先験情報を利用した未知曲面 形状計測における基底関数の最適化

田中正吾*・山根健治**・沖田 豪*

Optimal Basis Functions in Curved Surface Measurement Using a Priori Information

Shogo TANAKA*, Kenji YAMANE** and Tsuyoshi OKITA*

Unknown curved surface can be estimated by a linear combination of a set of adequate basis functions. This paper determines the optimal basis functions for the estimation of the unknown surface of a powder-body for the case where a priori information is available.

The determination is considered from two aspects. The first is the difference depending on the number of the observations available. The second is that depending on whether we consider a pure estimation of the curved surface or an accurate measurement of the unknown volume of the powder-body.

Key Words: unknown curved surface, surface measurement, optimal basis functions, a priori information

1. 緒 言

著者らは、先に、形状計測の一環として、バージ積載土量計測システムなるものを開発・提案した¹⁾。これは、海上空港(先の例でいえば関西新国際空港)のための人工島建設に当たってはバージ(土運搬船)により一度に4,000~5,000 m³前後の膨大な土砂量を運ぶ必要があり、そのため工事を円滑に進めるために人手によらず自動化された土量計測システムを開発する必要があったからである。本システムは、光波式距離センサ、超音波センサなどによりバージの位置決めを行い、同時に光波式距離センサによりバージ積載土面上をステップ・モータにより走査し、得られた走査データを関数空間的にフィルタし、積載土体積を算出するものであった。この方式により、これまで天候の良いときのみ人海戦術で行われていた計測(20~30分間)が昼夜、風雨時を問わず、自動的に、かつ短時間(2~3分間)に行われるようになり、かつ測定精度も格段に上がった。これは、提案方式では全データに一括フィルタをかけ、その後推定土面を

積分し体積を算出するのに対し、従来の計測方式では、データ数が少ないのに加えて、体積計算にシンプソン法を採用したため、各ブロックごとの体積計算誤差が累積する欠点があったからである。

提案方式でのフィルタリングであるが、これは未知土面形状関数を中心が正三角格子状に配置された数多くのガウス型関数の一次結合で近似、推定するというものである。これは、ベルトコンベヤによってバージに積載、堆積される土面形状を考慮に入れたからである。当初、余裕をみて多めのガウス型基底関数を採用し、これらの一次結合により土面形状を推定していたが、土面測定を重ねるに伴い土面形状に関し多くの情報が得られてきた。したがって、これまでに得られた土面形状に関する知識を先験情報とし、これに基づき今後土面形状推定を行う際の最適な基底関数(数も含めて)を決定すれば、一層高精度な積載土体積測定が行えることが期待できる。

本稿では、このように未知形状に対し先験情報が与えられているときの最適な基底関数の決定を、その展開のための項数も含めて考察する。なお本考察は、上記バージ積載土面のみでなく、石炭やセメントを初めとする任意の粉体原材料の形状あるいはその応用としての体積測定に利用できるもので、以下の議論では一般的に走査データを利用できるときの粉体形状測定として一般的に議論

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

** 宇部工業高等専門学校 宇部市常盤台

* Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube

** Ube Technical College, Ube

(Received December 20, 1991)

(Revised May 6, 1992)

を展開することにする。

2. 問題の記述

いま、未知形状関数 $f(x, y)$ が (x, y) 平面内の領域 S 上で定義されており、この未知関数(以下、形状を省略することもある) $f(x, y)$ に対して、つぎのような観測データが利用できるものとする。

$$z_j = f(x_j, y_j) + \epsilon_j; (x_j, y_j) \in S \quad (1 \leq j \leq N) \quad (1)$$

ここで、 ϵ_j は平均ゼロ、分散 σ^2 の白色ガウス雑音である。

この $f(x, y)$ の推定に際し、 $f(x, y)$ に似かよった多くの形状を基底関数 $g_i(x, y)$ ($1 \leq i \leq M$) の一次結合

$$f^+(x, y) \cong \sum_{i=1}^M c_i g_i(x, y) \quad (2)$$

として推定することにより、展開係数ベクトル $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_M)^T$ に対し

$$E[\mathbf{c}] = \boldsymbol{\mu} \quad (3)$$

$$E[(\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})^T] = \Sigma \quad (4)$$

