逐次多点法による表面プロフィール計測方法[†]

——計測結果の延長とその仕組み——

平 卯太郎*

Serial Multi-Point Method for Surface Profile Measurement

——An Extension Mechanism of Surface Profile——

Utarou TAIRA*

We've already proposed Serial Multi-Point Method (SMPM) for surface profile measurement¹⁾. This method is very powerful because the influences of the sensors head's fluctuations can be cancelled completely and the accuracy also can be improved with only increasing the number of sensors.

But, recursive solution, solution which gives the relationship between two measured results of surface profile before and after the one more step advance of the sensors head, was not established yet.

So in this report, we've tried to establish recursive solution. And then, using achieved result, we made it clear how the measured result of surface profile will be extended as the sensors head's traverse motion proceeds and the number of measuring points increases.

Consequently, the transparency of theoretical aspect of SMPM improved in great degree.

Key Words : surface profile measurement, recursive solution, tearing theorem of inverse matrix, extension of the measured result

1. はじめに

表面プロフィール計測方法として先に提案した逐次多点法¹⁾に関しては¹⁾, 逐次解法, つまり, 測定ヘッドがある測定タイミングまで走行した時点で得られる表面プロフィール計測結果で, さらにもう1ステップだけ走行が進んだ際に得られる計測結果を表わす方法が完成していなかったため, 特にセンサが4個以上の場合については計測点の増加に伴って表面プロフィール計測結果がどのようにして延長されるのか不明なままであった.

そこで, 本報告では始めに逐次解法を導き, つぎにその結果を用いて計測点が増加する際に表面プロフィール計測結果がどのようにして延長されるかを解明する.

なお, システム同定などの逐次解法では, 未知数の決定に用いるデータの個数が増加しても, 求めるべき未知

数の個数は一定不変であるのに対し, 逐次多点法では測定ヘッドの走行に伴う距離測定値のデータ個数の増加と同時に, 求めるべき未知数である表面プロフィール値の個数も増加するので, この点で両者の事情は異なる.

2. 逐次解法

逐次多点法では, 距離測定値 $\hat{Y}$ と未知数である表面プロフィール x_1 および測定ヘッドの走行ガタ x_2 の関係を表わす連立方程式(1)を最小2乗法にしたがって解き, 求めたい表面プロフィール x_1 は(2)式によって得られる¹⁾.

$$\hat{Y} = [A, C] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし,

$x_1 = (y_2, y_3, \dots, y_{n+r-2})^T$: 表面プロフィール(真の距離)ベクトル. この場合, 両端の第1, 第 $(n+r-1)$ 計測点を基準点に指定し, それに伴って y_1, y_{n+r-1} は0となるので x_1 の要素から除外されている. なお, 2基準点の選び方は計測精度に何ら影響を与えないことがすでに知られている.

[†] 第24回計測自動制御学会学術講演会で発表 (1985・7)

* 山武ハネウエル(株) 東京都大田区西六郷 4-28-1

* Yamatake・Honeywell Co. Ltd., Ohta-ku, Tokyo
(Received October 7, 1991)
(Revised April 10, 1992)

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} P(n_0) \\ A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1^T \\ \vdots \\ m_{r-2}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R \\ [0, \dots, 0, m_1, \dots, m_{r-2}] \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{P_{11}} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1^T m_r \\ m_1^T m_r + m_1^T m_{r-1} \\ m_2^T m_r + m_2^T m_{r-1} \\ \vdots \\ m_{r-1}^T m_r + m_{r-1}^T m_{r-1} \end{bmatrix}}^{P_{12}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0, \dots, 0, m_r^T m_1, & m_r^T m_2 & m_r^T m_3 & m_r^T m_{r-1} \\ + m_{r-1}^T m_1, + m_{r-1}^T m_2, \dots, + m_{r-1}^T m_{r-2} \end{bmatrix}}_{P_{21}} & \underbrace{\begin{bmatrix} m_r^T m_r + m_r^T m_{r-1} \end{bmatrix}}_{P_{22}} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、ブロック行列の逆行列公式(8)³⁾によって $P(n_0+1)^{-1}$ を作成し、さらに、そこに現れる $P_{11}^{-1}=(P(n_0)+R^T R)^{-1}$ に逆行列の補助公式(9)⁴⁾を適用すると(10)式が得られる(それぞれ公式が適用可能であることについては付録 I, II に示す.)。

$$P^{-1}(n_0+1) = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} + P_{11}^{-1} P_{12} (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} P_{21} P_{11}^{-1}, & -P_{11}^{-1} P_{12} (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} \\ -(P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} P_{21} P_{11}^{-1}, & (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P_{11}^{-1} = (P(n_0) + R^T R)^{-1} = P^{-1}(n_0) - P^{-1}(n_0) R^T (I + R P^{-1}(n_0) R^T)^{-1} R P^{-1}(n_0) \quad (9)$$

$$P^{-1}(n_0+1) = \begin{bmatrix} \{I + P_{11}^{-1} P_{12} (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} P_{21}\} \{I - P^{-1}(n_0) R^T (I + R P^{-1}(n_0) R^T)^{-1} R\} P^{-1}(n_0), \\ -(P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} P_{21} \{I - P^{-1}(n_0) R^T (I + R P^{-1}(n_0) R^T)^{-1} R\} P^{-1}(n_0), \\ -P_{11}^{-1} P_{12} (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} \\ (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

