分布系の有限次元 VS-MRAC[†]

佐々木 基 文*・早 川 義 一**・藤 井 省 三**

Finite-Dimensional VS-MRAC of Distributed Systems

Motofumi SASAKI*, Yoshikazu HAYAKAWA** and Seizo FUJII**

We present an actual finite-dimensional VS-MRAC (Variable Structure Model Reference Adaptive Control) for an asymptotically stable distributed system (plant) with input and output disturbances and with arbitrary relative degree. First, we construct the ideal finite-dimensional VS-MRAC. Secondly, using this result, we design the actual finite-dimensional VS-MRAC. Main results are that 1) the equivalent controls can be approximated by the average controls, 2) the output error between the plant and the model becomes asymptotically arbitrarily small and that 3) all signals in the closed-loop system is assured to be ultimately uniformly bounded. Finally, we show that the proposed method is effective by the use of a simple numerical example.

Key Words: distributed system, robust control, adaptive control, variable structure system, sliding mode control

1. はじめに

適応制御の実用化をめざして、最近、ロバスト適応制御に関する研究¹⁾が数多く発表されている。そこで取り扱われるプラントは、集中系の場合がほとんどであり、分布系の場合^{2)~4)}はきわめて少ない。

分布系の有限次元適応制御に関する報告^{2),3)}で、Kobayashi²⁾は、適応則として σ 修正則を用い、宮里³⁾は不感帯を伴う適応則を用いている。彼らは共にプラントの相対次数が1である場合を取り扱っている。本論文では、上記と同様の問題を取り扱うが、パラメータ調整則に応答の速い切換え関数を用い、プラントの相対次数が任意である場合を考察する。

最近、VSS理論を用いて良好な制御性能を得る適応制御に関する研究がいくつか^{4)~8)}報告されている。野口ら⁵⁾は集中系に対する低次元適応制御を提案しているが、可調整パラメータのゲインがプラントの次元に依存するため、無限次元系への適用は困難である。

また、そこでは、外乱は取り扱われていない。

HsuらはVSS理論を用いて集中系のVS-MRACに関する報告^{6)~8)}をしている。文献6)では、特異摂動型状態空間表現をもつプラントに対して、unmodeled dynamicsと入力外乱に関してロバストなVS-MRACを構成している。そこでは、プラントの低次元近似モデルの相対次数は1である場合を取り扱っている。文献7),8)では、プラントの相対次数は任意であるが、出力外乱、unmodeled dynamicsは考慮されておらず、制御器の次元は高い。

著者らは先にVSS理論を用いて、分布系に対する有限次元適応制御器の設計法⁴⁾を示した。そこでは、プラントの相対次数が1である場合を取り扱った。

本論文では、外乱を伴う漸近安定な分布系の現実的な有限次元VS-MRACの設計について述べ、プラントの相対次数が任意である場合を取り扱う。ここでは、まず、AraujoとHsu⁸⁾のCompact VS-MRACの方法を拡張し、すなわち、制御器の次元を低減し、規範入力に無関係に理想的なすべりモードがつねに有限時間で達成されるように修正し、入出力外乱を伴う分布系の理想的な有限次元VS-MRAC問題に拡張する。つぎに、この結果を用いて、現実的な有限次元VS-MRACを設計し、これが出力誤差の絶対値を漸近的に任意に小さくでき、閉ループ系の全信号の究極的一様有界性を保証することを述べる。

† 第11回適応制御シンポジウムで発表 (1991・2)

* 富山大学工学部 富山市五福 3190

** 名古屋大学工学部 名古屋市中種区不老町

* Faculty of Engineering, Toyama University, Toyama

** Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received April 30, 1991)

(Revised November 8, 1991)

以下では、まず、問題の定式化を行い、安定解析のための誤差方程式を導く。つぎに、理想的なすべりモード（チャタリング現象が生じない場合）での有限次元 VS-MRAC について述べ、この結果を用いて現実的なすべりモード（チャタリング現象が生じる場合）での有限次元 VS-MRAC について述べる。最後に、数値例によって、本手法の有効性を示す。

2. 問題の定式化

$\Omega \subset R^n$ を有界領域とし、 $L^2(\Omega)$ をすべての 2 乗可積分な実可測関数からなるヒルベルト空間であるとしよう。つぎの $L^2(\Omega)$ 上の微分方程式で記述される漸近安定な未知プラント（分布系）を考える。

$$\dot{u}(t) = -Au(t) + \bar{q}[f(t) + d_f(t)] \quad (1a)$$

$$\bar{y}(t) = cu(t) + d_y(t), \quad c \cdot = (\bar{w}, \cdot) \quad (1b)$$

ここに、 $u(0) = u_0$, $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega)$ の内積、 $u_0, \bar{q}, \bar{w} \in L^2(\Omega)$, A は後に記述される非有界線形作用素、 $f(t) \in R$ は区分的ヘルダー連続な制御入力、 $d_f(t) \in R$ はヘルダー連続な入力外乱で、 $\bar{d}_f(t)$ は一様有界な区分的連続関数族の元、 $d_y(t) \in R$ は後に記述される出力外乱、 $\bar{y}(t) \in R$ は出力である。(1)式で、領域 Ω , A の中に含まれるパラメータ、 A の定義域 $D(A)$ の中の境界条件に含まれるパラメータ、 $\bar{q}, u_0$ および $\bar{w}$ はすべて未知であるとする。また、 $u(t)$, $d_f(t)$ および $d_y(t)$ は測定不能、入出力 $f(t)$ および $\bar{y}(t)$ のみが測定可能とする。 A は $L^2(\Omega)$ で稠密な定義域 $D(A)$ をもつ漸近安定な自己共役作用素で下に半有界、 A のリゾルベントが存在しそれがコンパクトであるとしよう。このとき、(1a)式の一意解が存在⁹⁾する。仮定より、つぎの条件を満たす作用素 A の固有値 λ_k , 固有関数 ϕ_k が存在⁹⁾する。

$$1) \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow +\infty$$

$$2) \quad A\phi_k = \lambda_k \phi_k$$

$$3) \quad \{\phi_k; k=1, 2, \dots\} : L^2(\Omega) \text{ の完全正規直交系}$$

ここで、 A の多重度は 1 であると仮定する。

いま、 $L^2(\Omega)$ 上の直交射影作用素 P, Q をそれぞれ $P \cdot = \sum_{i=1}^n (\cdot, \phi_i) \phi_i$, $Q = I - P$ と定義しよう。これを用いると、(1)式はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{x}_D(t) &= A_D x_D(t) + b_D[f(t) + d_f(t)] \\ \dot{x}_R(t) &= -A_R x_R(t) + b_R[f(t) + d_f(t)] \\ \bar{y}(t) &= \bar{y}_D(t) + \bar{y}_R(t) + d_y(t) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\bar{y}_D(t) = c_D^T x_D(t)$, $\bar{y}_R(t) = c_R^T x_R(t)$, $x_D(t) = [(P u(t), \phi_i)] \in R^n$, $A_D = \text{diag}[-\lambda_i] \in R^{n \times n}$, $b_D = [(P \bar{q}, \phi_i)] \in R^n$, $c_D = [(P \bar{w}, \phi_i)] \in R^n$, $x_R(t) = Qu(t)$, $A_R : A$ の $QD(A)$ への制限、 $b_R = Q\bar{q}$, $c_R \cdot = (Q\bar{w}, \cdot)$ 。

