形式的線形化による非線形二点境界値問題の 数値解法と誤差限界

高 田 等*

A Computer Method and Error Bounds of Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems Using Formal Linearization

Hitoshi TAKATA*

This paper presents a numerical computer method of nonlinear two-point boundary value problems using a formal linearization method. We have considered a nonlinear system with two-point boundary conditions. The nonlinear system is transformed into a linear system by the formal linearization method. The transforming function is given as a solution of a partial differential equation and is solved by Taylor or orthogonal expansions. The missing values at the boundary points are evaluated using the Newton method. As a result, the nonlinear two-point boundary value problem becomes a nonlinear initial value problem which can be easily solved. The error bounds of the presented method are also investigated.

Two examples are included to demonstrate the effectiveness of this method. One of them is the case of a transforming function of polynomials, the other being the case of a nonlinear optimal control problem using the maximum principle.

Key Words: nonlinear TPBVP, formal linearization, computer method, error bound

1. ま え が き

非線形システムは、一般にその取扱いが容易でない。特に非線形二点境界値問題はきわめて難しく、たとえば1次元2階微分方程式や特殊な問題を除いては一般的理論がいまだ知られていない現状である^{1),2)}。そこで非線形二点境界値問題に対する数値計算法が各種提案されてきた^{3)~5)}。

他方、線形システムはその取扱いが容易で、多くの優れた性質が知られており、よって非線形システムを線形システムへ等価変換する研究が重要視されてきた。座標変換による厳密な線形化は理想的である^{6)~8)}が、座標変換関数の発見や計算が多くの場合困難である。近似線形化法として、 ρ 次線形化⁹⁾、擬線形化¹⁰⁾、拡張線形化¹¹⁾、形式的線形化¹²⁾、などが提案されてきた。このうち形式的線形化法を用いれば、その1応用

として、変換後線形自明解から、非線形二点境界値問題が初期値問題として解けることが例示されている¹²⁾。しかしこの場合の詳細な計算法や誤差解析についての考察はなんらなされていない。

そこで本論文では、形式的線形化法による非線形二点境界値問題の計算機解法およびその誤差限界などについて考察した。すなわち座標変換関数が偏微分方程式の解関数として与えられる形式的線形化法において、これをテーラー展開や直交基底関数を基にした展開の残差法により求める。変換後システムは定係数常微分方程式で記述されることから、解析解すなわち解の形が自明であり、よって未知欠落初期値が連立方程式の解として得られる。これをニュートン法により求め、非線形二点境界値問題を初期値問題に帰着させて解いた。さらにこのときの近似による誤差限界式も導出した。

最後に2具体例についての数値実験を行った。第1例は線形化関数が多項式となる問題であり、本手法による誤差値や誤差限界値が計算され比較された。第2例は非線形最適制御問題である。これは最大原理により非線形二点境界値問題に帰着される¹⁴⁾ことから、本

* 九州工業大学工学部 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu
(Received April 22, 1991)
(Revised October 2, 1991)

手法が適用された。さらに本問題を、二点境界値問題の代表的な解法^{4),5)}である不変埋め込み法および準線形化法により解き、本手法との比較検討を行った。これらの結果より本手法は、線形化関数の次数の増加とともにその精度の向上が確かめられた。なおそれは従来法と同等以上の高精度であることも示された。

2. 問題の設定

n 次元非線形システムに対し、 q 個の初期値と $n-q$ 個の終端値が与えられたつぎの非線形二点境界値問題を考える。

$$\Sigma_1: \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{初期条件: } x_i(0) = \mu_i \quad (1 \leq i \leq q) \\ \text{終端条件: } x_j(T) = \mu_j \quad (q+1 \leq j \leq n) \end{array} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $\cdot = d/dt$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$: n 次元状態ベクトル, $f = [f_1, \dots, f_n]^T$: 非線形ベクトル値関数で $f \in C^N$ または $f \in C^1 \cap L^2$, R^n : n 次元実ユークリッド空間, C^N : N 回連続微分可能な関数空間, L^2 : 2乗可積分な関数空間, μ_i ($1 \leq i \leq n$): 実数値, T : 終端時刻, 右肩 T : 転置記号, $\triangleq$: 定義記号, である。