なる形で先験情報が利用できるものとする。ここに、 E は期待値を表わす。もちろん、展開係数ベクトル $\mathbf{c}$ の推定は、最小二乗法

$$\min_{\{c_i\}} \sum_{j=1}^N \left\{ z_j - \sum_{i=1}^M c_i g_i(x_j, y_j) \right\}^2 \quad (5)$$

によっている。

本稿で考える問題は、展開係数ベクトル $\mathbf{c}$ に対する先験情報(3),(4)式を利用することにより、(5)式と同様な最小二乗規範の下で未知関数 $f(x, y)$ を推定するとき、平均二乗誤差を最小にする最適基底関数を(展開項数も含めて)決定することである。以下では、このことを観測データが十分密に得られている場合とそうでない場合とに分けて順次考察する。さらに、上述の形状計測の場合と体積測定を念頭においた形状計測の場合とでは、どのような差異が現れるのかについてもあわせて検討する。

3. 観測が密な場合の基底関数の決定

展開係数ベクトル $\mathbf{c}$ の平均値 $\boldsymbol{\mu}$ からの差を

$$\tilde{\mathbf{c}} \triangleq \mathbf{c} - \boldsymbol{\mu} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_M)^T \quad (6)$$

とおくと、未知形状関数 $f(x, y)$ は

$$f(x, y) \cong \sum_{i=1}^M \mu_i g_i(x, y) + \sum_{i=1}^M \tilde{c}_i g_i(x, y) \quad (7)$$

と表わされる。上式右辺第1項は多くの類似形状の平均 $f^*(x, y)$ を表わし、第2項、すなわち未知形状 $f(x, y)$ と平均形状 $f^*(x, y)$ との差

$$\tilde{f}(x, y) \triangleq \sum_{i=1}^M \tilde{c}_i g_i(x, y) \quad (8)$$

が最終的に推定すべき関数となる。ここで、展開係数ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ は平均値ゼロ、共分散 Σ のランダム変数となる

ため、この確率的振舞いを利用することにより $\tilde{f}(x, y)$ をより正確に推定するための基底関数を決定することができる。以下、基底関数の形およびこれらによる展開表示の際の展開項数の決定を順次考察する。

3.1 基底関数の構造決定

未知形状関数の推定に際し、基底関数を正規直交系と仮定しても何ら一般性を失わない。そこで、後の議論の簡潔さのため、いま領域 S 上で定義された基底関数 $\{g_i(x, y)\}$ を正規直交化してできる基底関数 $\{g_i^0(x, y)\}$ を考える。この正規直交化は、たとえばグラム・シュミットの直交化法により実現でき、 A を適当な上三角行列として次式により得られる(付録1参照)。

$$\begin{aligned} & [g_1^0(x, y), g_2^0(x, y), \dots, g_M^0(x, y)] \\ &= [g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_M(x, y)] A \end{aligned} \quad (9)$$

なお本稿で考える正規直交系とは、 $\int_S f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy = \delta_{ij}$ (ここで、 δ_{ij} はクロネッカの δ 記号) で定義される関数系 $\{f_i(x, y)\}$ をいう。いま、

$$B^T (A^{-1} \Sigma A^{-T}) B = \Lambda, \quad B^T B = I_M \quad (10)$$

なる直交行列 B を用いて新たに

$$\begin{aligned} & [s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_M(x, y)] \\ &= [g_1^0(x, y), g_2^0(x, y), \dots, g_M^0(x, y)] B \end{aligned} \quad (11)$$

なる基底関数系を考えても、得られる $\{s_i(x, y)\}$ は正規直交系である³⁾。なお(10)式において、 Λ は $A^{-1} \Sigma A^{-T}$ の固有値が大きい順に対角成分に並んだ対角行列とする。

$\{s_i(x, y)\}$ 、換言すれば $\{g_i(x, y)\}$ で張られる関数空間を Ω_f と記せば、推定すべき未知形状分 $\tilde{f}(x, y)$ は Ω_f の正規直交基底関数 $\{s_i(x, y)\}$ を用いてつぎのように表わされる。

$$\tilde{f}(x, y) = [s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_M(x, y)] \boldsymbol{\omega} \quad (12)$$