よって、 $P^{-1}(n_0+1)A^T(n_0+1)Q^T(n_0+1)$ は(11)式と表わされる。

$$P^{-1}(n_0+1)A^T(n_0+1)Q^T(n_0+1) = \begin{bmatrix} VWP^{-1}(n_0), & -P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1} \\ -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0), & U^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A^T(n_0)Q^T(n_0) \begin{bmatrix} m_1^T \\ \vdots \\ m_{r-2}^T \end{bmatrix} \\ 0, \dots, 0, m_r^T, m_{r-1}^T \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} VWP^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0) - P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1} \cdot [0, \dots, 0, m_r^T], & VWP^{-1}(n_0)R^T - P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}m_{r-1}^T \\ -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0) + U^{-1} \cdot [0, \dots, 0, m_r^T], & -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0)R^T + U^{-1}m_{r-1}^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、

$$U = (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12}) \quad (13)$$

$$V = \{I + P_{11}^{-1} P_{12} (P_{22} - P_{21} P_{11}^{-1} P_{12})^{-1} P_{21}\}$$

$$= (I + P_{11}^{-1} P_{12} U^{-1} P_{21})$$

$$W = \{I - P^{-1}(n_0) R^T (I + R P^{-1}(n_0) R^T)^{-1} R\}$$

そして、 $n=n_0$ のときの x_1 を $x_1(n_0)$ 、 $\hat{Y}$ を $\hat{Y}(n_0)$ 、 $n=n_0-1$ のときの $\hat{Y}$ を $\hat{Y}(n_0-1)$ 、および、 $n=n_0+1$ のときの x_1 を $x_1(n_0+1)$ 、 $\hat{Y}$ を(12)、(13)式に示す $\hat{Y}(n_0+1)$ とすると(14)式が得られ、 $P^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0)\hat{Y}(n_0)=x_1(n_0)$ であることに注意して(15)式が得られ、これが $n=n_0$ のときの表面プロフィール計測結果で $n=n_0+1$ のときの計測結果を表わす逐次式である。

$$\hat{Y}(n_0+1) = (\hat{Y}^T(n_0), \hat{Y}^T(n_0+1))^T \quad (12)$$

なお、 $\hat{Y}(n_0)$ 、 $\hat{Y}(n_0+1)$ は $n=n_0$ 、 $n=n_0+1$ の位置で r 個ずつ得られる下記の距離測定値である。

$$\tilde{Y}(n_0) = (\tilde{y}_{n_0, n_0}, \tilde{y}_{n_0, n_0+1}, \dots, \tilde{y}_{n_0, n_0+r-1})^T$$

$$\tilde{Y}(n_0+1) = (\tilde{y}_{n_0+1, n_0+1}, \tilde{y}_{n_0+1, n_0+2}, \dots, \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r})^T$$

$$x_1(n_0+1) = P^{-1}(n_0+1)A^T(n_0+1)Q^T(n_0+1)$$

$$\cdot \hat{Y}(n_0+1)$$

$$= \begin{bmatrix} VWP^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0)\tilde{Y}(n_0) \\ -P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}\cdot[0, \dots, 0, m_r^T] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{Y}(n_0-1) \\ \tilde{Y}(n_0) \end{bmatrix} \\ + VWP^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1) \\ -P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1), \\ -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0)\tilde{Y}(n_0) \\ + U^{-1}\cdot[0, \dots, 0, m_r^T] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{Y}(n_0-1) \\ \tilde{Y}(n_0) \end{bmatrix} \\ -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1) \\ + U^{-1}m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{bmatrix} VWx_1(n_0) - P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}m_r^T\tilde{Y}(n_0) \\ + VWP^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1) \\ -P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1), \\ -U^{-1}P_{21}Wx_1(n_0) + U^{-1}m_r^T\tilde{Y}(n_0) \\ -U^{-1}P_{21}WP^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1) \\ + U^{-1}m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x_1(n_0+1) &= \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_2'', y_3'', \dots, y_{n_0+r-2}'')^T \\ y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (I + P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}P_{21})W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} - P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}\{m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \\ -U^{-1}P_{21}W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} + U^{-1}\{m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} - P_{11}^{-1}P_{12}[-U^{-1}P_{21}W\{x_1(n_0) \\ + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} + U^{-1}\{m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\}], \\ -U^{-1}P_{21}W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} + U^{-1}\{m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \end{pmatrix} \quad (16) \\ &= \begin{pmatrix} W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} - P_{11}^{-1}P_{12}y_{n_0+r-1}'' \\ -U^{-1}P_{21}W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} + U^{-1}\{m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \end{pmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