本論文ではベクトルをすべて縦ベクトルとする。よって一般にベクトル v に対し v^T は横ベクトルを表わす。(2)式では表記簡潔のため最初の q 個を初期条件としたが、他の場合はあらかじめベクトル x の要素を(2)式の形に並べ替えておくことにする。(2)式の境界条件と未知ベクトルを

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\triangleq [\mu_1, \dots, \mu_q]^T \\ \Psi_2 &\triangleq [\mu_{q+1}, \dots, \mu_n]^T \\ Y_1 &\triangleq [x_q(T), \dots, x_n(T)]^T \\ Y_2 &\triangleq [x_{q+1}(0), \dots, x_n(0)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

とおく。このとき

$$x(0) = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad x(T) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり、 y すなわち $x(0)$ が求まれば、 Σ_1 は初期値問題に帰着されて解けることになる。

さて、(1)式に対し線形化関数 $\dot{\phi}(x) = [\dot{\phi}_1(x), \dots, \dot{\phi}_n(x)]^T \in R^n$ が

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} f(x) \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} f_i(x) = A\phi(x) + b \quad (5)$$

を満たせば(5)式は

$$\dot{\phi}(x) = A\phi(x) + b \quad (6)$$

なので、 $z \triangleq \phi(x)$ のとき(1)式が形式的線形システム

$$\Sigma_2: \dot{z}(t) = Az(t) + b \quad (7)$$

ただし、 A : $n \times n$ 定数行列, b : n 次元定数ベクトルへ変換される。(7)式の解方程式は

$$z(t) = \begin{cases} e^{At}(z(0) + A^{-1}b) - A^{-1}b & (\text{if } A \neq 0) \\ z(0) + bt & (\text{if } A = 0) \end{cases}$$

より、 $t=T$ のとき

$$h(y) \triangleq \begin{cases} \phi(x(T)) - e^{AT}(\phi(x(0)) + A^{-1}b) + A^{-1}b = 0 \\ \phi(x(T)) - \phi(x(0)) - bT = 0 & (\text{if } A \neq 0) \\ & (\text{if } A = 0) \end{cases} \quad (8)$$

である。ここで(8)式に(4)式を代入したのが、 Σ_1 の(2)式に対応する Σ_2 の拘束条件である。

なお考察対象領域としては、(1)式の解曲線をすべて含み：

$$\left\{ x: x = x(0) + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau, 0 \leq t \leq T \right\} \subset M \subset R^n \quad (9)$$

しかも特異点を含まない凸領域の多様体 M を考える。このとき

$$\left\{ X_1: \begin{bmatrix} X_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \in M \right\} \text{ も } \left\{ X_2: \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in M \right\} \text{ も凸集合}$$

である。よってこれらの直積集合

$$D \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}: \begin{bmatrix} X_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \in M, \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in M \right\} \quad (10)$$

も凸集合となる。したがって M 自身が直積集合のときは、 $M=D$ であり、たとえば M が R^n 直方体ならば $M=D$ である。

またつぎのことが知られている。

I) (1), (7)式に対し $f(x_0) \neq 0$ で $Az(0) + b \neq 0$ のとき、ある適当な x_0 近傍 M で微分同型写像 ϕ が存在する (文献12)参照)。

II) f が解析関数 $f \in C^\omega$ のときには、コーシー・コワレフスキーの定理から解析関数 ϕ が存在する (文献8)参照)。

以下本論文では、計算機の使用を前提として、つぎの第3章で係数 A と b の代表的な選び方を与え、さらに線形化関数 ϕ をテーラー級数または直交級数表現し残差法で求める。第4章ではこれを(8)式に代入しニュートン法で未知ベクトル y を得る。したがって二点境界値問題が初期値問題に帰着されて解かれる。第5章ではこの手法の誤差限界、および第6章では数値実験を行う。

3. 形式的線形化

3.1 係数の選択

係数行列 A と b の選び方は自由度が大きい。ゆえに、目的、取扱いやすさ、計算容易さなどから選択されるべきであり、代表的なものをつぎに示す。

〈簡易計算型〉

A が対角行列で b が零の場合：

$A = [\lambda_i] (\lambda_i \neq \lambda_j \neq 0: i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$ で $b=0$ とおけば、同一基底関数列が選べ、しかも各変数 ϕ_i ($1 \leq i$