ここで、 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)^T$ は

$$\boldsymbol{\omega} \triangleq B^{-1} A^{-1} \tilde{\mathbf{c}} \quad (13)$$

で定義されるランダム変数であり、 $\tilde{\mathbf{c}}$ の確率的性質および(10)式よりその平均値はゼロ、共分散行列は Λ (対角行列) である。したがって(12)式より、推定すべき未知形状分 $\tilde{f}(x, y)$ を正規直交関数 $\{s_i(x, y)\}$ の一次結合として推定でき、その際 Λ の対角成分が大きい展開係数 ω_i に対応する基底関数 $s_i(x, y)$ ほど重要であることがわかる。換言すれば、 $s_1(x, y), s_2(x, y), \dots$ の順に重要であることがわかる。

3.2 展開項数の決定

前節では、未知形状関数を推定する際、 $s_1(x, y), s_2(x, y), \dots$ の順に重要であることを述べたが、本節では推定の際の最適展開項数について考察する。まず、上位から p 個の Ω_f の基底関数を用いて、 $\tilde{f}(x, y)$ を

$$\tilde{f}(x, y) \cong \sum_{i=1}^p a_i s_i(x, y) \quad (14)$$

で推定することを考える。展開係数 $\{a_i\}$ の推定は、もちろん最小 2 乗法

$$\min_{\{a_i\}} \sum_{j=1}^N \left\{ z_j - (f^*(x_j, y_j) + \sum_{i=1}^p a_i s_i(x_j, y_j)) \right\}^2 \quad (15)$$

による。いま、議論の明確さのため、

$$\tilde{z}_j \triangleq z_j - f^*(x_j, y_j) \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} \triangleq (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_N)^T \quad (17)$$

$$\mathbf{s}_i \triangleq (s_i(x_1, y_1), s_i(x_2, y_2), \dots, s_i(x_N, y_N))^T$$

$$; 1 \leq i \leq M \quad (18)$$

$$\mathbf{S}_k \triangleq [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_k]; 1 \leq k \leq M \quad (19)$$

を定義すると、(15) 式を最小化する展開係数ベクトル $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_p)^T$ 、すなわち $\boldsymbol{\alpha}$ の最適推定値は次式で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_p)^{-1} \mathbf{S}_p^T \tilde{\mathbf{z}} \quad (20)$$

$\tilde{\mathbf{z}}$ は

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{S}_M \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (21)$$

(ただし、 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N)^T$) と表わされるで、(20), (21) 式より

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_p)^{-1} \mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_M \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_p)^{-1} \mathbf{S}_p^T \boldsymbol{\epsilon} \quad (22)$$

と書き表わされる。ここで、 $\{s_i(x, y)\}$ が正規直交関数系であることおよび観測点 $(x_j, y_j) (1 \leq j \leq N)$ が領域 S 内で一様、かつ十分密に分布していることを考慮すると、近似的に、 $\sum_{j=1}^N s_i(x_j, y_j) s_k(x_j, y_j) \Delta S = \int_S s_i(x, y) \times s_k(x, y) dx dy (= \delta_{ik})$ (ただし、 $1 \leq i, k \leq M$) が成り立つので、

$$\mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_p \cong (1/\Delta S) \mathbf{I}_p \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_p^T \mathbf{S}_M \cong (1/\Delta S) [\mathbf{I}_p | \mathbf{O}_{p, M-p}] \quad (24)$$

ただし、 ΔS は領域 S に占める観測点 1 個当たりの面積である。また $\mathbf{I}_p, \mathbf{O}_{p, M-p}$ は、それぞれ p 次の単位行列、 $p \times (M-p)$ 次の零行列である。よって (22) 式は、 $s_{ij} = s_i(x_j, y_j)$ とおけば、(23), (24) 式より

$$\hat{a}_i = \omega_i + (\Delta S) \sum_{j=1}^N s_{ij} \epsilon_j; 1 \leq i \leq p \quad (25)$$

となる。 $\{\epsilon_j\}$ が平均値ゼロ、分散が σ^2 の白色ガウス雑音であることおよび $\{s_i(x, y)\}$ が正規直交関数系であることを考慮すれば、 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は共分散行列として $(\Delta S) \sigma^2 \mathbf{I}_p$ をもつ不偏推定値 (つまり、 $E[\hat{a}_i] = \omega_i (1 \leq i \leq p)$) となる。