トリプル (c_D^T, A_D, b_D) を dominant part という。これの相対次数 m をつぎのように定義する。

$$m := \min \{i | c_D^T A_D^{i-1} b_D \neq 0; i=1, \dots, n\}$$

ここで、つぎの前提を設ける。

A1) $k_D N(s)/D(s) = c_D^T(sI - A_D)^{-1} b_D$ で、 $D(s)$ は n 次モニック多項式、 $N(s)$ は $(n-m)$ 次モニック漸近安定多項式、 $N(s)$ の零点の実部の最大値の上界の一つ $-\beta_N (< 0)$ は既知とする。また、 $k_D \neq 0$ の符号は既知とし、一般性を失うことなく $k_D > 0$ とする。

$$A2) \quad (P\bar{q}, \phi_i)(P\bar{w}, \phi_i) \neq 0, \quad i=1, \dots, n.$$

有限次元プラントの相対次数の概念を無限次元プラントの場合に拡張し、ここで取扱うプラントの相対次数 m_P をつぎのように定義する。

$$m_P := \min \{i | cA^{i-1}\bar{q} \neq 0; i=1, 2, \dots\}$$

ここに、 $\bar{w} \in D(A^{m_P+1})$ と仮定し、

$$cA^i \cdot := (A^i \bar{w}, \cdot), \quad i \in \{0, 1, \dots, m_P+1\}$$

である。ここで、つぎの前提を設ける。

$$A3) \quad m_P = m.$$

A4) $d_y^{(m+1)}(t)$ は一様有界な区分的連続関数族の元である。 $|d_f(t)|$ の上界の一つ N_{df} は既知とする： $|d_f(t)| \leq N_{df}$ 。

トリプル $(c_R, -A_R, b_R)$ を unmodeled part という。これに対してつぎの前提を設ける。

$$A5) \quad \lambda_{n+1} > \lambda_0 > 0 \text{ を満たす } \lambda_0 \text{ は既知とする。}$$

$$A6) \quad k_D > |c_R A_R^{-1} b_R|$$

A7) $\|b_R\|, \|Qu_0\|$ のそれぞれの上界の一つ N_u, N_u は既知とする： $\|b_R\| \leq N_u, \|Qu_0\| \leq N_u$ 。

前提 A6) は dominant part と unmodeled part の間で満足すべき関係を示す。

規範モデルはつぎのように与えられる。

$$\bar{y}_M(t)/r(t) = k_M/D_M(s) \quad (3)$$

ここに、 $r(t) \in R$ は規範入力で、 $\bar{r}(t)$ は一様有界な区分的連続関数族の元、 $\bar{y}_M(t) \in R$ は規範出力、 $D_M(s)$ は実の零点のみをもつ m 次モニック漸近安定多項式、 $k_M > 0$ である。

本論文の目的は、VSS 理論に基づき、プラントの入出力情報のみを用いて、プラントの出力 $\bar{y}(t)$ が規範モデルの出力 $\bar{y}_M(t)$ にできるかぎり追従するような現実的な有限次元 VS-MRAC を設計することである。

3. 誤差方程式

ここでは、次章の安定解析に必要な誤差方程式を求めよう。(2)式によると、プラントは dominant part に有界な入出力外乱 $d_f(t)$, $d_y(t)$ と事前に有界とはいえない出力外乱 $\bar{y}_R(t)$ が付加されたものと解釈でき

る。したがって、これに従来の適応制御構造¹⁰⁾が導入されてもよいであろう。これを可能にする一つの方法として、プラントの出力をつぎのような 1 次フィルタに通すことが考えられる。

$$y(t) = (s + \alpha)^{-1} \bar{y}(t), \quad \alpha > 0, \quad y(0) = 0 \quad (4)$$

ここで、 $N(-\alpha) \neq 0$ と仮定する。このとき、(2) 式はつぎのような拡大プラントで表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x x(t) + b_x [f(t) + d_f(t)] \\ &\quad + \bar{b}_x [\bar{y}_R(t) + d_y(t)] \\ \dot{x}_R(t) &= -A_R x_R(t) + b_R [f(t) + d_f(t)] \\ \bar{y}_R(t) &= c_R x_R(t) \\ y(t) &= c_x^T x(t) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、

$$A_x = \begin{bmatrix} -\alpha & c_b^T \\ 0 & A_D \end{bmatrix}, \quad b_x = \begin{bmatrix} 0 \\ b_D \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_x^T = [1 \ 0^T]$$

$$x^T(t) = [y(t), x_b^T(t)] \in R^{n+1}, \quad c_x^T = [1 \ 0^T]$$

である。(5) 式では、unmodeled part の出力 $\bar{y}_R(t)$ は事前に有界とはいえない入力外乱になっている点が (2) 式と異なることに注意する。(5) 式に対応して、(3) 式の規範モデルも (4) 式と同じ 1 次フィルタを導入して

$$y_M(t) = (s + \alpha)^{-1} \bar{y}_M(t) = M(s)r(t) \quad (6)$$

と表わしたほうが自然であろう。ここに、 $y_M(0) = 0$ である。これを拡大規範モデルと呼ぶ。

ここで、 $d_f(t) \equiv d_y(t) \equiv \bar{y}_R(t) \equiv 0$ のとき、よく知られている¹⁰⁾ように、前提 A1), A2) のもとで、拡大プラント (5) 式と入力 $f(t) = \theta^{*T} \omega(t)$ を合成した閉ループ系全体の伝達関数は拡大規範モデルの伝達関数 $M(s)$ に一致するような一意な定数ベクトル θ^* が存在する。

ここに、 $\omega(t)$ は、

$$\omega^T(t) := [v_1^T(t), y(t), v_2^T(t), r(t)] \in R^{2n+2}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= A v_1(t) + g f(t), \quad v_1(0) = 0 \in R^n \\ \dot{v}_2(t) &= A v_2(t) + g y(t), \quad v_2(0) = 0 \in R^n. \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、対 (A, g) は可制御、 A は漸近安定。と表わされる。

ここで、合成ベクトルを

$$Y^T(t) := [x^T(t), v_1^T(t), v_2^T(t)] \in R^{3n+1}$$

と定義すると、(5), (7) 式により

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A_Y Y(t) + \bar{b}_Y [f(t) - \theta^{*T} \omega(t)] + b_Y r(t) \\ &\quad + b_Y' d_f(t) + \bar{b}_Y [\bar{y}_R(t) + d_y(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

$$y(t) = h_Y^T Y(t)$$

ここに、 $\bar{b}_Y = b_Y / \theta_{2n+2}^*$, $\theta_{2n+2}^* = k_M / k_D$ 。

が得られる。トリプル (h_Y^T, A_Y, b_Y) は $M(s)$ の一つの非最小表現である。(8) 式に対応して、拡大規範モデ

ルの非最小表現は

$$\begin{aligned} \dot{x}_M(t) &= A_Y x_M(t) + b_Y r(t) \\ y_M(t) &= h_Y^T x_M(t), \quad x_M(t) \in R^{3n+1} \end{aligned} \quad (9)$$

と表わせる。dominant part の拡大状態誤差ベクトルを

$$e(t) := Y(t) - x_M(t)$$

および拡大出力誤差を

$$e_1(t) := y(t) - y_M(t)$$

と定義すると、(8), (9) 式より

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_Y e(t) + \bar{b}_Y [f(t) - \theta^{*T} \omega(t)] + b_Y' d_f(t) \\ &\quad + \bar{b}_Y [\bar{y}_R(t) + d_y(t)] \\ e_1(t) &= h_Y^T e(t) \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。これが求める誤差方程式である。

4. 有限次元 VS-MRAC

ここでは、現実的な有限次元 VS-MRAC を設計し、閉ループ系の安定解析を行う。まず、理想的なすべりモードの場合について述べ、つぎに、現実的なすべりモードの場合について述べる。