$\leq n$) ごと独立に計算できるのできわめて便利である (文献 12) 参照)。

〈定数線形型〉

$A=0$ で $b \neq 0$ の場合:

独立な $\{\phi_i\}$ を得るため各変数 $\phi_i (1 \leq i \leq n)$ ごと異なった基底関数列を選ばなければならないが、線形変換後の計算が容易である (文献 12) 参照)。

〈線形拡張型〉

$A = P_1 F_1 P_1^{-1}$ で $b = P_1 F_0 - P_1 F_1 P_1^{-1} P_0$ の場合:

(ただし $F_1 = \partial f(x) / \partial x^T$, $F_0 = f(m)$,

P_1 : 正則行列, P_0 : ベクトル)

$f(x)$ が線形の $f(x) = F_0 + F_1(x-m)$ のとき ϕ が唯一の $\phi(x) = P_0 + P_1(x-m)$ と定まるので, f の線形性の強いシステムに対し効果的である。特に P_1 が単位行列のときは $A = F_1$, または適当な P_1 で A は Jordan 標準形に選べて便利である。

3.2 テーラー展開による ϕ の構成

$f \in C^N$ のとき $m = [m_1, \dots, m_n]^T$ 点のまわりでテーラー展開すれば

$$f(x) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^N F(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(x) + o_f(x) \quad (11)$$

ただし

$$H(r_1 \dots r_n)(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - m_i)^{r_i}$$

$$F(r_1 \dots r_n) = \left. \frac{1}{r_1! \dots r_n!} \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n} f(x)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right|_{x=m}$$

$o_f(x)$: N 次を超す項

で $F(\cdot)$ は n 次元ベクトル $F(\cdot) = [F_1(\cdot), \dots, F_n(\cdot)]^T$ である。偏微分方程式 (5) の解を

$$\phi(x) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^{\infty} \alpha^*(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(x) \quad (12)$$

とおく。このとき ϕ が零関数にならないようにたとえば

$$\alpha^*(0 \dots 0) = [1, \dots, 1]^T \quad (13)$$

とおく。残差式

$$R(x) \triangleq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} f_i(x) - A \phi(x) - b \quad (14)$$

の右辺に (11), (12) 式を代入し, $R(x)$ の $(x-m)$ に関し低次の項から係数を零とおいて, (12) 式の係数ベクトル $\{\alpha^*(\cdot)\}$ を定める。こうして得た値が $\{\alpha(\cdot)\}$ のとき (12) 式の近似解を

$$\hat{\phi}(x; N) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^N \alpha(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(x) \quad (15)$$

と定める。

3.3 直交展開による ϕ の構成

基底として連続微分可能な直交関数系 $\{H(r_1 \dots r_n)(x)\}$ を一つ選び, $f \in L^2$ とする。すなわち $\{H(r_1 \dots r_n)(x)\}$ はエルミート, ルジャンドル, ラゲール, チェビシエフ, ヤコビらの直交多項式系や, 三角関数系などのいずれかで, つぎを満たす。

$$E f^T(x) f(x) \triangleq \int \dots \int f^T(x) f(x) w(x) dx_1 \dots dx_n < \infty$$

ただし, E : 積分記号, $w(x)$: 対応する重み関数, $f(x)$ をフーリエ展開すれば

$$f(x) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^{\infty} F(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(x) \quad (16)$$

ただし,

$$F(r_1 \dots r_n) = E(f(x) H(r_1 \dots r_n)(x)) / E(H^2(r_1 \dots r_n)(x))$$

である。(5) 式の解を本直交関数形 $\{H(r_1 \dots r_n)(x)\}$ を用いた (12) 式表現し, これと (16) 式を (14) 式に代入した残差 $R(x)$ に対し, $R(x)$ が低次直交関数から直交:

$$E(R(x) H(r_1 \dots r_n)(x)) = 0$$

$$(r_1 + \dots + r_n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

するように係数 $\{\alpha^*(\cdot)\}$ を求める。これは連立 1 次方程式の解として定まるからその値 $\{\alpha(\cdot)\}$ を用い $\phi(x)$ の近似解を

$$\hat{\phi}(x; N) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^N \alpha(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(x) \quad (17)$$