以上の結果を用いて、未知形状関数 $f(x, y)$ とその推定形状関数 $\tilde{f}(x, y) = f^*(x, y) + \sum_{i=1}^p \hat{a}_i s_i(x, y)$ との差のノルム二乗平均を計算すると、以下ようになる。

$$E[\|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\|^2]$$

$$= E\left[\int_S \left\{ \sum_{i=1}^M \omega_i s_i(x, y) - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i s_i(x, y) \right\}^2 dx dy\right]$$

$$= E\left[\int_S \left\{ \sum_{i=p+1}^M \omega_i s_i(x, y) \right. \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^p (\hat{a}_i - \omega_i) s_i(x, y) \right\}^2 dx dy \Big]$$

$$\cong \sum_{i=p+1}^M \omega_i^2 + (\Delta S) \sigma^2 p \quad (26)$$

上式右边第 1 項は展開項数を M から p に減じたことによる形状近似誤差を表わし、第 2 項は展開項数 p のときの観測雑音による推定誤差への影響を表わす。

ところで、最適基底関数 $\{s_i(x, y)\}$ に対する展開係数ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は、先験情報から平均値がゼロ、共分散行列が Λ (対角行列) のランダム量であることがわかっているの、上式を先験情報に基づき期待値をとると、

$$E[\|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\|^2] = \sum_{i=p+1}^M \lambda_i + (\Delta S) \sigma^2 p \quad (27)$$

ただし、 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ である。 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \geq 0$ だから、未知形状関数の推定誤差ノルムの 2 乗平均は、 p の増加と共に単調減少する第 1 項と、 p と共に単調増加する第 2 項の和として表わされる。したがって、(27) 式を最小化する最適展開項数 p^* は、 $\lambda_{p+1} \leq (\Delta S) \sigma^2$ なる最小の p で与えられる。これにより、基底関数の低減化を全く行わない場合に比べて、

$$\Delta J = \sum_{i=p^*+1}^M ((\Delta S) \sigma^2 - \lambda_i) \quad (28)$$

だけ未知形状関数の推定誤差ノルムの二乗平均値が低下することになり、より高精度な形状測定が可能になる。

前節では、形状計測の際 $s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_M(x, y)$ の順に重要であることを述べたが、これは

$$[t_1(x, y), t_2(x, y), \dots, t_M(x, y)]$$

$$= [s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_M(x, y)] C \quad (29)$$

(ここで、 C は任意の直交行列) なる任意の正規直交基底関数 $\{t_i(x, y)\}$ を用いて (27) 式左辺を評価したとき、任意の p に対して (27) 式右边より大きくなることから確認できる (詳細は付録 2 参照)。

3.3 体積測定への応用

前節までに述べた形状計測の応用として、未知形状粉体の体積測定が考えられる。ただし、形状計測においては前節で述べたように $s_1(x, y), s_2(x, y), \dots, s_M(x, y)$ の順に重要であるが、体積計算に当たってはこれらの積分値も効いてくるので、優先順位に何らかの差異が出てくることも期待できる。したがって本節では、体積測定を念頭においたときの基底関数 $\{s_i(x, y)\} \in \Omega_f$ の優先順位および最適展開項数などについて検討を加える。

まず基底関数 $\{s_i(x, y)\} \in \Omega_f$ の中から適宜に選ばれた q 個の基底関数 $s_{i_1}(x, y), s_{i_2}(x, y), \dots, s_{i_q}(x, y)$ を用いて、未知形状分 $\tilde{f}(x, y)$ をつぎのように推定することを考える。

$$\tilde{f}(x, y) \cong \sum_{i \in I_v} \beta_i s_i(x, y) \quad (30)$$

ただし、 I_v は集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_q\}$ の意味である。この展開

係数ベクトル $\beta = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_q})^T$ の推定は、前記同様、つぎの最小二乗法

$$\min_{\beta} \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{z}_j - \sum_{i \in I_V} \beta_{i_j} s_i(x_j, y_j) \right\}^2 \quad (31)$$

による。(25)式と同様にして、この最適推定値は

$$\hat{\beta}_i = \omega_i + (\Delta S) \sum_{j=1}^N s_{ij} \epsilon_j; i \in I_V \quad (32)$$

で与えられる。よって、 $\{\epsilon_j\}$ が平均ゼロ、分散 σ^2 の白色ガウス雑音、 $\{s_i(x, y)\}$ が正規直交関数系であることを考慮すると、 $\hat{\beta}$ は共分散 $(\Delta S) \sigma^2 I_q$ (I_q は q 次の単位行列) の不偏推定値となる。

