K(\text{—}), K(\text{.....})$

(b) Step Response 2
 experimental (—), numerical (.....) results

Fig. 5

いといわれている¹⁰⁾ので、振幅にこの程度設計マージンが必要であると思われる。これによって、残余モードのパラメータ誤差にも強いロバスト安定性を付与できている。そして、観測器による位相遅れも問題とならない。ボード線図の振幅曲線を見れば、性質4に述べた L のループ成形機能が状態観測器を併用した制御則(12)式を用いた一巡伝達関数 L にも保存され、うまく作用していることがわかる。

Fig. 5(b)が、このときのステップ応答実験の結果である。数値シミュレーション結果とよく一致している。

4.2 2モードモデル

つぎに、過渡応答、制御精度を向上させるために、1次振動モードも制御モデルに取り入れた2モードモデルについて、制御系を設計してみる。 $\rho=10^{-5}$, $\mu=10^{-6}$ とし、 r^{-1} の2次ローパス特性として $\omega_o=10$, $\zeta_o=0.7$ とした。この場合には、安定性に最も大きい

影響を与える残余モードは、2次振動モードである。その共振周波数での振幅を、やはり -20 (dB)程度とするように、これらの値を設計した。ボード線図をFig. 6(a)に、実験結果をFig. 6(b)に示す。1次モードの周波数近辺で、位相遅れが生じているが、これは制御モードなので、性質2から安定である。しかし、位相余裕などは必ずしも満足できるものとはなっていない。これは、ロバスト安定性を重視したために低周波帯域での制御性能が犠牲になっているためである。そこで、この点を改善するためにLTR特性を状態観測器にもたせる設計を行ってみた。これは、性質6から可能であり、Fig. 6と同一条件で μ だけを $\mu=10^{-12}$ と減少させた結果がFig. 7(a)である。制御対象である剛体モード、1次振動モードに十分な位相余裕を与えることができています。同時に、残余モードである2次以上の振動モードは $h(s)$ の高域遮断特性によって、十分なゲイン余裕をもってロバスト安定

(a) Design 3 (2 modes)
 $\tilde{G}K$ (—), K (.....)

(b) Step response 3
 experimental (—), numerical (.....) results

Fig. 6

(a) Design 4 (2 modes, LTR)
 $\tilde{G}K$ (—), K (.....)

(b) Step response 4
 experimental (—), numerical (.....) results

Fig. 7

となっている。Fig. 7(b)が実験結果である。

ところで、制御に使用したアクチュエータの最大発生トルクには制約がある。このため操作量が0.37 (Nm) で飽和するように制御則を作成している。この影響で、Fig. 7(b) (破線部) のシミュレーション結果では制御トルクが飽和しており LTR の効果がステップ応答の改善にはそのまま反映されていない。また、Fig. 7(b) (実線部) の実験結果のほうはシミュレーション結果とは大きく異なっている。これには振動のモードパラメータ、アクチュエータの作動帯域などのモデリング誤差が影響しているものと考えられる。アクチュエータ帯域は実測で6 (Hz) 程度であった (付録D)。

4.3 3モードモデル

さらに制御則の動作帯域を広げて、2次振動モードも制御対象とした3モードモデルの制御結果を最後に示す。 $\rho=10^{-6}$, $\mu=10^{-7}$ で2次ローパスの伝達関数

r^{-1} は、 $\omega_0=10$, $\zeta_0=0.7$ とした。このとき、残余モードの3次振動モードに対してロバスト安定な制御器が Fig. 8(a) のように設計できた。Fig. 8(b) がステップ応答の実験結果である。

なお、過渡応答、定常特性などの制御性能は制御系の低周波帯域の特性で定まるものであり、高次のモードを考慮してモデルを精密にするほど、帯域の広い制御則が得られ、制御性能は向上する。実際、ステップ応答の実験結果から、1モードモデル (Fig. 5(b)), 2モードモデル (Fig. 6(b), 7(b)), 3モードモデル (Fig. 8(b)) の順番に良い応答となっていることがわかる。

LQR 制御則の性能は、その設計に用いたモデルの精度に依存する。実際、3モードモデルに基づいて設計した場合には、ボード線図 Fig. 8(a) から、制御トルクは2次モードの共振を抑制するように作用していることがわかる。しかし、2モードモデルの場合に

(a) Design 5 (3 modes)
 $\tilde{G}K$ (—), K (.....)