と定める。特に直交多項式形の場合には $w(x)$ の極限であるデルタ関数としても (17) 式から (15) 式が得られる。

4. 未知欠落境界条件の決定

(8) 式の $\phi(x)$ に (15) または (17) 式の近似式 $\hat{\phi}(x; N)$ を代入する。つぎに (3) 式より $\hat{Y}_1 = [\hat{x}_1(T), \dots, \hat{x}_q(T)]^T$, $\hat{Y}_2 = [\hat{x}_{q+1}(0), \dots, \hat{x}_n(0)]^T$ とおく。さらに (4) 式より $x(0)$ に $\hat{x}(0) = [\Psi^T \hat{Y}_1^T]^T$ および $x(T)$ に $\hat{x}(T) = [\hat{Y}_1^T \Psi_2^T]^T$ を $\hat{\phi}(x; N)$ に代入した式を y の近似解 $\hat{y} = [\hat{Y}_1^T \hat{Y}_2^T]^T$ の成立する等式

$$\hat{h}(\hat{y}) \triangleq \begin{cases} \hat{\phi}(\hat{x}(T); N) - e^{AT}(\hat{\phi}(\hat{x}(0); N) + A^{-1}b) + A^{-1}b = 0 & (\text{if } A \neq 0) \\ \hat{\phi}(\hat{x}(T); N) - \hat{\phi}(\hat{x}(0); N) - bT = 0 & (\text{if } A = 0) \end{cases} \quad (18)$$

とする。これをつぎのニュートン法で解き, 繰返し y が十分収束したときの値 $\hat{y}^{(p)} = [\hat{Y}_1^{(p)T} \hat{Y}_2^{(p)T}]^T$ を y の近似値と定める。 $x(0)$ の近似値 $[\Psi^T \hat{Y}_2^{(p)T}]^T$ を初期

値として(1)式を解けば、 Σ_1 の非線形二点境界値問題が初期値問題として解ける。

《ニュートン法》

$$\hat{y}^{(\nu+1)} = \hat{y}^{(\nu)} - J^{-1}(\hat{y}^{(\nu)}) \hat{h}(\hat{y}^{(\nu)}) \quad (19)$$

ただし、 $\hat{y}^{(0)}$: 繰返し初期値、 $\nu=0, 1, 2, 3, \dots$,

$$J(\hat{y}) = \partial \hat{h}(\hat{y}) / \partial \hat{y}^T$$

$$\hat{h}(\hat{y}) = \begin{cases} \hat{\phi}(\hat{x}(T); N) - e^{AT}(\hat{\phi}(\hat{x}(0); N) + A^{-1}b) \\ \quad + A^{-1}b & (\text{if } A \neq 0) \\ \hat{\phi}(\hat{x}(T); N) - \hat{\phi}(\hat{x}(0); N) - bT & (\text{if } A = 0) \end{cases}$$

$$\hat{\phi}(\hat{x}; N) = \sum_{r_1 + \dots + r_n = 0}^N \alpha(r_1 \dots r_n) H(r_1 \dots r_n)(\hat{x})$$

つぎに本手法の誤差限界について考察する。

5. 誤差限界

本論文では、ベクトル v に対しては任意のベクトルノルム $\|v\|$ を導入し、行列 G に対してはその作用素ノルム $\|G\| = \sup_{v \neq 0} \|Gv\|/\|v\|$ とする。このとき本手法による未知欠落境界値については、つぎの誤差限界式が成立する。

《定理 1》 欠落境界値誤差は

$$\|y - \hat{y}^{(\nu+1)}\| \leq \Delta \varepsilon_N + (1 + \Delta V) \|\hat{y}^{(\nu+1)} - \hat{y}^{(\nu)}\| \quad (20)$$