4.1 理想的なすべりモードの場合

補助信号 $y_a(t)$ ($y_a(0) = 0$)

$$y_a(t) := M(s)L(s)[f_0(t) + L^{-1}(s)f(t)]$$

およびこれに対応する拡張誤差

$$e_a(t) := y(t) - [y_M(t) + y_a(t)]$$

を導入しよう。ここに、 $L(s)$ は $M(s)L(s) = k_M/(s + \alpha_0)$ を満たすように選ばれ、 $L(s) := L_1(s)L_2(s) \cdots L_m(s)$, $L_i(s) := s + \alpha_i$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ であり、 $f_0(t)$ は補助入力である。

まず、 $e_a(t)$ を $t \geq 0$ で恒等的に零にできることを示そう。(10) 式を用いると、 $e_a(t)$ は

$$e_a(t) = k_M(s + \alpha_0)^{-1} \tilde{f}_0(t) \quad (11)$$

ここに、 $\tilde{f}_0(t) = -f_0(t) + (\rho^{-1} - 1)\chi_0(t) - \rho^{-1}\theta^{*T}\xi_0(t) + \eta_0(t)$, $\rho = \theta_{2n+2}^*$, $\chi_0(t) = L^{-1}(s)f(t)$, $\xi_0(t) = L^{-1}(s)\omega(t)$, $\eta_0(t) = L^{-1}(s)d_0(t)$, $d_0(t) = M^{-1}(s)h_Y^T(sI - A_Y)^{-1}\{b_Y' d_f(t) + \bar{b}_Y[\bar{y}_R(t) + d_y(t)]\}$ 。

のように表わされる。 $d_0(t)$ は入出力外乱および unmodeled part の出力を含んでいることに注意する。

ここで、 $(\rho^{-1} - 1)\chi_0(t) - \rho^{-1}\theta^{*T}\xi_0(t)$ はつぎのように評価される。

$$\begin{aligned} &|(\rho^{-1} - 1)\chi_0(t) - \rho^{-1}\theta^{*T}\xi_0(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^5 K_{0i} A_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $K_{0i} > 0$, $i = 1, \dots, 5$, $A_1(t) = m_{f1}(t)$, $A_2(t) = [m_{f1}(t) - m_{f2}(t)]/(\beta_L - \alpha_L)$, $A_3(t) = m_{y1}(t)$, $A_4(t) = [m_{y1}(t) - m_{y2}(t)]/(\beta_L - \alpha_L)$, $A_5(t) = m_r(t)$

$$\dot{m}_{f1}(t) = -\alpha_L m_{f1}(t) + |f(t)|, \quad m_{f1}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{m}_{f2}(t) &= -\beta_L m_{f2}(t) + |f(t)|, & m_{f2}(0) &= 0 \\ \dot{m}_{v1}(t) &= -\alpha_L m_{v1}(t) + |y(t)|, & m_{v1}(0) &= 0 \\ \dot{m}_{v2}(t) &= -\beta_L m_{v2}(t) + |y(t)|, & m_{v2}(0) &= 0 \\ \dot{m}_r(t) &= -\alpha_L m_r(t) + |r(t)|, & m_r(0) &= 0\end{aligned}$$

ここに、 $\alpha_L, \beta_L (\alpha_L \neq \beta_L)$ はつぎを満たす実数である。

$$0 < \alpha_L < \min \{\alpha_j\}, \quad 0 < \beta_L < \min \{-\operatorname{Re} \lambda_i(A)\}$$

また、入出力外乱が一様有界な関数族の元であることおよび前提 A4), A5), A7) を用いると、 $\eta_0(t)$ は

$$|\eta_0(t)| \leq \sum_{i=6}^{10} K_{0i} \Delta_i(t) \quad (13)$$

ここに、 $K_{0i} > 0, i=6, \dots, 10$

$$\begin{aligned}\Delta_6(t) &= 1, & \Delta_7(t) &= 1 - \exp(-\delta_f t) \\ \Delta_8(t) &= 1 - \exp(-\delta_R t), & \Delta_9(t) &= m_0(t) \\ \Delta_{10}(t) &= [m_0(t) - m_R(t)] / (\delta_R - \lambda_0) \\ \dot{m}_0(t) &= -\lambda_0 m_0(t) + N_0[|f(t)| + N_{df}] \\ \dot{m}_R(t) &= -\delta_R m_R(t) + N_0[|f(t)| + N_{df}] \\ m_0(0) &= N_u, & m_R(0) &= N_u, & \delta_f &= \min \{\alpha_L, \beta_L\} \\ \delta_R &\neq \lambda_0, & \delta_R &= \min \{\alpha_L, \beta_N, \beta_L\}.\end{aligned}$$

のように評価される (付録 A 参照). 後に構成される補助入力において、 $\Delta_6(t), \Delta_7(t)$ および $\Delta_8(t)$ は入出力外乱に対する補償器として、 $\Delta_9(t)$ および $\Delta_{10}(t)$ は unmodeled dynamics に対する補償器として用いられる. (12), (13) 式で、各 K_{0i} は未知であるが、その上界の一つ N_{0i} は既知であると仮定する. すなわち、 $N_{06} > K_{06}, N_{0i} \geq K_{0i}, i \neq 6, i=1, \dots, 10$. これは、プラントのパラメータが未知であるが、未知パラメータの存在範囲は既知である (不確定性が有界である) と仮定することに相当する. いま、正定値関数 $V_a(t)$ を

$$V_a(t) = \frac{1}{2} e_a(t)^2 \quad (14)$$

と定義し、補助入力 $f_0(t)$ を

$$f_0(t) = \sum_{i=1}^{10} \phi_{0i}(t) \Delta_i(t) \quad (15)$$

と構成しよう. ここに、 $\phi_{0i}(t)$ は可変パラメータを表わし、その調整則は、

$$\dot{\phi}_{0i}(t) = N_{0i} \operatorname{sgn} \{e_a(t)\}, \quad i=1, \dots, 10$$

で与えられる. (11) ~ (15) 式を用いて、 $V_a(t)$ を微分し、評価すると、

$$\begin{aligned}\dot{V}_a(t) &\leq -\alpha_0 e_a(t)^2 - k_M |e_a(t)| \\ &\quad \cdot \sum_{i=1}^{10} (N_{0i} - K_{0i}) \Delta_i(t) \\ &\leq -k_M (N_{06} - K_{06}) |e_a(t)|\end{aligned} \quad (16)$$

を得る. これと不連続点に関する解析⁴⁾により、 $|e_a(t)|$ は狭義単調に減少して、ある有限時刻 $t_0 \geq 0$ が存在して、 $e_a(t) \equiv 0, t \geq t_0$ が成り立つ. t_0 の推定時刻 T_0 は、文献 4) と同様にして、

$$t_0 \leq T_0 := |e_a(0)| [\bar{k}_M (N_{06} - K_{06})]^{-1}$$

と得られる. ここで、 $y(0) = y_M(0) = y_a(0) = 0$ であるから、 $t_0 = 0$ となり、 $e_a(t) \equiv 0, t \geq 0$ がなりたつ. この結果は、入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず成り立ち、また規範入力に無関係であることに注意する. このとき、等価制御は、 $e_a(t) \equiv e_a(t) \equiv 0, t \geq 0$ であるから、(11) 式より、 $t \geq 0$ に対して、

$$f_{0eq}(t) = (\rho^{-1} - 1) \chi_0(t) - \rho^{-1} \theta^{*T} \xi_0(t) + \eta_0(t) \quad (17)$$

と得られる.