(b) Step response 5
 experimental (—), numerical(.....) results

Fig. 8

はこれがない。その結果、ステップ応答実験結果を見れば、Fig. 8(b)の制御トルクが、Fig. 6(b), Fig. 7(b)のそれに比べてはるかに高い周波数成分をもっている。そして、これによって制御性能が向上していることがわかる。

5. あとがき

以上、spillover 不安定を抑制する機能をもつ LQR 制御則を設計し、地上実験によってその有効性を示した。これは、LQR のループ成形を利用して高域のモデル誤差に対してロバスト安定な最適制御則である。この制御則を使って軌道上で制御実験を行う計画である¹¹⁾。

なお、本実験の実施に当たっては、航空宇宙技術研究所の甲斐高志、藤原 勉、両技官に、それぞれモード解析、制御実験にご助力を仰いだ。また、東京電機大学大学院生、坪川 豊君（現在、(株)東芝）にも貴重など助言をいただいた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) B. D. O. Anderson and D. L. Mingori: Use of Frequency Dependence in Linear Quadratic Control Problems to Frequency-Shape Robustness, AIAA J. Guidance, Control and Dynamics, 8-3, 397/401 (1985)
- 2) 木田, 池田, 山口: 高域遮断特性をもたせた最適レギュレータとその大型宇宙構造物の制御への応用, 計測自動制御学会論文集, 25-4, 448/454 (1989)
- 3) T. Kida, Y. Tsubokawa and M. Ikeda: Robust LSS Controller Design by Frequency Shaping, AIAA 89-3535 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Boston, MA, 942/948 (1989)
- 4) 木田, 池田: 最適レギュレータの周波数成形について, 第19回制御理論シンポジウム資料, 271/274 (1990)
- 5) P. C. Hughes: Modal Identities for Elastic Bodies with Application to Vehicle Dynamics and Control,

J. of Applied Mechanics, 47-1, 177/184 (1980)

- 6) 甲斐高志: 構造シミュレーション模型パドル部の振動試験結果, 航技研ニュース, No. 316 (1985)
- 7) 木田, 小松, 池田: Collocated LSS 制御系の伝達零, 計測自動制御学会論文集, 27-9, 1076/1078 (1991)
- 8) 梶谷, 池田, 木田: Collocated Feedback による宇宙構造物の最適制御, 計測自動制御学会論文集, 25-8, 882/888 (1989)
- 9) J. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, AC-26-1, 4/16(1981)
- 10) 小松敬治: 大規模柔軟構造物のモデリング, 計測と制御, 28-4, 358/364 (1989)
- 11) T. Kida, I. Yamaguchi, Y. Ohkami, S. Ichikawa and Y. Kawada: A Flight Experiment of Flexible Spacecraft Attitude Control, 39th IAF, Bangalore, India, 1/5 (1988)
- 12) H. Kwakernaak and R. Sivan: The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters, IEEE Trans., AC-17-1, 79/86 (1972)

《付 録》

A. $p=2$ の場合²⁾と同様に証明できる。拡大系 $(\bar{A}, \bar{b})$ は $n+p$ 次であるから $\text{rank}[sI - \bar{A}, \bar{b}] = n+p$ が $\text{Re}(s) \geq 0$ ($\forall s$) で成り立つとき、可安定(可制御)である。このランク条件から、

$$\begin{aligned} & \text{rank}[sI - \bar{A}, \bar{b}] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & -b \\ & s & & & -1 \\ & & \ddots & & \\ & & & s & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & s + \alpha_{p-1} & \alpha_p \end{bmatrix} \\ &= \text{rank}[sI - A, b] + p \end{aligned}$$

これから、可安定(可制御)であることがいえる。また、可検出性も同様にして、

$$\begin{aligned}
 \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ sI - \bar{A} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} C & & & \\ sI - A & -b & & \\ & s & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & s & -1 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 \cdots s + \alpha_{p-1} & \end{bmatrix} \\
 &= \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} + p
 \end{aligned}$$