以上の結果を用い、未知形状の真の体積と推定形状の体積の差を求めると

$$\begin{aligned} V - \bar{V} &= \int_S f(x, y) dx dy - \int_S \bar{f}(x, y) dx dy \\ &= \int_S \bar{f}(x, y) dx dy - \int_S \sum_{i \in I_V} \hat{\beta}_i s_i(x, y) dx dy \\ &= \int_S \left[\sum_{i=1}^M \omega_i s_i(x, y) - \sum_{i \in I_V} \hat{\beta}_i s_i(x, y) \right] dx dy \quad (33) \end{aligned}$$

となる。いま、

$$V_i \triangleq \int_S s_i(x, y) dx dy; 1 \leq i \leq M \quad (34)$$

とおき、かつ上記の $\hat{\beta}$ の確率的振舞いを用いると、(33)式より体積測定誤差の二乗平均は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} E[(V - \bar{V})^2] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^M \omega_i V_i - \sum_{i \in I_V} \hat{\beta}_i V_i \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left\{ \sum_{i \in I_V} \omega_i V_i - \sum_{i \in I_V} (\hat{\beta}_i - \omega_i) V_i \right\}^2 \right] \\ &\cong \left(\sum_{i \in I_V} \omega_i V_i \right)^2 + (\Delta S) \sigma^2 \sum_{i \in I_V} V_i^2 \quad (35) \end{aligned}$$

ただし、上式で、 I は整数の集合 $\{1, 2, \dots, M\}$ を、 $I - I_V$ は I に対する I_V の補集合を意味する。第1項が Ω_f の採用しない基底関数に基づく体積測定誤差を、第2項が観測雑音に起因する体積測定誤差を表わす。いま、 $\{\omega_i\}$ についての先験情報、つまり $\{\omega_i\}$ が共分散 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ をもつことを考慮し、期待値操作を行うと

$$\begin{aligned} E[(V - \bar{V})^2] &= \sum_{i \in I_V} \lambda_i V_i^2 + (\Delta S) \sigma^2 \sum_{i \in I_V} V_i^2 \\ &= \sum_{i \in I_V} (\lambda_i - (\Delta S) \sigma^2) V_i^2 + (\Delta S) \sigma^2 \sum_{i \in I} V_i^2 \quad (36) \end{aligned}$$

となる。よって、上式を最小化するという体積測定の観点から基底関数 $\{s_i(x, y)\} \in \Omega_f$ に優先順位をつけると、 $(\lambda_i - (\Delta S) \sigma^2) V_i^2$ の値が大きい順に $s_i(x, y)$ が重要であることになる。ただ体積測定に際し、最適（つまり、(36)式を最小化する）基底関数は右辺第1項の $(\lambda_i - (\Delta S) \sigma^2) (i \in I - I_V)$ を負にするものであり、これは前節同様 $s_i(x, y) (1 \leq i \leq p^*)$ となる。つまり、展開項数も含めて使用すべき基底関数は全く一致するという興味ある結果が得られる。ところが、先験情報に少しの曖昧さを許し、上記で求めた最適展開項数より多めの $(p^* + m)$ 個の基底関数を用いようとしたり、あるいは使用する基底

関数の数を節約しようとする、追加あるいは除去する基底関数は上記優先順位に従わなければならない形状計測における優先順位と異なることに注意すべきである。

4. 観測が粗な場合の基底関数の決定

前章では、議論の明確さのため観測点が領域 S 上に一様に、かつ十分密に分布していると仮定し、最適基底関数の構造および最適な展開項数について論じたが、実際問題ではこの仮定は必ずしも満たされるとは限らない。このときの最適基底関数の構造を決定することは解析的にはなほ困難であるが、(12)式および ω の振舞いから、前章同様 $\{s_i(x, y)\}$ が優先順位も含めて最適あるいは準最適なものとして仮定することは何ら問題がないものと思われる。したがって本章では、 $\{s_i(x, y)\}$ を望ましい基底関数の構造としたときの最適展開項数について検討を加えることにする。

まず簡単のため、体積測定を念頭におかない形状計測の場合を考える。観測点が領域 S 上で粗なため、関係式(23)、(24)が成り立たず、(22)式の展開係数ベクトル $\bar{\alpha}$ は

$$\bar{\alpha} = [I_p | U] \omega + L \epsilon \quad (37)$$

ただし、

$$U \triangleq (S_p^T S_p)^{-1} S_p^T [s_{p+1}, s_{p+2}, \dots, s_M] \quad (38)$$

$$L \triangleq (S_p^T S_p)^{-1} S_p^T \quad (39)$$

ゆえに観測点が粗な場合は密な場合と異なり、 $\bar{\alpha}$ はバイアス $U\bar{\omega}$ をもつ推定値となる。またそのときの共分散は

$$LE[\epsilon \epsilon^T]L^T = \sigma^2 (S_p^T S_p)^{-1} \quad (40)$$

となる。ただし、 $\bar{\omega}$ は

$$\bar{\omega} \triangleq (\omega_{p+1}, \omega_{p+2}, \dots, \omega_M)^T \quad (41)$$