つぎに、補助誤差 $e'_1(t)$ を

$$e'_1(t) := f_{0eq}(t) - L_1^{-1}(s) f_1(t)$$

と定義し、これを任意の有限時間で零にできることを示そう. (17) 式を用いると、 $e'_1(t)$ は

$$e'_1(t) = L_1^{-1}(s) \hat{f}_1(t) \quad (18)$$

ここに、 $\hat{f}_1(t)$ は補助入力、 $\hat{f}_1(t) = -f_1(t) + (\rho^{-1} - 1) \chi_1(t) - \rho^{-1} \theta^{*T} \xi_1(t) + \eta_1(t)$, $\chi_1(t) = L_2^{-1}(s) \cdots L_m^{-1}(s) f(t)$, $\xi_1(t) = L_2^{-1}(s) \cdots L_m^{-1}(s) \omega(t)$, $\eta_1(t) = L_1(s) \eta_0(t)$.

と表わせる. $(\rho^{-1} - 1) \chi_1(t) - \rho^{-1} \theta^{*T} \xi_1(t) + \eta_1(t)$ はつぎのように

$$\begin{aligned}&|(\rho^{-1} - 1) \chi_1(t) - \rho^{-1} \theta^{*T} \xi_1(t) + \eta_1(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{10} K_{1i} \Delta_i(t), \quad K_{1i} > 0, \quad i=1, \dots, 10\end{aligned}$$

と評価される. ここで、各 K_{1i} は未知であるが、その上界の一つ N_{1i} は既知であると仮定する. すなわち、 $N_{16} > K_{16}, N_{1i} \geq K_{1i}, i \neq 6, i=1, \dots, 10$. 正定値関数 $V_1(t)$ を

$$V_1(t) = \frac{1}{2} e'_1(t)^2$$

とおき、補助入力 $f_1(t)$ を

$$f_1(t) = \sum_{i=1}^{10} \phi_{1i}(t) \Delta_i(t)$$

と構成しよう. ここに、 $\phi_{1i}(t)$ は可変パラメータを表わし、その調整則は

$$\dot{\phi}_{1i}(t) = N_{1i} \operatorname{sgn} \{e'_1(t)\}, \quad i=1, \dots, 10$$

で与えられる. $V_1(t)$ を微分し、(18) 式を用い、前述と同様にして、評価すると、

$$\dot{V}_1(t) \leq -(N_{16} - K_{16}) |e'_1(t)| \quad (19)$$

を得る. これより、 $|e'_1(t)|$ は狭義単調に減少し、ある有限時刻 $t = t_1$ ですべり面 $e'_1 = 0$ に到達し、以後そのままそこにとどまる: $e'_1(t) \equiv 0, t \geq t_1$. これは、入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず成り立ち、また規範入力に無関係であることに注意する. このとき、等価制御は、(18) 式より、 $t \geq t_1$ に対して、

$$f_{1eq}(t) = (\rho^{-1} - 1) \chi_1(t) - \rho^{-1} \theta^{*T} \xi_1(t) + \eta_1(t)$$

と得られる。\$t_1\$ の推定時刻 \$T_1\$ は、前述と同様にして、\$e'_i(0)=e'_{i0}\$ に対して、

$$t_1 \leq T_1 := |e'_{i0}|(N_{16} - K_{16})^{-1}$$

と得られる。\$N_{16}\$ は任意に選べるから、\$t_1\$ は任意に小さくできる。

以下、同様にして、理想的な有限次元 VS-MRAC はつぎのように述べるができる。すなわち、

理想的な有限次元 VS-MRAC: \$f(t) = -f_m(t)\$

フィルタ信号: \$\xi_j(t) = L_{j+1}^{-1}(s) \cdots L_m^{-1}(s) \omega(t)\$, \$\chi_j(t) = L_{j+1}^{-1}(s) \cdots L_m^{-1}(s) f(t)\$, \$j=0, \dots, m-1\$

補助信号: \$y_a(t) = M(s)L(s)[f_0(t) + L^{-1}(s)f(t)]\$

拡張誤差: \$e_a(t) = y(t) - [y_M(t) + y_a(t)]\$

補助誤差: \$e'_0(t) := e_a(t)\$; \$e'_j(t) = f_{(j-1)eq}(t) - L_j^{-1}(s)f_j(t)\$, \$j=1, \dots, m\$

外乱および unmodeled dynamics: \$\eta_0(t) = L^{-1}(s)d_0(t)\$, \$\eta_j(t) = L_j(s)\eta_{j-1}(t)\$, \$j=1, \dots, m\$

評価 (付録 A 参照): \$|(\rho^{-1}-1)\chi_j(t) - \rho^{-1}\theta^{*T}\xi_j(t) + \eta_j(t)| \leq \sum_{i=1}^{10} K_{ji}\Delta_i(t)\$, \$K_{ji} > 0\$, \$i=1, \dots, 10\$, \$j=0, \dots, m-1\$; \$|\theta^{*T}\omega(t)| \leq \sum_{i=1}^4 K_{mi}\Gamma_i(t)\$, \$K_{mi} > 0\$, \$i=1, \dots, 4\$;

\$\Gamma_1(t) = m_{f2}(t)\$, \$\Gamma_2(t) = |y(t)|\$, \$\Gamma_3(t) = m_{y2}(t)\$, \$\Gamma_4(t) = |r(t)|\$; \$|\eta_m(t)| \leq \sum_{i=5}^9 K_{mi}\Gamma_i(t) + \mu k_M^{-1}|f(t)|\$, \$K_{mi} > 0\$, \$\Gamma_i(t) = \Delta_{i+1}(t)\$, \$i=5, \dots, 9\$, \$\mu := |c_R A_R^{n-1} b_R|\$

未知パラメータ \$K_{ji}\$ などの上界の一つ \$N_{ji}\$: つぎの \$N_{ji}\$ はすべて既知であると仮定する。\$N_{j6} > K_{j6}\$, \$N_{ji} \geq K_{ji}\$, \$i \neq 6\$, \$i=1, \dots, 10\$, \$j=0, \dots, m-1\$; \$N_{mi} \geq K_{mi}/k_B^*\$, \$i=1, \dots, 4\$, \$N_{m5} > \rho K_{m5}/k_B^*\$, \$N_{mi} \geq \rho K_{mi}/k_B^*\$, \$i=6, \dots, 9\$, \$k_B^* := 1 - \mu k_B^{-1}\$ (前提 A6) より \$k_B^* > 0\$ であることに注意)

補助入力: \$f_j(t) = \sum_{i=1}^{10} \psi_{ji}(t)\Delta_i(t)\$, \$j=0, \dots, m-1\$;

\$f_m(t) = \sum_{i=1}^9 \psi_{mi}(t)\Gamma_i(t)\$

パラメータ調整則: \$\psi_{ji}(t) = N_{ji} \operatorname{sgn}\{e'_j(t)\}\$, \$i=1, \dots, 10\$, \$j=0, \dots, m-1\$; \$\psi_{mi}(t) = N_{mi} \operatorname{sgn}\{e'_m(t)\}\$, \$i=1, \dots, 9\$

すべり面とそれへの到達時刻, 推定時刻: \$e'_j(t) \equiv 0\$, \$t \geq t_j\$, \$j=0, \dots, m\$; \$t_m \geq \dots \geq t_1 \geq t_0 = 0\$; \$t_j - t_{j-1} \leq T_j = |e'_{j,j-1}|(N_{j6} - K_{j6})^{-1}\$, \$j=1, \dots, m-1\$; \$t_m - t_{m-1} \leq T_m = |e'_{m,m-1}|(\rho^{-1}k_B^*N_{m5} - K_{m5})^{-1}\$; \$e'_j(t_{j-1}) = e'_{j,j-1}\$, \$j=1, \dots, m\$

等価制御: \$f_{jeq}(t) = (\rho^{-1}-1)\chi_j(t) - \rho^{-1}\theta^{*T}\xi_j(t) + \eta_j(t)\$, \$t \geq t_j\$, \$j=0, \dots, m-1\$;

$$f_{meq}(t) = -\theta^{*T}\omega(t) + \rho d_0(t), \quad t \geq t_m \quad (20) \blacksquare$$