が $\text{Re}(s) \geq 0$ で成り立つことからわかる。可観測性は、 A_o の固有値を λ とすれば、 $s \neq \lambda$ のときは、可検出性と同様である。 $s = \lambda$ なら、それが (A, b, C) の零でないとき、次式の右辺第1項は $n+1$ になる。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \lambda I - \bar{A} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C & 0 \\ \lambda I - A & b \end{bmatrix} + (p-1)$$

B. 一巡伝達関数 $\tilde{l} = \bar{k}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{b}$ を考えると (11) 式から、

$$\tilde{l} = k(sI - A)^{-1}bc_o(sI - A)^{-1}b_o + k_o(sI - A_o)^{-1}b_o$$

となる。1入力1出力系の場合に限れば、選送差は

$$\begin{aligned}
 1 + \tilde{l} &= [1 + k_o(sI - A_o)^{-1}b_o] \\
 &\quad \cdot [1 + c_o(sI - A_o + b_o k_o)^{-1}b_o k(sI - A)^{-1}b]
 \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、右辺第2項は性質3から選送差 $1 + \tilde{l}$ である。ところで、 $\tilde{l}$ は $|1 + \tilde{l}| \geq 1$ なる円条件を満たすので性質4.2が示せる。4.1は、 $\omega \rightarrow \infty$ で、

$$|\tilde{l}(j\omega)| \leq \frac{1}{\omega} |r_o^{-1}(j\omega)| kb$$

より明らかである。

C. 制御則 (14) 式の状態量 w は、 $w^T = [x_o^T, \hat{x}^T]$ と分割できる。ここで、 $\hat{x}$ は制御対象の状態量の推定値である。(14)式を制御対象 (5)、(6)式に施したときの閉ループ系は、 u 、 z を消去すれば、

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & bc_o & 0 \\ -b_o k & A_o - b_o k_o & b_o k \\ 0 & 0 & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_o \end{bmatrix}$$

となる。ここで、状態推定誤差を $\tilde{x} = x - \hat{x}$ とおいた。 $A - lc$ は安定であり、(1.1) ブロックは (11) 式から $\bar{A} - \bar{b}\bar{k}$ なので、性質2から安定である。よって、性質5が成り立つ。

また、 (A, b, c) は最小位相系なので、(13)式で $\mu \rightarrow 0$ としたとき $\sqrt{\mu}l \rightarrow b$ となり¹²⁾、通常のレギュレータの場合⁹⁾とまったく同様に $K(s) \rightarrow k(s)(sI - A)^{-1}bG^{-1}(s)$ となることを示せる。したがって、 L は $\tilde{l}$ に漸近する。

D. 制御に使用したブラシレス DC モータの作動帯域を調べるために、制御用計算機で発生したM系列

Fig. 9 Random response of plant
Spectrum of input (upper) and output (bottom)

信号 $u(t)$ を実験系に加え、パドル先端部に取り付けた加速度計 (ACC, Fig. 1) の出力 y_{ACC} で開ループの周波数応答の計測を行った。入出力信号をフーリエ変換したときの振幅を **Fig. 9** のそれぞれ上下の図に示した。サンプル周波数を 50 (Hz) とした。このときの伝達関数は

$$s^2 G_{ACC}(s) \tilde{G}(s)$$

である。ここで、 $G_{ACC}(s)$ は加速度計とその計測系の周波数特性で 20 (Hz) のローパス特性をもたせている。また、 $s^2 \tilde{G}(s)$ は $s \rightarrow \infty$ のとき一定値になる。これらの事実と $|u(j\omega)|$ の帯域から $|y_{ACC}(j\omega)|$ が急速に減少する 6 (Hz) 程度以下がアクチュエータの作動帯域であると判断した。

[著者紹介]

木田 隆 (正会員)

1973 年、東京大学工学部計数工学科卒業。同年、科学技術庁航空宇宙技術研究所入所。現在、宇宙研究グループ主任研究官。人工衛星の姿勢制御、大型宇宙構造物の振動制御の研究に従事。日本航空宇宙学会、AIAA、IEEE などの会員。

山口 功

1983 年、東京大学大学院修士課程修了 (航空学専攻)。同年、科学技術庁航空宇宙技術研究所入所。現在、宇宙研究グループ主任研究官。大型宇宙構造物や宇宙ロボットの動力学と制御の研究に従事。日本航空宇宙学会、AIAA、IEEE などの会員。

池田 雅夫 (正会員)

(本号 p. 58 参照)