そして、(17)式の上の行から得られる $x_1'' + P_{11}^{-1}P_{12}y_{n_0+r-1}'' = W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\}$ を同じ(17)式の下の方の行の第1項に代入し、ついで y_{n_0+r-1}'' をまとめて(18)式となり、解の個数と条件式の本数が等しいので(18)式は一意解を与え、表面プロフィールの延長メカニズム、つまり、 x_1'', y_{n_0+r-1}'' がどのようにして決定されるかの説明は、これ以降この式に基づく。

$$x_1(n_0+1) = \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} - P_{11}^{-1}P_{12}y_{n_0+r-1}'' \\ (1 + U^{-1}P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1}U^{-1}\{-P_{21}x_1'' + m_r^T\tilde{Y}(n_0) + m_{r-1}^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \end{pmatrix} \quad (18)$$

3.1 x_1'' の決定メカニズム

(18)式の上の行については、
 $x_1(n_0) = P^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0)\tilde{Y}(n_0)$, $WP^{-1}(n_0) = P_{11}^{-1}$
 であることから(19)式となり、

$$\begin{aligned} x_1'' &= W\{x_1(n_0) + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} \\ &\quad - P_{11}^{-1}P_{12}y_{n_0+r-1}'' \\ &= W\{P^{-1}(n_0)A^T(n_0)Q^T(n_0)\tilde{Y}(n_0) \\ &\quad + P^{-1}(n_0)R^T\tilde{Y}(n_0+1)\} - P_{11}^{-1}P_{12}y_{n_0+r-1}'' \\ &= P_{11}^{-1}\{A^T(n_0)Q^T(n_0)\tilde{Y}(n_0) \\ &\quad + R^T\tilde{Y}(n_0+1) - P_{12}y_{n_0+r-1}''\} \quad (19) \end{aligned}$$

そして、(20)式の関係、および、

$P_{11} = A(n_0)^T Q^T(n_0) Q(n_0) A(n_0) + R^T R$ であることに注意して(21)式が得られる。

3. 計測結果延長の仕組み

この章では、前章で得られた逐次式(15)に基づき、測定ヘッドの走行が進み計測点数が増加するときの表面プロフィールの延長メカニズムを説明する。

さて、 $x_1(n_0) = (y_2'', y_3'', \dots, y_{n_0+r-2}'')^T$ を $n = n_0$ のときの解、そして、 $n = n_0 + 1$ のときの解を

$$\begin{aligned} x_1(n_0+1) &= (y_2'', y_3'', \dots, y_{n_0+r-2}'', y_{n_0+r-1}'')^T \\ &= (x_1''^T, y_{n_0+r-1}'')^T \end{aligned}$$

ただし、 $x_1'' = (y_2'', y_3'', \dots, y_{n_0+r-2}'')^T$

とし、 $V = (I + P_{11}^{-1}P_{12}U^{-1}P_{21})$ の関係を用いて(15)式は(16)式となり、ここで、上の行の第2項の[]内が y_{n_0+r-1}'' に等しいことから(17)式となる。

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r^T m_r \\ m_{r-1}^T m_r + m_{r-2}^T m_{r-1} \\ \vdots \\ m_{r-1}^T m_r + m_{r-2}^T m_{r-1} \end{bmatrix}$$

$$= A^T(n_0)Q^T(n_0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_1^T \\ \vdots \\ m_{r-2}^T \end{bmatrix} m_{r-1} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x_1'' &= P_1^{-1} \{ A^T(n_0)Q^T(n_0)\hat{Y}(n_0) + R^T\tilde{Y}(n_0+1) \\ &\quad - A^T(n_0)Q^T(n_0) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} \cdot y_{n_0+r-1}'' \\ &\quad - R^T m_{r-1} \cdot y_{n_0+r-1}'' \} \\ &= \left\{ (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \times (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \hat{Y}(n_0) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} \cdot y_{n_0+r-1}'' \\ \tilde{Y}(n_0+1) - m_{r-1}y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

よって、 x_1'' は連立方程式(22)の最小 2 乗解であり、両辺の差をとったとき、残差の 2 乗和を最小とする。

$$\begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} x_1'' = \begin{pmatrix} \hat{Y}(n_0) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} \cdot y_{n_0+r-1}'' \\ \tilde{Y}(n_0+1) - m_{r-1}y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} \quad (22)$$