ここで、プラントの入出力間につぎの関係が成立するものと仮定する。すなわち、

$$|f(t)| \leq M_{f1} + M_{f2}$$

$$\sup_{\tau \leq t} \{|\bar{y}(\tau)|, |\dot{\bar{y}}(\tau)|, \dots, |\bar{y}^{(m)}(\tau)|\} \quad (21)$$

$$M_{f1}, M_{f2} > 0, \quad t \geq 0$$

これは、プラントの逆系が漸近安定であるという仮定に相当する。

(10), (20)式より、

$$e_1(t) = h_f^T(sI - A_Y)^{-1}e(t_m)$$

を得る (注意 2 参照)。これより、理想的な有限次元 VS-MRAC を用いると、理想すべりモードにおいて、時刻 \$t=t_m\$ 以後、入出力外乱および unmodeled dynamics は拡大プラントの出力誤差 \$e_1(t)\$ にまったく寄与しないことがわかる。ここで、\$A_Y\$ は漸近安定であり、\$e(t_m)\$ は、\$t_m\$ が有限時刻であるから、有界である。よって、\$t \rightarrow \infty\$ で

$$e_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{exponentially}$$

が得られる。また、\$\bar{y}_j^{(j)}(t)\$ (\$j=0, \dots, m+1\$) の一様有界性および \$e_1(t) = h_f^T \exp\{A_Y(t-t_m)\}e(t_m)\$ であるから、拡大プラントの出力とその導関数 \$\bar{y}^{(j)}(t)\$ (\$j=0, \dots, m+1\$) は究極的に一様有界となる。このときの安定度 \$-\delta_a\$ は、

$$0 < \delta_a < \min\{\alpha, \alpha_{DM}, \beta_N, \beta_L\}$$

を満たす。ここに、\$-\alpha_{DM}\$ は \$D_M(s)\$ の零点の最大値である。よって、(4), (6)式より、元の出力誤差 \$\bar{e}_1(t) = \bar{y}(t) - \bar{y}_M(t)\$ は、\$t \rightarrow \infty\$ で

$$\bar{e}_1(t) \rightarrow 0 \quad \text{exponentially}$$

となる。これより、理想的なすべりモードにおける \$\bar{e}_1(t)\$ に対して、入出力外乱および unmodeled dynamics は完全に除去される (すなわち、スピルオーバーの影響はまったくない) ことがわかる。また、\$\bar{y}_j^{(j)}(t)\$ (\$j=0, \dots, m\$) の一様有界性および \$\bar{e}_1(t) = h_f^T(A_Y + \alpha I) \exp\{A_Y(t-t_m)\}e(t_m)\$ より、\$\bar{y}^{(j)}(t)\$ (\$j=0, \dots, m\$) は究極的に一様有界となる。これと(21)式の仮定より、プラント入力 \$f_{eq}(t) = -f_{meq}(t)\$ は一様有界となる (注意 2 参照)。仮定よりプラントは漸近安定であるから、前提 A4) と(5)式より、\$x_R(t)\$, \$\bar{y}_R(t)\$ および \$x(t)\$ (したがって \$x_D(t)\$) も有界となる。\$f_{eq}(t)\$ および \$y(t)\$ の有界性によって、\$\Delta_i(t)\$ (\$i=1, \dots, 10\$) したがって \$\Gamma_i(t)\$ (\$i=1, \dots, 9\$) もすべて有界となる。(7)式より、\$v_1(t)\$ および \$v_2(t)\$, したがって \$\dot{v}_1(t)\$, \$\dot{v}_2(t)\$ および \$\omega(t)\$ も有界となる。よって、フィルタ信号 \$\xi_j(t)\$, \$\chi_j(t)\$ (\$j=0, \dots, m-1\$) および入出力外乱と unmodeled dynamics を含む信号 \$\eta_j(t)\$ (\$j=0, \dots, m\$) もすべて有界となる。よって、等価制御 \$f_{jeq}(t)\$ (\$j=0, \dots, m-1\$) も有界となる。これより補助信号 \$y_a(t)\$ も有界となる。よって、閉ループ系の全信号の究極的一様有界性がいえる。

以上をまとめると、つぎの結果を得る。

【補題】(理想的なすべりモードの場合) 前提 A1) ~ A7) が成り立つものと仮定する。このとき、理想的な有限次元 VS-MRAC によって、規範入力に無関係に理想的なすべりモードがつねに有限時間で達成され、入出力外乱および unmodeled dynamics が完全に除去され、元の出力誤差が指数関数的に零に収束する。さらに、条件 (21) 式のもとで、閉ループ系の全信号の究極的一様有界性が保証される。 ■

(注意 1) 本節では、プラントは不安定であってもよい。

(注意 2) すべての $f_j(t)$ は、 $t \geq t_j$ の理想的なすべりモードで、等価制御 $f_{jeq}(t)$ に置き換えられることに注意する ($j=0, \dots, m$)。

4.2 現実的なすべりモードの場合

前節では、理想的なすべりモードの場合について述べた。現実には、ヒステリシス、バックラッシュや切換え遅れによる不完全さ¹¹⁾が存在する。このため、チャタリングと呼ばれる現象が生じる。また、等価制御 $f_{jeq}(t)$ ($j=0, \dots, m$) は、プラントのパラメータが未知であるため、現実には入手不可能である。よって、本節では、前節の結果を用いて現実的な有限次元 VS-MRAC を構成し、前節の理想的な軌道の回りの信号の有界性について述べる。

まず、準備として、前節の理想的なすべり面で得られる等価制御の導関数 $\dot{f}_{jeq}(t)$ ($j=0, \dots, m$) の有界性について述べる。補題では、 $f_{jeq}(t)$ ($j=0, \dots, m$) は $t \geq t_m$ で有界であることを示した。また、 $f_{jeq}(t) = L_j(s)f_{(j-1)eq}(t)$ であるから、 $\dot{f}_{jeq}(t)$ ($j=0, \dots, m-1$) が、 $t \geq t_m$ で有界となる。(20) 式、仮定 $w \in D(A^{m+1})$ 、前提 A3)、A6) および付録 A を用いると、 $\dot{f}_{meq}(t)$ の有界性がいえる。すなわち、各 $j \in \{0, \dots, m\}$ に対して、 $|\dot{f}_{jeq}(t)| \leq M_{jeq}$ 、 $t \geq t_m$ を満たすある正数 M_{jeq} が存在する。

チャタリング現象を克服するため、以下では、前節のすべての符号関数 $\text{sgn}(e'_j)$ を飽和関数 $\text{sat}(e'_j) = +1$ if $e'_j > \varepsilon_j$; e'_j/ε_j if $|e'_j| \leq \varepsilon_j$; -1 if $e'_j < -\varepsilon_j$ に置き換える ($j=0, \dots, m$)。ここに、 ε_j は十分小さい正数で、 $\varepsilon_i < \varepsilon_j$ 、 $i < j$ 、 $i, j=0, \dots, m$ である。 $\text{sgn}(e'_j)$ は、 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ のときの $\text{sat}(e'_j)$ の極限と考えられる。この置き換えによって、補助入力

$$f_j(t) = \sum_{i=1}^{10} \phi_{ji}(t) \Delta_i(t), \quad j=0, \dots, m-1$$

$$f_m(t) = \sum_{i=1}^9 \phi_{mi}(t) \Gamma_i(t)$$

で与えられる。ここに、 $\Delta_i(t)$ および $\Gamma_i(t)$ は共に

4.1 節と同様で $\phi_{ji}(t)$ および $\phi_{mi}(t)$ は共に可変パラメータで、その調整則は

$$\dot{\phi}_{ji}(t) = N_{ji} \text{sat}\{e'_j(t)\}, \quad i=1, \dots, 10, \quad j=0, \dots,$$

$$m-1; \quad \dot{\phi}_{mi}(t) = N_{mi} \text{sat}\{e'_m(t)\}, \quad i=1, \dots, 9$$