である。ただし

$$\begin{aligned} y &= [x_1(T) \dots x_q(T) x_{q+1}(0) \dots x_n(0)]^T \\ V &= \sup_{y \in D} \left\| \frac{\partial \hat{h}(y)}{\partial y^T} \right\|, \quad \Delta = \sup_{y \in D} \left\| \left(\frac{\partial \hat{h}(y)}{\partial y^T} \right)^{-1} \right\| \\ \sigma_N &= \sup_{x \in M} \left\| A \hat{\phi}(x; N) + b - \frac{\partial \hat{\phi}(x; N)}{\partial x^T} f(x) \right\| \\ \varepsilon_N &= \begin{cases} \sigma_N (e^{\lambda T} - 1) / \lambda & (\text{if } A \neq 0) \\ \sigma_N T & (\text{if } A = 0) \end{cases} \\ \lambda &= \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i & \text{if } A = [\lambda_i] \text{ でノルムが最大値またはユークリッドノルムの場合} \\ \|A\| & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

(証明) (5) 式の線形化関数 $\phi(x)$ と、この $\phi(x)$ に対する(15)または(17)式の近似関数 $\hat{\phi}(x; N)$ との誤差関数を

$$O(x) \triangleq \phi(x) - \hat{\phi}(x; N) \quad (21)$$

とする。 $O(x)$ の時刻 t に関する運動方程式は(1),(6)式より

$$\begin{aligned} \dot{O} &= \dot{\phi} - \dot{\hat{\phi}} \\ &= (A\phi + b) - \partial \hat{\phi} / \partial x^T \dot{x} \\ &= ((A\phi + b) - (A\hat{\phi} + b)) + (A\hat{\phi} + b - \partial \hat{\phi} / \partial x^T f) \\ &= AO + (A\hat{\phi} + b - \partial \hat{\phi} / \partial x^T f) \end{aligned}$$

である。それゆえ

$$O(x(t)) = e^{At} O(x(0)) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left(A \hat{\phi}(x; N) + b - \frac{\partial \hat{\phi}(x; N)}{\partial x^T} f(x) \right)_{x=x(\tau)} d\tau \quad (22)$$

なので

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &\triangleq O(x(t)) - e^{At} O(x(0)) \\ \sigma_N &\triangleq \sup_{x \in M} \left\| A \hat{\phi}(x; N) + b - \frac{\partial \hat{\phi}(x; N)}{\partial x^T} f(x) \right\| \end{aligned} \quad (23)$$

を定義すれば(22)式から

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| \sigma_N d\tau$$

が得られる。ここで

$$\lambda = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i & \text{if } A = [\lambda_i] \text{ でノルムが最大値またはユークリッドノルムの場合} \\ \|A\| & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおけば $\|e^{A(t-\tau)}\| \leq e^{\lambda(t-\tau)}$ より $t=T$ で

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(T)\| &\leq \int_0^T e^{\lambda(T-\tau)} \sigma_N d\tau \\ &= \begin{cases} \sigma_N (e^{\lambda T} - 1) / \lambda & (\text{if } A \neq 0) \\ \sigma_N T & (\text{if } A = 0) \end{cases} \\ &\triangleq \varepsilon_N \end{aligned}$$

となる。

さて、時刻 $t=0$ と T のときの(21)式を(8)式に代入すれば $\varepsilon(T)$ の定義より

$$\begin{aligned} h(y) &= \begin{cases} \hat{\phi}(x(T); N) - e^{AT}(\hat{\phi}(x(0); N) + A^{-1}b) \\ \quad + A^{-1}b + \varepsilon(T) & (\text{if } A \neq 0) \\ \hat{\phi}(x(T); N) - \hat{\phi}(x(0); N) - bT + \varepsilon(T) & (\text{if } A = 0) \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり(18)式を用いて

$$h(y) = \hat{h}(y) + \varepsilon(T) = 0$$

となる。 $\hat{h}(y)$ に平均値の定理を用いれば

$$h(y) = \hat{h}(\hat{y}^{(\nu)}) + J(\xi)(y - \hat{y}^{(\nu)}) + \varepsilon(T) = 0 \quad (24)$$

ただし、 $\xi = y - \theta(y - \hat{y}^{(\nu)})$, $0 < \theta < 1$

$$J(\xi) = \partial \hat{h}(y) / \partial y^T|_{y=\xi}$$

である。(19)式の

$$\hat{h}(\hat{y}^{(\nu)}) = J(\hat{y}^{(\nu)})(\hat{y}^{(\nu)} - \hat{y}^{(\nu+1)})$$