このとき、 $\gamma(p)$ を(23)式のように定義すると、(24)式に示す $Q(n_0)\tilde{A}(n_0)$ の各列 q_j ($j=1, \dots, n_0+r-1$) は(25)式の関係にあることが知られており¹⁾、(26)式が得られる。

$$\frac{\{(n_0+r-1)-p\}y_1'' + (p-1)y_{n_0+r-1}''}{(n_0+r-1)-1} = \gamma(p) \quad (p=1, 2, \dots) \quad (23)$$

$$Q(n_0)\tilde{A}(n_0) = \begin{bmatrix} m_1, m_2, \dots, m_r, & & & \\ & m_1, \dots, & m_r, & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_1, \dots, m_r, \\ & & & & m_1, \dots, m_{r-1}, m_r \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & 0 \\ & q_1\gamma(1) + q_2\gamma(2) + \dots + q_{n_0+r-2}\gamma(n_0+r-2) \\ & + q_{n_0+r-1}\gamma(n_0+r-1) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & y_{n_0+r+1}'' \\ q_{n_0+r-1}\gamma(n_0+r-1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} \cdot y_{n_0+r-1}'' \\ &= -(q_2, q_3, \dots, q_{n_0+r-2}) \begin{bmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{bmatrix} \\ & \quad Q(n_0)A(n_0) \end{aligned} \quad (26)$$

また、 $Q(n_0+1)\tilde{A}(n_0+1)$ についても、(25)式で n_0 を n_0+1 と増加しただけの関係が同様に成立し、その最下段に注目して(27)式が得られ、変形して(28)式となり、(22)式の両辺の差をとって(26)、(28)式を用いると(29)式が得られる。

$$\begin{aligned} & m_1\gamma(n_0+1) + m_2\gamma(n_0+2) + \dots + m_{r-2}\gamma(n_0+r-2) \\ & + m_{r-1}\gamma(n_0+r-1) + m_r\gamma(n_0+r) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & y_{n_0+r+1}'' \\ m_{r-1}y_{n_0+r-1}'' &= -(m_1, m_2, \dots, m_{r-2}) \\ & \cdot \begin{bmatrix} \gamma(n_0+1) \\ \gamma(n_0+2) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{bmatrix} - m_r\gamma(n_0+r) \\ &= -(0, \dots, 0, m_1, m_2, \dots, m_{r-2}) \\ & \cdot \begin{bmatrix} \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n_0) \\ \gamma(n_0+1) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{bmatrix} - m_r\gamma(n_0+r) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} x_1'' \\ &= \begin{pmatrix} \hat{Y}(n_0) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_r \end{bmatrix} \cdot y_{n_0+r-1}'' \\ \tilde{Y}(n_0+1) - m_{r-1}y_{n_0+r-1}'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' - \begin{bmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$-\begin{pmatrix} \tilde{Y}(n_0) \\ \tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+r) \end{pmatrix} \quad (29)$$

そして、(29)式の残差の2乗和が最小となること、および、 $m_i^T \cdot m_j = m_{i,j}$ であることから成り立つ $R^T = R^T M$ の関係²⁾をも考慮して(30)式が得られ、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_1'' - \begin{bmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} \right\}^{-1} \\ & \quad \cdot (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \tilde{Y}(n_0) \\ M\tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

さらに、逐次形最小2乗法の公式(31)⁴⁾にしたがって(30)式は(32)式となる。

$$\begin{aligned} & \left\{ (F^T, f^T) \begin{pmatrix} F \\ f \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (F^T, f^T) \cdot \begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix} \\ &= (F^T F)^{-1} F^T E + (F^T F)^{-1} f^T (I + f(F^T F)^{-1} f^T)^{-1} \\ & \quad \cdot (e - f(F^T F)^{-1} F^T E) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y_2'' - \gamma(2) \\ y_3'' - \gamma(3) \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' - \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} = x_1(n_0) \\ & + \{A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0)\}^{-1} R^T \{I \\ & + R(A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0))^{-1} R^T\}^{-1} \\ & \cdot \{M\tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+r)-Rx_1(n_0)\} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 $M\tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+r)-Rx_1(n_0)$ については下記のことがわかる。

つまり、(27)式と同等の(33)式の関係、(34)式、および、 $n=n_0$ のときの基準点である第 (n_0+r-1) 計測点の解が³⁾ $y'_{n_0+r-1}=0$ であることから(35)式が得られ、

$$m_r\gamma(n_0+r) = -\{m_1\gamma(n_0+1) + \dots + m_{r-2}\gamma(n_0+r-2) + m_{r-1}\gamma(n_0+r-1)\} \quad (33)$$

$$Rx_1(n_0) = m_1 y'_{n_0+1} + m_2 y'_{n_0+2} + \dots + m_{r-2} y'_{n_0+r-2} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} m_r\gamma(n_0+r) - Rx_1(n_0) &= -\{m_1(y'_{n_0+1} \\ & + \gamma(n_0+1)) + m_2(y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2)) + \dots \\ & + m_{r-2}(y'_{n_0+r-2} + \gamma(n_0+r-2)) \\ & + m_{r-1}(y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1))\} \end{aligned} \quad (35)$$