で与えられる。

つぎに、前節の等価制御 $f_{jeq}(t)$ は平均制御 $f_{jav}(t)$ で近似できることを示そう。すなわち、各 $t \geq \bar{t}'_m$ に対して、

$$|f_{jav}(t) - f_{jeq}(t)| \leq \varepsilon_{jav}, \quad j=0, \dots, m \quad (22)$$

である。ここに、 $\bar{t}'_m$ は $\bar{t}'_m > t_m$ を満たすある正数、 ε_{jav} は十分小さい正数、 $f_{jav}(t)$ は、

$$f_{jav}(t) = (1 + T_j s)^{-1} f_j(t), \quad j=0, \dots, m \quad (23)$$

である。時定数 T_j は十分小さい正数で、 $T_i < T_j$ 、 $i < j$ 、 $i, j=0, \dots, m$ である。

証明の複雑さを避けるため、ここでは、 $m=1$ の場合について述べる。これによって、一般性が失われることはない。まず、本節の補助入力 $f_0(t)$ によっても、 $t \geq 0$ で $|e_a(t)| \leq \varepsilon_0$ とできる。これは、前節と同様の方法で示される。(11) 式のような関係式を用いると、本節の補助入力 $f_0(t)$ は、 $t \geq 0$ で、

$$f_0(t) = f'_0(t) - f_{0eq}(t) + f_{0eq}(t) - k_M^{-1} [\dot{e}_a(t) + \alpha_0 e_a(t)] \quad (24)$$

と表わされる。ここに、 $f'_0(t)$ は (17) 式の右辺と同様に表わされ、 $f_{0eq}(t)$ は前節で述べた理想軌道により得られるものである。ここで、 $t \geq 0$ で $|e_a(t)| \leq \varepsilon_0$ であるから、 $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ とすると、 $e_a(t) \rightarrow 0$ 、したがって $\dot{e}_a(t) \rightarrow 0$ となる。同様に、まず $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ 、つぎに $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ とすると、 $e'_1(t) \rightarrow 0$ 、したがって $\dot{e}'_1(t) \rightarrow 0$ となる。よって、前節の等価制御の導出法により、任意に小さい正数 Δ'_0 に対して、

$$|f'_0(t) - f_{0eq}(t)| \leq \Delta'_0, \quad t \leq t_1$$

を満たす ε_0 と ε_1 が存在する。(23)、(24) 式を用い、部分積分を行い、整理すると、平均制御 $f_{0av}(t)$ は

$$\begin{aligned} f_{0av}(t) = & [f_{0av}(t_1) - f_{0eq}(t_1)] \exp\{-(t-t_1)/T_0\} \\ & + T_0^{-1} \int_{t_1}^t \exp\{-(t-\tau)/T_0\} [f'_0(\tau) \\ & - f_{0eq}(\tau)] d\tau + f_{0eq}(t) \\ & - \int_{t_1}^t \exp\{-(t-\tau)/T_0\} \dot{f}_{0eq}(\tau) d\tau \\ & - (k_M T_0)^{-1} [e_a(t) - \exp\{-(t-t_1)/T_0\} e_a(t_1) \\ & + (\alpha_0 - T_0^{-1}) \int_{t_1}^t \exp\{-(t-\tau)/T_0\} \\ & \cdot e_a(\tau) d\tau] \end{aligned} \quad (25)$$

と表わされる。いま、 $t \geq t_1$ で

$$|e_a(t)| \leq \Delta_{e0} = \varepsilon_0$$

であるから、(25) 式より

$$|f_{0av}(t) - f_{0eq}(t)| \leq \mu_0(T_0) + \Delta'_0 + M_{0eq}T_0 + 4\Delta_{e0}/(k_M T_0)$$

を得る。ここに、 T_0 は $\alpha_0 \leq 1/T_0$ を満たす正数である。 $\mu_0(T_0)$ は、 $t \geq \bar{t}'_0$ で、 $T_0 \rightarrow 0$ のとき、 $\mu_0(T_0) \rightarrow 0$ となる指数減衰項である。ここに、 $\bar{t}'_0$ は $\bar{t}'_0 > t_1$ を満たすある正数である。ここで、 $\Delta'_0 \rightarrow 0$ 、 $T_0 \rightarrow 0$ 、 $\Delta_{e0}/T_0 \rightarrow 0$ とすれば、

$$f_{0av}(t) \rightarrow f_{0eq}(t), \quad t \geq \bar{t}'_0$$

が得られる。これは、規範入力に無関係に、また入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず成り立つ。よって、任意に小さい正数 ε_{0av} に対して、 Δ'_0 、時定数 T_0 、 Δ_{e0}/T_0 (すなわち、 ε_0 、 ε_1 および T_0) が存在し、

$$|f_{0av}(t) - f_{0eq}(t)| \leq \varepsilon_{0av}, \quad t \geq \bar{t}'_0 \quad (26)$$

が成り立つ。前節の補助誤差 $e'_1(t)$ を、ここでは、

$$e'_1(t) = f_{0av}(t) - L_1^{-1}(s)f_1(t) \quad (27)$$

と置く。(26)、(27)式および付録Bにより、十分小さい正数 Δ_{e1} に対して、

$$|e'_1(t)| \leq \Delta_{e1}, \quad t \geq t'_1$$

が成り立つ。ここに、 t'_1 は $t'_1 \geq \bar{t}'_0$ を満たすある正数である。前述と同様にして、 $f_{1av}(t) - f_{1eq}(t)$ は

$$\begin{aligned} |f_{1av}(t) - f_{1eq}(t)| \\ \leq \mu_1(T_0, T_1) + 3\Delta'_0/T_1 + 3M_{0eq}T_0/T_1 \\ + 12\Delta_{e0}/(k_M T_0 T_1) + M_{1eq}T_1 \\ + 4\Delta_{e1}/T_1, \quad t \geq t'_1 \end{aligned}$$

と評価される。ここに、 T_1 は $T_0 < T_1$ 、 $\alpha_1 \leq 1/T_1$ を満たす正数である。 $\mu_1(T_0, T_1)$ は、各 $t \geq \bar{t}'_1$ で、まず、 $T_0 \rightarrow 0$ 、つぎに、 $T_1 \rightarrow 0$ とすれば、 $\mu_1(T_0, T_1) \rightarrow 0$ となる指数減衰項である。ここに、 $\bar{t}'_1$ は $\bar{t}'_1 > t'_1$ を満たすある正数である。ここで、まず、 $T_0 \rightarrow 0$ 、 $\Delta_{e0}/T_0 \rightarrow 0$ 、つぎに、 $T_1 \rightarrow 0$ 、 $\Delta_{e1}/T_1 \rightarrow 0$ 、 $\Delta'_0/T_1 \rightarrow 0$ とすれば、

$$f_{1av}(t) \rightarrow f_{1eq}(t), \quad t \geq \bar{t}'_1$$

が得られる。これは、規範入力に無関係に、また入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず成り立つ。よって、任意に小さい正数 ε_{1av} に対して、 T_0 、 Δ_{e0}/T_0 、 T_1 、 Δ_{e1}/T_1 および Δ'_0/T_1 (すなわち、 ε_0 、 ε_1 、 T_0 および T_1) が存在し、 $j=1$ に対する(22)式が得られる。以上で証明を終える。

