カルマンフィルタを用いた入力推定

佐々修*

Input Estimation by Kalman Filter

Shuichi SASA*

For SISO systems, the problem of input estimation is considered.

The problem is formulated in the ordinary Kalman Filter problem, and estimation accuracy is analysed in conjunction with the measurements' accuracy for an integrator system. Numerical simulation results are presented.

Key Words: input estimation, Kalman filter

1. 緒言

航空機の運動計測などでは角加速度の計測が重要である。角加速度のセンサには高精度なものはないが、その積分情報である角速度センサには高精度なものがある。本稿は高精度な積分情報を利用して低精度な元信号の推定精度を向上させる問題を一般化し、一入力一出力の線形システムにおいて、システム入力と出力が誤差を伴って計測されているときの入力推定の手法を、カルマンフィルタの枠組みで与えるものである。

積分系に本手法を適用し、入力推定精度の解析およびシミュレーションデータによる数値例を示す。

2. 定式化

以下実際のデータ処理との対応から、離散化されたシステムで考える。

1入力1出力系 (U : 入力, Y : 出力) の離散時間表現を

$$Y(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} U(z) \quad \therefore \quad U(z) = \frac{a(z^{-1})}{b(z^{-1})} Y(z) \quad (2.1)$$

とする。ここで

$$a(z^{-1}) = a_p z^{-p} + \dots + a_0 \quad (2.2)$$

$$b(z^{-1}) = b_q z^{-q} + \dots + b_0, \quad b_0 = 1, \quad p \geq q$$

$$\therefore \quad u_n = -b_1 u_{n-1} - \dots - b_q u_{n-q} + a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} \quad (2.3)$$

u_i, y_i の計測値 $\tilde{u}_i, \tilde{y}_i$ はそれぞれノイズ w_i, v_i を含む。

$$u_i = \tilde{u}_i + w_i, \quad y_i = \tilde{y}_i + v_i \quad (2.4)$$

(2.4) 式を (2.3) 式に代入すると

$$\begin{cases} u_n = -b_1 u_{n-1} - \dots - b_q u_{n-q} \\ \quad + a_0 (\tilde{y}_n + v_n) + \dots + a_p (\tilde{y}_{n-p} + v_{n-p}) \\ \tilde{u}_n = u_n - w_n \end{cases} \quad (2.5)$$

状態方程式で表現すると、

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_q \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ a_p & \dots & a_1 & -b_q & \dots & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_q \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_0 \tilde{y}_{n+1} + \dots + a_p \tilde{y}_{n-p+1}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix} v_{n+1}$$

$$\tilde{u}_n = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_q \end{bmatrix}_n - w_n \quad (2.6)$$

$z_1 \sim z_{p-1}, \xi_1 \sim \xi_{q-1}$ は過去の v_i および u_i のための状態変

* 航空宇宙技術研究所 調布市深大寺東町 7-44-1

* National Aerospace Laboratory, Chofu

(Received April 2, 1992)

(Revised May 27, 1992)

数を示す。これは $(a_0 \tilde{y}_{n+1} + \dots + a_p \tilde{y}_{n-p+1})$ を確定入力とするランダムノイズ w_n と v_n を含む確率システムなので、カルマンフィルタが適用可能となり、システム出力および入力の計測値、 $\tilde{y}_{n+1} \dots \tilde{y}_{n-p+1}$ と $\tilde{u}_n$ を用いて入力 u_n が推定できることになる。

(2.6)式は、通常のカルマンフィルタの定式化とは違い、入力の時刻が1ステップ進んでいるが、入力を仮想的に1ステップ遅らせれば、通常と同様に考えることができる。

推定精度の評価には、(2.6)式をシステム方程式と考えて、定常リカッチ方程式から求まる共分散行列を用いる。

3. 適用例(一重積分系への適用)

(1) 定式化

$$y = \frac{1}{s} u \quad (3.1)$$

上記の積分系において、 y と u が計測されているとき、出力 y の計測値を用いて入力 u の推定値を求める問題を考える。(3.1)式で出力から入力への伝達関数はプロパーではないため、安定な離散時間近似システムを得るため、次式の後進差分近似¹⁾を用いる。

$$s \rightarrow \frac{1}{T}(1 - z^{-1}) \quad (3.2)$$

$$\therefore u = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})y \quad \therefore u_n = \frac{1}{T}(y_n - y_{n-1}) \quad (3.3)$$

これは通常の一次の数値微分公式に対応する。

ノイズを考慮すると(3.3)式は(2.4)式より

$$u_n = \frac{1}{T}(\tilde{y}_n + v_n - \tilde{y}_{n-1} - v_{n-1}) \quad (3.4)$$

状態変数 $z_n (= v_n)$ を導入し状態方程式表示すれば

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_{n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(1/T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/T \end{bmatrix} (\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/T \end{bmatrix} v_{n+1} \\ \tilde{u}_n &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} z \\ \xi \end{bmatrix}_n - w_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