そして、 $M\tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+r)-Rx_1(n_0)$ は(36)式となる。

$$\begin{aligned} & M\tilde{Y}(n_0+1)+m_r\gamma(n_0+r)-Rx_1(n_0) \\ &= m_1\{\tilde{y}_{n_0+1, n_0+1} - (y'_{n_0+1} + \gamma(n_0+1))\} \\ & \quad + m_2\{\tilde{y}_{n_0+1, n_0+2} - (y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \dots + m_{r-2}\{\tilde{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - (y'_{n_0+r-2} \\ & + \gamma(n_0+r-2))\} + m_{r-1}\{\tilde{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ & - (y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1))\} + m_r \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{aligned} \quad (36)$$

よって、(32)式から(37)式が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y_2'' \\ y_3'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y_2' \\ y_3' \\ \vdots \\ y'_{n_0+r-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\} \\ & + \{A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0)\}^{-1} R^T \{I \\ & + R(A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0))^{-1} R^T\}^{-1} \\ & \cdot M \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n_0+1, n_0+1} - (y'_{n_0+1} + \gamma(n_0+1)) \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+2} - (y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2)) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r-1} - (y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1)) \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

このとき、(37)式の右辺第2項の距離測定値 $\tilde{Y}(n_0+1)$ は、 $y_{n_0+1}, \dots, y_{n_0+r}$ を真の距離、 $\varepsilon_{n_0+1, n_0+1}, \dots, \varepsilon_{n_0+1, n_0+r}$ を偶然誤差として、測定ヘッドの横おれ d_{n_0+1} 、回転 k_{n_0+1} とともに(38)式と表わされ¹⁾、

$$\begin{aligned} & \tilde{Y}(n_0+1) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n_0+1, n_0+1} \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+2} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \tilde{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_{n_0+1} - d_{n_0+1} + r_0 k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} \\ y_{n_0+2} - d_{n_0+1} + (r_0-1)k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+2} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-1} - d_{n_0+1} + (r_0-r+2)k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} \\ y_{n_0+r} - d_{n_0+1} + (r_0-r+1)k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

$M=(m_1, m_2, \dots, m_r)$ の各列が³⁾有する(39)、(40)式の性質¹⁾から各 $\tilde{y}_{i,j}$ に含まれる d_{n_0+1}, k_{n_0+1} は消去され(37)式は(41)式となる。

$$\sum_{j=1}^r m_j = \begin{pmatrix} 0 \\ (r \times 1) \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^r (r_0-j+1)m_j = \begin{pmatrix} 0 \\ (r \times 1) \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y_2'' \\ y_3'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y_2' \\ y_3' \\ \vdots \\ y'_{n_0+r-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\} \\ & + \{A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0)\}^{-1} R^T \{I \\ & + R(A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0))^{-1} R^T\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\cdot M \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} - (y'_{n_0+1} + \gamma(n_0+1)) \\ y_{n_0+2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+2} - (y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2)) \\ \vdots \\ 0 \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} - (y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1)) \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} - y''_{n_0+r-1} \end{pmatrix} \quad (41)$$

ところが、各 $\gamma(p)$ は (23) 式の定義からわかるように、 $n=n_0+1$ のときは第 (n_0+r) 計測点が基準点となるのに伴い第 (n_0+r-1) 計測点の解が $n=n_0$ のときの $y'_{n_0+r-1}=0$ から y''_{n_0+r-1} となることに対応する姿勢変化を表わす要素であり、(41) 式右边第 1 項で $n=n_0$ のときの解 $x_1(n_0)=(y'_2, \dots, y'_{n_0+r-2})^T$ に姿勢変化要素である $(\gamma(2), \dots, \gamma(n_0+r-2))^T$ を加えると、 $x_1(n_0)$ は第 (n_0+r) 計測点が基準点であることに合わせた姿勢となる (Fig. 1 参照)。そして、右边第 2 項では $y'_{n_0+1} \sim y'_{n_0+r-1}$ の姿勢を上記したと同じく変化させたもの、および、 $y''_{n_0+r}=0$ と距離測定値 $\bar{Y}(n_0+1)$ とを比較し、走行ガタ要素を除去した後のそれらの差が 0 ベクトルでなければ、姿勢を変化させただけの右边第 1 項に右边第 2 項による修正が加わって、第 2 から第 (n_0+r-2) 計測点の新たな解 $x'_1=(y'_2, \dots, y'_{n_0+r-2})^T$ となる。