上の証明法の最大の特徴は時定数を $T_i < T_j$ 、 $i < j$ 、 $i, j=0, \dots, m$ とした点にある。

前節の理想的な有限次元 VS-MRAC を実行するとき、 $t \geq 0$ で補助入力 $f_j(t)$ および等価制御 $f_{jev}(t)$ をすべて平均制御 $f_{jav}(t)$ に置き換える ($j=0, \dots, m$)。これを現実的な有限次元 VS-MRAC と呼ぶ。

いま、 $t \geq \bar{t}'_m$ でプラントの制御入力 $f(t)$ に $f_{eq}(t) = -f_{meq}(t)$ または $f_{mav}(t)$ を用いたときの出力をそ

れぞれ $\bar{y}_{eq}(t)$ または $\bar{y}_{av}(t)$ と記す。このときの出力誤差をそれぞれ

$$\bar{e}_{1eq}(t) = \bar{y}_{eq}(t) - \bar{y}_M(t), \quad t \geq \bar{t}'_m$$

$$\bar{e}_{1av}(t) = \bar{y}_{av}(t) - \bar{y}_M(t), \quad t \geq \bar{t}'_m$$

と記すと、 $\bar{e}_{1av}(t)$ は

$$\bar{e}_{1av}(t) = \bar{y}_{av}(t) - \bar{y}_{eq}(t) + \bar{e}_{1eq}(t), \quad t \geq \bar{t}'_m$$

と表わせる。仮定よりプラントは漸近安定であること、(1)式および前節の議論より $t \rightarrow \infty$ のとき $\bar{e}_{1eq}(t) \rightarrow 0$ exponentially であることから、 $t \rightarrow \infty$ で、

$$|\bar{e}_{1av}(t)| \leq |\bar{y}_{av}(t) - \bar{y}_{eq}(t)| + |\bar{e}_{1eq}(t)|$$

$$\rightarrow \lambda_1^{-1} \|\bar{y}\| \|\bar{w}\| \varepsilon_{mav}$$

となる。これより、 $\bar{e}_{1av}(t)$ したがって $\bar{y}_{av}(t)$ (また、(4)式より対応する拡大プラントの出力) は究極的に一様有界となる。この定常誤差は、符号関数および等価制御をそれぞれ飽和関数および平均制御によって近似したことによる性能劣化を示している。しかしながら、前述より、規範入力に無関係に、また入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず、 ε_{mav} は任意に小さくできるから、 $|\bar{e}_{1av}(t)|$ は漸近的に任意に小さくできる。補題と(22)式により、 $f_{jav}(t)$ ($j=0, \dots, m$) は究極的に一様有界となる。前節と同様にして、他の全信号の究極的一様有界性が示せる。

以上をまとめると、つぎの結果を得る。

《定理》(現実的なすべりモードの場合) 前提A1) ~ A7) および条件(21)式が成り立つものと仮定する。このとき、現実的な有限次元 VS-MRAC によって、規範入力に無関係に、また入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず、出力誤差の絶対値 $|\bar{e}_{1av}(t)|$ は漸近的に任意に小さくでき、閉ループ系の全信号の究極的一様有界性が保証される。■

5. 数値例

ここでは、数値例を用いて、本手法の有効性を示す。未知プラントとして、つぎのような放物型分布定数系を考えよう。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0.05 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \bar{y}(x)[f(t) + \cos t],$$

$$0 < x < 1, t > 0$$

$$\text{初期条件: } u(0, x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$\text{境界条件: } u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\bar{y}(t) = \int_0^1 \bar{w}(x)u(t, x)dx + 1, \quad t \geq 0$$

ここで、数値計算にあたって、固有関数展開の打ち切り次数を10に選ぶと、 $\bar{y}(x) = \sum_{k=1}^{10} (10/k) \sin(k\pi x)$ 、 $\bar{w}$

$$(x) = \sum_{k=1}^{10} [200/(k\pi)^5] \sin(k\pi x) - 1.33 \sin(2\pi x) - 3.37$$

Fig. 1 Outputs

Fig. 2 Control

$\times 10^{-3} \sin(3\pi x)$ である。このとき、プラントの相対次数は2であった。dominant partの次元を2に選ぶと、その相対次数は2となった。規範モデルの伝達関数を $10/[(s+1)(s+2)]$ 、規範入力を $r(t) = \sin 2t$ に設定した。また、多項式 $L(s)$ を $L(s) = (s+1)(s+2)$ に、(7)式で $A = \text{diag}[-3, -4]$ 、 $g = [1, 1]^T$ に選んだ。残りの設計パラメータは、 $\lambda_0 = 4.44$ 、 $\delta_f = \delta_R = 0.999$ 、 $N_a = 0.425$ 、 $N_g = 4.26$ 、 $N_{df} = 1.1$ 、 $\alpha = 1$ 、 $\alpha_L = 0.999$ 、 $\beta_L = 3.00$ 、 $N_0 = [1.14, 6.80, 1.00, 18.3, 2.20, 1.10, 1.56, 0.215, 7.45 \times 10^{-5}, 3.53 \times 10^{-4}]^T$ 、 $N_1 = [0.568, 3.40, 0.502, 9.17, 1.10, 1.10, 0.996, 0.306, 5.96 \times 10^{-4}, 7.06 \times 10^{-4}]^T$ 、 $N_2 = [3.52, 1.04, 9.49, 2.28, 2.42, 1.04, 0.889, 1.49 \times 10^{-2}, 2.17 \times 10^{-2}]^T$ 、規範モデルおよびフィルタの初期値はすべて零に設定した。数値積分法として、RKG4を用い、刻み幅を 10^{-4} とし、 $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ 、 $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ 、 $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ 、 $T_0 = 9.09 \times 10^{-3}$ 、 $T_1 = 1.00 \times 10^{-2}$ 、 $T_2 = 1.11 \times 10^{-2}$ とした。現実的な有限次元 VS-MRAC を用いたときのシミュレーション結果を、Fig. 1 および Fig. 2 に示す。これより、入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず、非常によく制御性能が得られ、制御入力是有界であることがわかる。

6. おわりに

外乱を伴う漸近安定な分布系の現実的な有限次元 VS-MRAC について述べ、プラントの相対次数が任意である場合について考察した。ここでは、まず、集中系での Araujo と Hsu⁸⁾ の Compact VS-MRAC の方法を拡張し、すなわち、制御器の次元を低減し、入

出力外乱を伴う分布系の理想的な有限次元 VS-MRAC 問題に拡張している。つぎに、この結果を用いて、現実的な有限次元 VS-MRAC を設計している。

主な結果はつぎのとおりである。まず、理想的な有限次元 VS-MRAC の場合、規範入力に無関係に理想的なすべりモードがつねに有限時間で達成され、入出力外乱および unmodeled dynamics が完全に除去され、出力誤差が指数関数的に零に収束することおよび閉ループ系の全信号の究極的一様有界性が保証される。つぎに、この結果を用いて設計した現実的な有限次元 VS-MRAC の場合、等価制御は平均制御で近似され、規範入力に無関係に、また入出力外乱および unmodeled dynamics の存在にもかかわらず、出力誤差の絶対値は漸次的に任意に小さくでき、閉ループ系の全信号の究極的一様有界性が保証される。最後に、数値例により、本手法の有効性を示した。