で定義される。いま、

$$S_p^T S_p = (1/\Delta S) \bar{I} \quad (42)$$

とおくと、観測点が粗なため、行列 $U, \bar{I}$ はそれぞれ

$$U \cong O_{p, M-p} \quad (43)$$

$$\bar{I} \cong I_p \quad (44)$$

となる（観測が密な場合、厳密に $U = O_{p, M-p}, \bar{I} = I_p$ ）。よって、推定値のバイアスと共分散の変化が未知形状関数の推定誤差に影響を与え、3.2節に準じて誤差ノルム2乗平均値を計算すると、詳細は省くが次式となる。

$$\begin{aligned} E[\|f(x, y) - \bar{f}(x, y)\|^2] &= \sum_{i=p+1}^M \omega_i^2 \\ &\quad + (U\bar{\omega})^T (U\bar{\omega}) + (\Delta S) \sigma^2 \text{tr}[\bar{I}^{-1}] \quad (45) \end{aligned}$$

ここに、 $\text{tr}[\cdot]$ は行列のトレース(trace)を表わす。上式を先験情報について期待値をとれば、 u_{ij} を U の (i, j) 要素として

$$\begin{aligned} E[\|f(x, y) - \bar{f}(x, y)\|^2] &= \sum_{i=p+1}^M \lambda_i \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^M \lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^N u_{ji}^2 \right\} + (\Delta S) \sigma^2 \text{tr}[\bar{I}^{-1}] \quad (46) \end{aligned}$$

上式第 2 項目が α のバイアス性によって新たに生じた付加項を表わす。また第 3 項は、(27)式第 2 項に対応する観測雑音による測定誤差分を表わす。このように、未知形状推定誤差の平均 2 乗ノルムは 3.2 節の (27) 式と若干異なるため、観測点が粗なとき最適展開項数は必ずしも $\lambda_{p+1} \leq (\Delta S)\sigma^2$ なる最小の p で与えられることはない。したがって、最適展開項数 p^* の決定に当っては、前述の解析解 p^* を参考に数値的に求めなくてはならない(数値例参照)。

つぎに、体積測定を念頭においたときの (46) 式に相当する評価関数であるが、これは上と同様な計算により次式となる(詳細は略)。

$$E[(V - \hat{V})^2] = \sum_{i \in I_w} \lambda_i \left(V_i - \sum_{j \in I_w} F_{ij} V_j \right)^2 + (\Delta S)\sigma^2 \sum_{i, j \in I_w} \tilde{I}_{ij}^{-1} V_i V_j \quad (47)$$

ここで、 $\tilde{I}$ は採用する基底関数を $s_i(x, y) (i \in I_w)$ (ただし、 $I_w = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$) としたときの (42) 式に相当する行列を意味する。また行列 F は、採用の基底関数を $\{s_i(x, y); i \in I_w\}$ 、不採用の基底関数を $\{s_i(x, y); i \in I - I_w\}$ としたときの (38) 式に相当する行列である。もちろん、 $\tilde{I}^{-1}$ 、 F_{ij} はそれぞれ行列 $\tilde{I}^{-1}$ 、 F の (i, j) 要素を表わす。本評価式は (36) 式に類似した形になっていることがわかる。つまり、第 1 項は不採用の基底関数による測定誤差分を、また第 2 項は観測雑音による測定誤差分を表わす。