Fig. 1 The move of surface profile according to a shift of base point

したがって、右边第 2 項の比較結果が 0 ベクトルであれば、 $x'_1=(y'_2, \dots, y'_{n_0+r-2})^T$ は $x_1(n_0)=(y'_2, \dots, y'_{n_0+r-2})^T$ の姿勢を基準点の移動に合わせて変化させただけとなり、本質的には同一のプロフィール形状を保つ。

また、(41) 式と (31) 式を比較すると、(41) 式の右边第 2 項は (31) 式で $E=0$ としたときに相当するので、(41) 式は (42) 式とも表わされ、これは (43) 式の残差の 2 乗和が最小となることを意味する。

$$\begin{pmatrix} y''_2 \\ y''_3 \\ \vdots \\ y''_{n_0+r-2} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} y'_2 \\ y'_3 \\ \vdots \\ y'_{n_0+r-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\} + \left\{ (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (A^T(n_0)Q^T(n_0), R^T) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} - (y'_{n_0+1} + \gamma(n_0+1)) \\ y_{n_0+2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+2} - (y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2)) \\ \vdots \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} - (y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1)) \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0) \\ R \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} y''_2 \\ y''_3 \\ \vdots \\ y''_{n_0+r-2} \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} y'_2 \\ y'_3 \\ \vdots \\ y'_{n_0+r-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \gamma(3) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\} \right\} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} - (y'_{n_0+1} + \gamma(n_0+1)) \\ y_{n_0+2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+2} - (y'_{n_0+2} + \gamma(n_0+2)) \\ \vdots \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} - (y'_{n_0+r-1} + \gamma(n_0+r-1)) \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \quad (43)$$

そして、 $R=(0, \dots, 0, m_1, m_2, \dots, m_{r-2})$ 、および、 $\gamma(n_0+r-1)=y''_{n_0+r-1}$ 、 $y'_{n_0+r-1}=0$ 、 $y''_{n_0+r}=0$ に注意して (43) 式は (44) 式と変形される。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0), & 0 \\ 0, & (m_1, m_2, \dots, m_r) \end{pmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y_2'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} y_2' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\}, \\ \begin{pmatrix} y_{n_0+1}'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \\ y_{n_0+r-1}'' \\ y_{n_0+r}'' \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} y_{n_0+1}' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}' \\ y_{n_0+r-1}' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(n_0+1) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \\ \gamma(n_0+r-1) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} - (y_{n_0+1}' + \gamma(n_0+1)) \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-2} - (y_{n_0+r-2}' + \gamma(n_0+r-2)) \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} - (y_{n_0+r-1}' + \gamma(n_0+r-1)) \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} Q(n_0)A(n_0), & 0 \\ 0, & (m_1, m_2, \dots, m_r) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} y_2'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \\ y_{n_0+r-1}'' \\ y_{n_0+r}'' \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} y_2' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \end{pmatrix} \right\} \\ \begin{pmatrix} y_{n_0+1}'' \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2}'' \\ y_{n_0+r-1}'' \\ y_{n_0+r}'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (44)
\end{aligned}$$

つまり, (41)式について述べたと同様に第2から第 (n_0+r-2) 計測点の $n=n_0$ のときの解 $x_1(n_0)$ を姿勢変化させて $(y_2'', \dots, y_{n_0+r-2}'')^T$ との差をとると同時に, $(y_{n_0+1}'', \dots, y_{n_0+r}'')^T$ と距離測定値 $\tilde{Y}(n_0+1)$ から測定ヘッドの走行ガタ要素を除去したものとの差をとり, それぞれ重み行列 $Q(n_0)A(n_0)$, M が掛けられた形で残差の2乗和を最小とするように x_1'' が決定される.

3.2 y_{n_0+r-1}'' の決定メカニズム

(18)式の下のは行は, $U = P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}$ であることから(45)式が成り立つこと, および, (46)式の関係を考えるすると(47)式となり,

$$\begin{aligned}
(1 + U^{-1}P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})^{-1}U^{-1} &= \{1 + U^{-1}(P_{22} - U)\}^{-1}U^{-1} \\
&= P_{22}^{-1}UU^{-1} = P_{22}^{-1} = (m_r^T m_r + m_{r-1}^T m_{r-1})^{-1} \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{21} &= (0, \dots, 0, m_{r,1}, \dots, m_{r,r-2}, m_{r,r-1}) \\
&+ (0, \dots, 0, m_{r-1,1}, \dots, m_{r-1,r-3}, m_{r-1,r-2}) \quad (46)
\end{aligned}$$

$$y_{n_0+r-1}'' = (m_r^T m_r + m_{r-1}^T m_{r-1})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ m_r^T \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0, n_0} - y_{n_0}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + m_{r-1}^T \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0+1, n_0+1} - y_{n_0+1}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \right\} \\
& = \left\{ (m_r^T, m_{r-1}^T) \begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (m_r^T, m_{r-1}^T)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0, n_0} - y_{n_0}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0+1, n_0+1} - y_{n_0+1}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (47)
\end{aligned}$$