を(24)式に代入し、左から $J^{-1}(\xi)$ を乗ずれば

$$\hat{y}^{(\nu)} - y = J^{-1}(\xi) J(\hat{y}^{(\nu)})(\hat{y}^{(\nu)} - \hat{y}^{(\nu+1)}) + J^{-1}(\xi) \varepsilon(T)$$

となる。両辺のノルムをとると

$$\|y - \hat{y}^{(\nu)}\| \leq \Delta V \|\hat{y}^{(\nu+1)} - \hat{y}^{(\nu)}\| + \Delta \varepsilon_N \quad (25)$$

ただし、

$$\Delta = \sup_{y \in D} \|J^{-1}(y)\|, \quad V = \sup_{y \in D} \|J(y)\|$$

である。ここで三角不等式:

$$\|y - \hat{y}^{(\nu+1)}\| \leq \|y - \hat{y}^{(\nu)}\| + \|\hat{y}^{(\nu+1)} - \hat{y}^{(\nu)}\|$$

に(25)式を代入して

$$\|y - \hat{y}^{(p+1)}\| \leq A\varepsilon_N + (1 + AV)\|\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)}\|$$

を得る. $\square$

特に(1)式の f が解析関数のときにはさらにつぎが成立する.

《定理2》 $f \in C^\infty$ のとき $N \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ で $\hat{x}(0) \rightarrow x(0)$ である.

(証明) 解析関数 $f \in C^\infty$ に対してはコーシー・コワレフスキーの定理¹⁾より(14)式 $R(x)=0$ の解は $\phi(x) \in C^\infty$ である. ただしこのときのコーシーデータをたとえば $\phi(\mu_1, x_2, \dots, x_n) \in C^\infty$ と考える. (15)式の構成法から $\hat{\phi}(x; N) \rightarrow \phi(x)$ ($N \rightarrow \infty$) であるので(23)式が $\sigma_N \rightarrow 0$ すなわち $\varepsilon_N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) となる. しかも(19)式のニュートン法は $\hat{h}(\hat{y})$ が $\hat{y}$ に関し多項式関数なので2次収束¹³⁾し $\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)} \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$) である. よって定理1の(20)式から $\hat{y}^{(p+1)} \rightarrow y$ となる. しかも(4)式より

$$x(0) = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \hat{Y}_2^{(p+1)} \end{bmatrix}$$

のとき

$$\|x(0) - \hat{x}(0)\| = \|Y_2 - \hat{Y}_2^{(p+1)}\| \leq \|y - \hat{y}^{(p+1)}\| \quad (26)$$

なので, 結局初期境界値が真値の $\hat{x}(0) \rightarrow x(0)$ ($N \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$) へ収束する. $\square$

つぎに二点境界値問題を初期値問題として解いた場合を考える. 任意の時刻 t に対しつぎの誤差限界式が成立する.

《定理3》 時刻 t ($t \leq 0$) 時の誤差は

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq (A\varepsilon_N + (1 + AV)\|\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)}\|)e^{Ft} \quad (27)$$

である. ただし

$$F = \sup_{x \in M} \|\partial f(x)/\partial x^T\|$$

(証明) (1)式の $\dot{x} = f(x)$ を初期値 $x(0)$ および $\hat{x}(0)$ で解いたときの差は

$$x(t) - \hat{x}(t) = (x(0) - \hat{x}(0)) + \int_0^t (f(x(\tau)) - f(\hat{x}(\tau))) d\tau$$

である. 平均値の定理

$$f(x) - f(\hat{x}) = \partial f(x)/\partial x^T|_{x=\xi}(x - \hat{x})$$

$$(\xi = x - \theta(x - \hat{x}), \quad 0 < \theta < 1)$$

を用い両辺のノルムをとれば

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x(0) - \hat{x}(0)\| + F \int_0^t \|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\| d\tau$$

$$\text{ただし, } F = \sup_{x \in M} \|\partial f(x)/\partial x^T\|$$

となる. これはまさに Gronwall の不等式¹²⁾なので

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x(0) - \hat{x}(0)\| e^{Ft} \quad (28)$$

である. (26), (28)式から

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|y - \hat{y}^{(p+1)}\| e^{Ft}$$

となり, 定理1の(20)式を代入して(27)式を得る. $\square$

[系] $f \in C^\infty$ のとき定理2と(28)式より $N \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow \infty$ で各 t ($0 \leq t \leq T$) に対し $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ である.