4. 数 値 例

ここでは、形状計測に際し (46) 式によって求めた最適展開項数 p^* が、観測点数が多いと仮定して得た (27) 式の解析解 p^* とどのように異なるかを検討した。ただし、領域 $S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ とし、使用する Ω_f の基底関数 $\{s_i(x, y)\}$ としては、 $\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$ をグラム・シュミットの直交化法により正規直交化して得た関数系を考えた³⁾。なお、 $\{s_i(x, y)\}$ の不確定さを表わす $\{\lambda_i\}$ は、 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}\} = \{0.04, 0.03, 0.023, 0.017, 0.013, 0.009, 0.007, 0.005, 0.003, 0.001\}$ とした。このときの最適展開項数 p^* と (27) 式による(観測点が十分多いとしたときの)解析解 p^* とを各観測点数に対し比較したものを Fig. 1 に示す。図より、観測点が多ければ $p^* \approx p^*$ となるが、観測点数が減少するに伴い p^* 、 p^* が遠ざかる傾向が見られる。以上のことから、観測点数が比較的多ければ、ほぼ $p^* \approx p^*$ であり、最適展開項数 p^* の決定に (27) 式の解析解 p^* が参考になる。つまり、最適展開項数 p^* は (27) 式により求まる解析解 p^* の近傍で効率よく数値的に求められることがわかる。このことは、特に基底関数の数が多い場合に有意義な指針となる。

Fig. 1 The numbers of expansion terms p^* , $p^\#$ versus the observation number N

5. 結 言

本論文では、未知曲面形状の形状計測に際し、先験情報が利用できるときの最適な基底関数構造および展開項数に対して考察した。特に未知曲面が定義されている領域内で観測点が十分に分布している場合には、最適な基底関数構造や展開項数に対し解析解が得られることを、またそうでない場合には上述の解の近傍で最適解が数値的に効率よく得られうることを示した。さらに、形状計測の応用として粉体の体積測定を念頭においたときの最適な基底関数の構造や展開項数についてもあわせて検討し、上述したこととほぼ同様な解が得られることを示した。

参 考 文 献

- 1) 田中, ほか: パージ積載土量の自動計測について, 電気学会論文誌, **110**-D-3, 234/241 (1990)
- 2) 辻, 田中: 未知関数推定に関する情報理論的考察, 電気学会論文誌, **94**-C-5, 97/104 (1974)
- 3) 末岡清市: 級数及び直交関数系, コロナ社 (1973)
- 4) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices, Chelsea (1959)
- 5) D. G. Luenberger: Optimization by Vector Space Methods, John-Wiley & Sons (1969)
- 6) R. E. Bellman: Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill (1960)

＜付 録＞

付録 1. $f_i(x, y)$ と $f_j(x, y)$ の内積記号を

$$(f_i, f_j) \triangleq \int_S f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy \quad (A.1)$$

とする。このとき、基底関数 $\{g_i(x, y)\}$ の正規直交化をグラム・シュミットの正規直交化法^{3)~5)}にそって行くと、

$$g_i^0 = \frac{1}{\sqrt{G(g_1, g_2, \dots, g_{i-1})G(g_1, g_2, \dots, g_i)}} \times \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & \dots & (g_1, g_{i-1}) & g_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_{i-1}, g_1) & \dots & (g_{i-1}, g_{i-1}) & g_{i-1} \\ (g_i, g_1) & \dots & (g_i, g_{i-1}) & g_i \end{vmatrix}; 1 \leq i \leq M \quad (\text{A.2})$$

なる関数系 $g_i^0(x, y)$ ($1 \leq i \leq M$) で一つの正規直交基底が得られることになる。ここに、 $G(\cdot, \cdot, \cdot)$ はグラム行列式を意味し、たとえば $G(g_1, g_2, \dots, g_i)$ は g_j ($1 \leq j \leq i$) に関するグラム行列式、すなわち (g_p, g_q) ($1 \leq p, q \leq i$) 要素とする $i \times i$ 行列の行列式を表わす。また、 $|\cdot|$ は行列式をとることを意味する。

(A.2)式を展開し、

$$g_i^0(x, y) = \sum_{j=1}^i a_{ji} g_j(x, y); 1 \leq i \leq M \quad (\text{A.3})$$

とすれば、 $A = [a_{ij}]$ として(9)式の関係式が得られる。
付録2. (29)式の正規直交関数系 $\{t_i(x, y)\}$ の内、最初の p 個の関数 $t_i(x, y)$ ($1 \leq i \leq p$) を用いて、未知形状 $\tilde{f}(x, y)$ を推定することを考えてみる。

$$\tilde{f}(x, y) \cong \sum_{i=1}^p \eta_i t_i(x, y) \quad (\text{A.4})$$

展開係数ベクトル $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)^T$ の推定は最小2乗法により求まり、(22)式に類似した