$m_i^T \cdot m_j = m_{i,j}$ であることから成り立つ $m_r^T M = m_r^T, m_{r-1}^T \cdot M = m_{r-1}^T$ の関係をも考慮して(48)式となる.

$$y_{n_0+r-1}'' = \left\{ (m_r^T, m_{r-1}^T) \begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot (m_r^T, m_{r-1}^T)$$

$$\begin{aligned}
& M \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0, n_0} - y_{n_0}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0+1, n_0+1} - y_{n_0+1}'' \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - y_{n_0+r-2}'' \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (48)
\end{aligned}$$

よって, (48)式で表わされる解 y_{n_0+r-1}'' は連立方程式

(49) の最小 2 乗解である.

$$\begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} y''_{n_0+r-1} = \begin{bmatrix} M \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0, n_0} - y''_{n_0} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \\ M \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0+1, n_0+1} - y''_{n_0+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$= \begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} y''_{n_0+r-1} = \begin{bmatrix} M \cdot \begin{pmatrix} -\gamma(n_0) \\ \vdots \\ -\gamma(n_0+r-2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ M \cdot \begin{pmatrix} -\gamma(n_0+1) \\ \vdots \\ -\gamma(n_0+r-2) \\ 0 \\ -\gamma(n_0+r) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (51)$$

そして, (49) 式の両辺の差をとり, (27) 式と同様に $Q(n_0+1)\tilde{A}(n_0+1)$ の各列の性質から得られる (50) 式を変形した (51) 式を用いると (52) 式となり, (39), (40) 式に示す M の各列の性質から各 $\hat{y}_{i,j}$ に含まれる d_i, k_i は消去され, $y''_{n_0+r}=0$ であることに注意して (53) 式となり, その残差の 2 乗和は最小となる.

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \end{pmatrix} \gamma(n_0) + \begin{pmatrix} m_2 \\ m_1 \end{pmatrix} \gamma(n_0+1) + \dots + \begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} \gamma(n_0+r-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ m_r \end{pmatrix} \gamma(n_0+r) = 0 \quad (50)$$

y''_{n_0+r-1}

$$\begin{bmatrix} M \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0, n_0} - y''_{n_0} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ \hat{y}_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \\ M \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{n_0+1, n_0+1} - y''_{n_0+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r-1} \\ \hat{y}_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} m_r \\ m_{r-1} \end{pmatrix} y''_{n_0+r-1}$$

$$= \begin{bmatrix} M \cdot \begin{pmatrix} y_{n_0} - d_{n_0} + r_0 k_{n_0} + \varepsilon_{n_0, n_0} - y''_{n_0} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} - d_{n_0} + (r_0 - r + 2) k_{n_0} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} - d_{n_0} + (r_0 - r + 1) k_{n_0} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-1} \\ y_{n_0+1} - d_{n_0+1} + r_0 k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} - y''_{n_0+1} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} - d_{n_0+1} + (r_0 - r + 3) k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-2} - y''_{n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} - d_{n_0+1} + (r_0 - r + 2) k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} \\ y_{n_0+r} - d_{n_0+1} + (r_0 - r + 1) k_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} \\ M \cdot \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0, n_0} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M \cdot \begin{pmatrix} \gamma(n_0) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \\ 0 \end{pmatrix} \\ M \cdot \begin{pmatrix} \gamma(n_0+1) \\ \vdots \\ \gamma(n_0+r-2) \\ 0 \\ \gamma(n_0+r) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$= \begin{bmatrix} M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} y_{n_0} + \varepsilon_{n_0, n_0} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0, n_0+r-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y''_{n_0} - \gamma(n_0) \\ \vdots \\ y''_{n_0+r-2} - \gamma(n_0+r-2) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} y_{n_0+1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+1} \\ \vdots \\ y_{n_0+r-2} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-2} \\ y_{n_0+r-1} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r-1} \\ y_{n_0+r} + \varepsilon_{n_0+1, n_0+r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y''_{n_0+1} - \gamma(n_0+1) \\ \vdots \\ y''_{n_0+r-2} - \gamma(n_0+r-2) \\ 0 \\ y''_{n_0+r} - \gamma(n_0+r) \end{pmatrix} \right\} \end{bmatrix} \quad (53)$$

つまり, $(y''_{n_0}, \dots, y''_{n_0+r-2})^T$ および $(y''_{n_0+1}, \dots, y''_{n_0+r-2}, y''_{n_0+r})^T$ から (23) 式で定義される姿勢変化要素 $(\gamma(n_0), \dots, \gamma(n_0+r-2))^T$ および $(\gamma(n_0+1), \dots, \gamma(n_0+r-2), \gamma(n_0+r))^T$ を引くことで, 前章で述べたとは逆に $n=n_0+1$ のときの解を $n=n_0$ のときは第 (n_0+r-1) 計測点が基

準点であることに合わせた姿勢に戻し, その状態で距離測定値 $\tilde{Y}(n_0), \tilde{Y}(n_0+1)$ から測定ヘッ드의走行ガタ要素を除去したものとの差をとり, それぞれ重み行列 M が掛けられた形で残差の 2 乗和を最小とするように y''_{n_0+r-1} が決定される.