6. 数値実験

線形化関数(15)式の近似次数 N をパラメータにしたときの, 本手法の計算精度比較を行う. つぎの考察対象の2例題に対しいずれも, (1)式の次元は $n=2$, $q=1$ で, 各係数の設定を $A = [\lambda_i]$ ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$), $b=0$, $\alpha^*(0, 0) = [1, 1]^T$ とする.

[例題1] 多項式問題

つぎの非線形二点境界値問題を考える.

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -1 - (3 + x_1)x_1^2/3(2 + x_1)^2 \\ \dot{x}_2 = -1 - 2x_1 - 2x_2 + (3 + x_1)x_1^2/3(2 + x_1)^2 \end{cases}$$

$$\text{境界条件: } x_1(0) = x_2(1) = 0.5$$

なお本問題の未知境界値解は $x_1(1) = -0.52338$, $x_2(0) = 5.7163$ である.

さて, 3.2節に従い原点 $m=0$ のまわりでテーラー展開したときの(15)式の $\hat{\phi}(x; N)$, および誤差限界式の(20)式は, 各 N に対しつぎの通りであった. ただし(9)(10)式を $M = D = (-0.6, 0.6) \times R$ とし, ノルムを最大値ノルム $\|v\| = \max(|v_1|, |v_2|)$, $\|G\| = \max(|G_{11}| + |G_{12}|, |G_{21}| + |G_{22}|)$ に選んだ. よって $\lambda = \lambda_1 = -1$, $|x_2(0) - \hat{x}_2^{(p+1)}(0)| \leq \|y - \hat{y}^{(p+1)}\|$ である.

< $N=1$ >

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x; 1) &= [1 + x_1, 1 + x_1 + x_2]^T \\ \|y - \hat{y}^{(p+1)}\| &\leq 4.2 + 18\|\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)}\| \end{aligned}$$

< $N=2$ >

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x; 2) &= [1 + x_1 + x_1^2/2, 1 + x_1 + x_2]^T \\ \|y - \hat{y}^{(p+1)}\| &\leq 1.1 + 25\|\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)}\| \end{aligned}$$

< $3 \leq N < \infty$ >

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x; N) &= [1 + x_1 + x_1^2/2 + x_1^3/12, 1 + x_1 + x_2]^T \\ \|y - \hat{y}^{(p+1)}\| &\leq 0 + 26\|\hat{y}^{(p+1)} - \hat{y}^{(p)}\| \end{aligned}$$

これらの結果より繰返し十分収束すれば, 次数 N の増加とともに精度が向上することがわかる.

さらにここで, 各 N について, 4章のニュートン法(19)を用いて数値実験を行うことにする. 繰返し初期値を $\hat{y}^{(0)} = 0$ とした場合の, 有効数字6桁以上が収束するまでの繰返し回数 ν_N と, このときの誤差 $e_N \triangleq |x_2(0) - \hat{x}_2^{(\nu)}(0)|$ はそれぞれつぎの通りであった.

$$\begin{cases} \nu_1 = 2 \\ e_1 = 0.92 \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_2 = 5 \\ e_2 = 0.19 \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_N = 5 \\ e_N = 0 \end{cases} \quad (3 \leq N < \infty)$$

以上より本手法の有効性が確かめられた. つぎに本手法を最適制御問題に应用する.