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = (T_p^T T_p)^{-1} T_p^T S M \boldsymbol{\omega} + (T_p^T T_p)^{-1} T_p^T \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{A.5})$$

が得られる。ただし

$$T_p \triangleq [t_1, t_2, \dots, t_p] \quad (\text{A.6})$$

$$t_i \triangleq (t_i(x_1, y_1), t_i(x_2, y_2), \dots, t_i(x_N, y_N))^T; 1 \leq i \leq p \quad (\text{A.7})$$

観測点が十分密に分布していること、 $\{t_i(x, y)\}$ が正規直交関数系であることおよび(29)式の関係式より

$$T_p^T T_p \cong (1/\Delta S) I_p, \\ T_p^T S M \cong (1/\Delta S) [I_p | O_{p, M-p}] C^T \quad (\text{A.8})$$

が成り立つので、(A.5)式はつぎのようになる。

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = [I_p | O_{p, M-p}] C^T \boldsymbol{\omega} + (\Delta S) \sum_{j=1}^N \bar{\boldsymbol{t}}_p(x_j, y_j) \epsilon_j \quad (\text{A.9})$$

したがって、 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ は平均値 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}^* = [I_p | O_{p, M-p}] C^T \boldsymbol{\omega}$ 、共分散 $(\Delta S) \sigma^2 I_p$ をもつ推定値となる。ここに、 $\bar{\boldsymbol{t}}_k(x, y) = (t_1(x, y), t_2(x, y), \dots, t_k(x, y))^T$ ($1 \leq k \leq M$) の意である。以上の結果を用いて $f(x, y)$ とその推定形状 $\tilde{f}(x, y)$ との差のノルム2乗平均を計算すると、つぎのようになる。

$$E[\|f(x, y) - \tilde{f}(x, y)\|^2] \\ = E\left[\int_S \left\{ \sum_{i=1}^M \omega_i s_i(x, y) - \sum_{i=1}^p \tilde{\eta}_i t_i(x, y) \right\}^2 dx dy\right]$$

$$= E\left[\int_S \left\{ \boldsymbol{\omega}^T C \begin{bmatrix} O_{p, p} & O_{p, M-p} \\ O_{M-p, p} & I_{M-p} \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{t}}_M(x, y) - (\tilde{\boldsymbol{\eta}} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}^*)^T \bar{\boldsymbol{t}}_p(x, y) \right\}^2 dx dy\right] \\ = E\left[\boldsymbol{\omega}^T C \begin{bmatrix} O_{p, p} & O_{p, M-p} \\ O_{M-p, p} & I_{M-p} \end{bmatrix} C^T \boldsymbol{\omega} + (\Delta S) \sigma^2 p\right] \\ = \text{tr}[C_2^T A C_2] + (\Delta S) \sigma^2 p$$

ここに、 C_2 は、 $C = [C_1 | C_2]$ なる $M \times (M-p)$ 行列である。 C は直交行列であるから、 C_2 は $(M-p)$ 個の互いに直交する M 次元正規ベクトルで作られる $M \times (M-p)$ 行列である。上式第1項は $C \neq I_M$ なる上記の任意の行列 C_2 に対して

$$\text{tr}[C_2^T A C_2] \geq \sum_{i=p+1}^M \lambda_i \quad (\text{A.11})$$

となるから⁹⁾、前述の基底関数 $\{s_i(x, y)\}$ は、優先順位も含めて形状計測において最適なものであることがわかる。

[著者紹介]

田中正吾(正会員)

1976年、九州大学大学院工学研究科博士課程(電気工学専攻)修了。同年同大学助手を経て、80年山口大学工学部電子工学科教授。改組に伴い、91年同大学電気電子工学科教授、現在に至る。主に、インテリジェント計測、異常診断などの研究に従事(工学博士)。

山根健治(正会員)

1974年、九州大学大学院修士課程機械工学専攻修了。同年同大学工学部助手、76年学部工業高等専門学校講師を経て、現在同校制御情報工学科助教授。92年より山口大学大学院後期博士課程に在籍(システム工学専攻)。曲面の形状計測などの研究に従事。日本機械学会、電気学会の会員。

沖田豪(正会員)

1964年、東北大学大学院工学研究科(電気および通信専攻)修士課程修了。同年広島大学助手、同講師、同助教授を経て、78年山口大学工学部電子工学科教授、現在に至る。主に、システム同定の研究に従事(工学博士)。電気学会、電子情報通信学会などの会員。