以上で x'_i, y''_{n_0+r-1} がどのようにして決定されるかに関する究明が完了し, $x_i(n_0+1)$ は (44), (53) 式の残差の 2 乗和が最小となるように設定された連立方程式 (18) の一意解であることが, 測定ヘッドの走行が進み計測点が増加する際の表面プロフィール計測結果の延長メカニズムであると判明した。

4. ま と め

逐次多点法による表面プロフィール計測方法の逐次解法を導き, その結果に基づいて計測点が増加する際に表面プロフィール計測結果がどのようにして延長されるかが解明され, この点に関しては下記 (I), (II) の事実も明らかとなった。

- (I) $n = n_0 + 1$ のときの解 $x_i(n_0 + 1)$ の決定に陽に関与する距離測定値は, $n = n_0, n_0 + 1$ の位置で得られる $\bar{Y}(n_0), \bar{Y}(n_0 + 1)$ のみである。
- (II) $n = n_0 + 1$ の位置での距離測定値 $\bar{Y}(n_0 + 1)$ から測定ヘッドの走行ガタ要素を除去したものが, $n = n_0 + 1$ のときは基準点が第 $(n_0 + r - 1)$ 計測点から第 $(n_0 + r)$ 計測点に移ることに合わせて $n = n_0$ のときの解 $x_i(n_0)$ を姿勢変化させたものと完全に符合するものでない場合, $x_i(n_0)$ は基準点の移動に対応する姿勢変化のみならず, 実質的な変形も受けて x'_i となり, 新たに求まる y''_{n_0+r-1} とともに $n = n_0 + 1$ のときの解 $x_i(n_0 + 1)$ を構成する。

参 考 文 献

- 1) 田村, 平, 阪本: 逐次多点法による表面プロフィール計測方法, 計測自動制御学会論文集, 25-5, 509/516 (1989)
- 2) 平卯太郎: 逐次多点法による表面プロフィール計測方法—計測時間の短縮—, 計測自動制御学会論文集, 27-5, 509/515 (1991)
- 3) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 38/43, 計測自動制御学会 (1978)
- 4) 田島, 小牧: 最小 2 乗法の理論とその応用, 309/339, 東洋書店 (1986)

《付録 I ブロック行列の逆行列公式適用可能証明》

(証明) 公式 (8) が適用可能である必要十分条件は下記の (a), (b) 2 項目であり³⁾,

(a) $P(n_0 + 1)$ が正則である。

(b) $(1, 1)$ ブロック $P_{11} = P(n_0) + R^T R$ が正則である。

(a) については, n の値にかかわらず $P(n)$ が正則であることがすでに証明されている¹⁾。

また, (b) については, $P(n_0) + R^T R$ が (A 1) 式に示すように, 第 2 章の (4) 式に示した QA の最後の列を消去圧縮して得られる, 行列 S とその転置 S^T との積に分解できるグラム行列であり, QA の任意の 1 列を消去圧縮して得られる行列の各列は 1 次独立であることがすでに示されているので¹⁾ S の各列は 1 次独立, よって, $P_{11} = P(n_0) + R^T R = S^T S$ は正則である。

以上で (a), (b) が確認され公式適用の条件の成立が示された。

$$P(n_0) + R^T R = S^T S \quad (\text{A } 1)$$

《付録 II 逆行列の補助公式適用可能証明》

(証明) 公式 (9) が適用可能である必要十分条件は下記 (c), (d) の 2 項目であり⁴⁾,

(c) $P(n_0)$ が正則である。

(d) $I + RP(n_0)^{-1}R^T$ が正則である。

(c) については, n の値にかかわらず $P(n)$ が正則であることがすでに証明されている¹⁾。

また, (d) については, $P(n_0)$ はその定義 $P(n_0) = A^T(n_0)Q^T(n_0)Q(n_0)A(n_0)$ から半正定であり, 加えて正則でもあるので, $P(n_0)$ は正定である。したがって, 任意の R に対して $RP(n_0)^{-1}R^T$ は半正定, よって, $I + RP(n_0)^{-1}R^T$ は正定であり, 正則である。

以上で (c), (d) が確認され公式適用の条件の成立が示された。

[著 者 紹 介]

平 卯太郎 (正会員)

(Vol. 28, No. 2 参照)