参考文献

- 1) R. Ortega and Y. Tang: Robustness of Adaptive Controllers—a Survey, *Automatica*, **25**-5, 651/677 (1989)
- 2) T. Kobayashi: Finite-Dimensional Adaptive Control for Infinite-Dimensional Systems, *Int. J. Control*, **48**-1, 289/302 (1988)
- 3) 宮里義彦: 放物型分布定数系の有限次元モデル規範形適応制御, 計測自動制御学会論文集, **26**-6, 662/668 (1990)
- 4) 佐々木, 早川, 藤井: 放物型分布定数系の有限次元適応制御—収束特性の改善—, 第10回適応制御シンポジウム資料, 97/102 (1990)
- 5) 野口, 金井, 菊川: リレー形調整則を用いた低次元適応制御系の設計とフライトコントロールへの適用, 計測自動制御学会論文集, **22**-3, 351/357 (1986)
- 6) R.R. Costa and L. Hsu: Robustness of VS-MRAC with Respect to Unmodeled Dynamics and External Disturbances, *Proc. 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, USA*, 3208/3213 (1990)
- 7) L. Hsu: Variable Structure Model-Reference Adaptive Control (VS-MRAC) Using Only Input and Output Measurements: The General Case, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-35**-11, 1238/1243 (1990)
- 8) A. D. de Araujo and L. Hsu: Further Developments in Variable Structure Adaptive Control Based Only on Input/Output Measurements, *Proc. 11th IFAC World Congress, Tallinn, USSR*, 293/298 (1990)
- 9) S. Mizohata: *The Theory of Partial Differential Equations*, Cambridge (1973)
- 10) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design—Direct Control, *IEEE Trans.*, **AC-23**-4, 570/583 (1978)
- 11) V. I. Utkin: Variable Structure Systems with Sliding Modes, *IEEE Trans.*, **AC-22**-2, 212/222 (1977)

《付 録》

A. $\eta_j(t)$ ($j=0, \dots, m$) の評価

前提 A1), A2), 文献 10) および (11) 式を用いる

と, $\eta_0(t)$ はつぎのように表わされる.

$$\eta_0 = \frac{k_D [\det(sI - A) - \bar{\theta}_1^{*T} \text{adj}(sI - A)g]}{k_M L(s) \det(sI - A)} d_f + \frac{D(s) [\det(sI - A) - \bar{\theta}_1^{*T} \text{adj}(sI - A)g]}{k_M L(s) N(s) \det(sI - A)} \cdot (\bar{y}_R + d_y)$$

ここに, $\theta^{*T} = [\bar{\theta}_1^{*T}, \theta_{n+1}^{*T}, \bar{\theta}_2^{*T}, \theta_{2n+2}^{*T}]$ である. ここで, 解析的半群 $\exp(-A_R t)$ は, 前提 A5) より

$$\|\exp(-A_R t)\| \leq \exp(-\lambda_0 t), \quad t \geq 0$$

と評価される. よって, 前提 A4) および A7) を用いると, unmodeled part の出力 $\bar{y}_R(t)$ はつぎのように評価される.

$$\|\bar{y}_R(t)\| \leq \|Q\bar{w}\| m_0(t)$$

これと上述の $\eta_0(t)$ の式および前提 A1), A4) を用いると評価式 (13) を得る. さらに, 仮定 $\bar{w} \in D(A^{m+1})$, 前提 A3) および A6) を用いると, 他の $\eta_j(t)$ ($j=1, \dots, m$) の評価も同様にして得られる.

B. $|e'_1(t)| \leq \Delta_{e1}, t \geq t'_1$ の証明

補助誤差 $e'_1(t)$ は, (27) 式より

$$e'_1(t) = f_{0av}(t) - f_{0eq}(t) + \bar{e}'_1(t) \quad (\text{B.1})$$

のように表わされる. ここに,

$$\bar{e}'_1(t) = f_{0eq}(t) - L_1^{-1}(s) f_1(t) \quad (\text{B.2})$$

である. (B.1), (26) 式より

$$|e'_1(t) - \bar{e}'_1(t)| \leq \varepsilon_{0av}, \quad t \geq \bar{t}'_0 \quad (\text{B.3})$$

を得る. 補助入力 $\bar{f}_1(t)$ を

$$\bar{f}_1(t) = \sum_{i=1}^9 \bar{\varphi}_{1i}(t) \Gamma_i(t) \quad (\text{B.4})$$

と定義する. ここに, $\Gamma_i(t)$ は 4.1 節と同様で, $\bar{\varphi}_{1i}(t)$ は可変パラメータで, その調整則は

$$\bar{\varphi}_{1i}(t) = N_{1i} \text{sat}\{\bar{e}'_1(t)\}, \quad i=1, \dots, 9$$

で与えられる. ここに, $\text{sat}\{\bar{e}'_1\} = +1$ if $\bar{e}'_1 > \varepsilon'_1$; $\bar{e}'_1/\varepsilon'_1$ if $|\bar{e}'_1| \leq \varepsilon'_1$; -1 if $\bar{e}'_1 < -\varepsilon'_1$ である. ここに, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{0av}$, ε_1 は十分小さい正数である. $\bar{f}_1$ は e'_1 に関して連続であるから, (B.3) 式に対して,

$$|\Delta_{f1}(t)| \leq \varepsilon_{f1}, \quad \varepsilon_{f1} > 0, \quad t \geq \bar{t}'_0 \quad (\text{B.5})$$

が成り立つ. ここに,

$$\Delta_{f1}(t) = \bar{f}_1(t) - f_1(t)$$

である. ε_{0av} は十分小さいから, 連続性によって, ε_{f1} は十分小さい. (B.2) 式より

$$\bar{e}'_1(t) = -\alpha_1 \bar{e}'_1(t) + f_{1eq}(t) + \Delta_{f1}(t) - \bar{f}_1(t) \quad (\text{B.6})$$

を得る. ここで, $f_{1eq}(t)$ は究極的に一様有界であるか

ら,

$$|f_{1eq}(t)| \leq M'_{1eq}, \quad t \geq t_1 \quad (\text{B.7})$$

を満たすような正数 M'_{1eq} が存在する. $m=1$ であるから, 4.1 節の未知パラメータの上界に関する仮定より,

$$N_{15} > \rho K_{15}/k\sharp \quad (\text{B.8a})$$

$$N_{1i} \geq K_{1i}/k\sharp, \quad i=1, \dots, 4; \quad N_{1i} \geq \rho K_{1i}/k\sharp$$

$$i=6, \dots, 9 \quad (\text{B.8b})$$

である. ここで, N_{15} は

$$N_{15} > \max\{\rho K_{15}/k\sharp, M'_{1eq} + \varepsilon_{f1}\} \quad (\text{B.9})$$

を満たすように事前に十分大きく選ばれているものとする. (B.4) ~ (B.7), (B.8b) および (B.9) 式を用いて, 4.1 節と同様な解析を行うと, つぎの結果を得る. すなわち, ある正数 $t'_1 \geq \bar{t}'_0$ が存在して,

$$|\bar{e}'_1(t)| \leq \varepsilon'_1, \quad t \geq t'_1 \quad (\text{B.10})$$

が成り立つ. (B.3), (B.10) 式より, つぎの求める不等式

$$|e'_1(t)| \leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_{0av} = \Delta_{e1}, \quad t \geq t'_1$$

が得られる. ここに, ε_1 および ε_{0av} は共に十分小さいから, Δ_{e1} は十分小さい.

[著者紹介]

佐々木 基 文 (正会員)

1973年, 徳島大学大学院工学研究科修士課程修了(機械工学専攻). 同年, 富山大学工学部機械工学科助手, 1990年4月より同学部機械システム工学科助手. 低次元モデル, 適応同定, 適応制御の研究に従事. 日本機械学会の会員.

早 川 義 一 (正会員)

1979年, 名古屋大学大学院博士後期課程修了(情報工学専攻). 同年, 名古屋大学工学部助手, 同講師を経て, 1990年, 同助教, 現在に至る. システム制御理論の研究に従事. IEEE, 電子情報通信学会などの会員(工学博士).

藤 井 省 三 (正会員)

(Vol. 28, No. 1 参照)