(2) 推定誤差の評価

離散型カルマンフィルタの定常誤差共分散により入力 u の推定精度を評価する。(3.5)式のシステム行列を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(1/T) & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/T \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1] \quad (3.6)$$

とし、離散型カルマンフィルタによる推定誤差共分散の定常値 P は次式を連立させて解けば良い²⁾。

$$\begin{cases} P = (M^{-1} + C^T W^{-1} C)^{-1} P : \text{状態推定誤差共分散} \\ M = A P A^T + D V D^T \quad M : \text{状態予測誤差共分散} \end{cases} \quad (3.7)$$

W, V はシステム入出力ノイズの分散で次式とする。

$$E[w_i w_j] = W \delta_{ij}, \quad E[v_i v_j] = V \delta_{ij} \quad (3.8)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

とすれば、(3.5)式の状態変数の定義から P_2 が入力の推定誤差分散を示す。(3.7)式より P_2 が陽に解けて次式となる。

$$P_2 = \frac{-1 + \frac{2V}{T^2 W} + \sqrt{1 + \frac{4V}{T^2 W}}}{1 + \frac{2V}{T^2 W} + \sqrt{1 + \frac{4V}{T^2 W}}} W \quad (3.10)$$

$$P_2^* = \frac{P_2}{W}, \quad V^* = \frac{V}{T^2 W} \quad (3.11)$$

上式のように無次元化すれば、(3.10)式は次式となる。

$$P_2^* = \frac{-1 + 2V^* + \sqrt{1 + 4V^*}}{1 + 2V^* + \sqrt{1 + 4V^*}} \quad (3.12)$$

V^* に対し P_2^* をプロットしたのが Fig. 1 である。

$V^* \ll 1/4$ のとき

$$P_2^* \approx \frac{4V^*}{2 + 4V^*} \approx 2V^* \quad (3.13)$$

すなわちシステム出力計測精度がシステム入力計測精度より相対的に十分良いとき、システム入力の推定精度はシステム出力の計測精度で決まることを示す。ここで右辺の $2V^*$ は、(3.11)式の正規化により、出力計測値の1次差分による数値微分の誤差分散に等しいことがわかる。

$V^* \gg 1/4$ のとき

$$P_2^* \approx \frac{2V^*}{2 + 4V^*} = 1 \quad (3.14)$$

すなわちシステム出力の計測精度がシステム入力の計測精度と比べて相対的に悪いとき、システム入力の推定精度は入力の計測精度で決まることを示す。

Fig. 1 Input estimation accuracy versus output measurement accuracy for integrator system

以上より、入力の計測精度と比べその積分出力の計測精度が良い場合は出力の数値微分の情報を主に利用し、逆の場合は入力計測値の情報を主に利用して、入力の推定精度を向上させていることがわかる。

(3) 数値シミュレーション

入力信号 u とその積分出力 y の変化を正弦波と考え、数値的に発生させた正規性白色ノイズを重畳したシミュレーションデータを用いた入力推定の結果を Fig. 2 に示す。サンプリング周期 0.1 sec, 正弦波の周期 5.0 sec, 入力ノイズの分散 $W=1.0$, 出力ノイズの分散 $V=0.005$ と設定した。

カルマンフィルタに必要なノイズ分散値にはシミュレーションでの真値を用いた。初期推定値は 0, 初期共分散行列は単位行列とした。

この場合 (3.11) 式より $V^*=0.5$ である。Fig. 2(a) は入力計測値(入力推定誤差分散: 1.0027, 実現された入力ノイズ分散に相当), (b) は出力の数値微分(一次微分)(同誤差分散: 1.0606), (c) は本手法による推定値(同誤差分散: 0.4551)となり, 本手法では入力計測値や出力の数値微分より入力推定精度が向上していることがわかる。

上記と同様のシミュレーションで出力ノイズの分散 V を変えて V^* を変化させ, 推定誤差分散値の実測を行った結果を Fig. 1 に + で表記する(フィルタ過渡応答の終わった 10 ステップ以降の誤差分散を, 同じ統計的性質をもつノイズ系列を用いた 5 個のデータでそれぞれ求め, その平均値を示す)。推定誤差がカルマンフィルタで計算される推定誤差分散値にほぼ一致していることがわかる。

4. 結 言

1 入力 1 出力系においてシステム入力を推定する問題を, カルマンフィルタの枠組みで定式化した。

ここでの手法は, センサダイナミクスの影響を受けたセンサ出力信号を用いての, ノイズを含む元信号の平滑化などに有効と考えられる。

実データ処理に当たっては, カルマンフィルタに必要なノイズ分散値, 初期状態推定値, 同共分散値の決め方が重要となる。

連続システムの離散化手法の推定精度への影響の評価, 多入力多出力系への拡張が今後の課題である。

(a) Measured input

(b) Numerical differentiation of output

(c) Proposed method

Fig. 2 Input estimation for simulated data (Broken: True input)

参 考 文 献

- 1) 木村英紀：デジタル信号処理と制御, 58, 産業図書(1982)
- 2) 有本卓：カルマンフィルタ, 71, 産業図書(1978)