[例題2] 最適制御問題

つぎの非線形最適制御問題を考える。

制御系: $\dot{x}_1 = (-x_1 + 2x_1^2) + (1+x_1)u$, $x_1(0)=1$

評価: $PI = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2(\tau) + u^2(\tau)) d\tau$, $T=0.1$

ただし, $x_1 \in R$: 状態変数, $u \in R$: 制御変数

最大原理¹⁴⁾を適用すれば, 随伴変数 x_2 を導入して

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = (-x_1 + 2x_1^2) - (1+x_1)^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1-4x_1)x_2 + (1+x_1)x_2^2 \end{cases} \quad (29)$$

境界条件: $x_1(0)=1$, $x_2(0.1)=0$

となる。なお最適制御量は $u = -(1+x_1)x_2$ で与えられる。これは正に $n=2$, $q=1$ の非線形二点境界値問題であり, 本手法が適用される。たとえば $M=D=(-0.1, 1.4) \times (-0.1, 0.2)$ とする。 $m=[1, 0.01]^T$ とおき各 $N(N=1\sim 5)$ についての(15)式 $\phi(x; N)$ に対し, 繰返しを $\hat{y}^{(0)}=[1.136, 0.01]^T$ (注1)から始めたときの解を求めた。このとき繰返し ν は2~5回で十分収束した。試行錯誤により求めた真値 $x_2(0)=0.1209$ との誤差 $e_N \triangleq |x_2(0) - \hat{x}_2^{(N)}(0)|$ はつぎの通りであった。

$$e_1=0.012, \quad e_2=0.0005, \quad e_3=0.0002$$

$$e_4=0.0001, \quad e_5=0.0001$$

つぎにこうして計算された $\hat{x}_2^{(N)}(0)$ を初期値 $\hat{x}(0)=[x_1(0), \hat{x}_2^{(N)}(0)]^T$ として(29)式に対する初期値問題を解いた。本手法 (formal linearization method) (15) 式の各 $N(N=1\sim 5)$ に関する誤差の2乗和

$$J(t) \triangleq \int_0^t ((x_1(\tau) - \hat{x}_1(\tau))^2 + (x_2(\tau) - \hat{x}_2(\tau))^2) d\tau$$

を図中の太線で示す。比較のため, 代表的な手法である不変埋め込み法 (invariant imbedding method) と準線形化法 (quasilinearization method) による $J(t)$ の結果も同時に示す。Fig. 1 の細線は不変埋め込み法において, 時間 t の区間 $[0, 0.1]$ および終端点 $x_1(0.1)$ の領域 $[0, 1.3]$ をともに $K(K=1\sim 100)$ 個に等分割し, 繰返し計算初期値を $x_1(0.1)=1.3$ としたときの結果である。Fig. 2 の細線は準線形化法において, 時間 t の区間 $[0, 0.1]$ を $K(K=1\sim 100)$ 個に等分割し, 繰返し計算初期値を $x_1(t)=1$, $x_2(t)=0$ ($0 \leq t \leq 0.1$) としたときの結果である。

これらの結果より, 本手法は線形化近似次数 N の増加に伴い精度が向上していくことがわかった。さらに本手法の $N=2$ と不変埋め込み法の $K=100$, および本手法の $N=5$ と準線形化法の $K=10$ の精度がほぼ同程度であることが示され, 本手法の優越性が確かめ

Fig. 1 $J(t)$ versus time by Formal linearization method when $N=1\sim 5$ and by Invariant imbedding method when $K=1\sim 100$

Fig. 2 $J(t)$ versus time by Formal linearization method when $N=1\sim 5$ and by Quasilinearization method when $K=1\sim 100$

られた。

7. む す び

以上, 形式的線形化法による非線形二点境界値問題の数値解法とその誤差限界について考察した。数値実験より本手法の有効性が確かめられたが, その精度は, 主に, 線形化関数の近似度に依存することがわかった。さらに二点境界値問題解法の代表的手法である不変埋め込み法や準線形化法と, 同等以上の高精度であることも確かめられた。本問題は, 形式的線形化法を土台にしているので, 非線形多点境界値問題などへの拡張も容易に可能と思われる。非線形二点境界値問題のさらに詳細な検討, および拡張問題などは, 今後

(注1) $\hat{y}^{(0)}$ の値は, 初期値が $x(0)=m$ のときの(29)式の解 $x_1(0.1)=1.136$ である。

に残された研究課題である。

参 考 文 献

- 1) 日本数学会：岩波数学辞典（3版），岩波書店（1985）
- 2) P.B. Bailey, L.F. Shampine and P.E. Waltman : Nonlinear Two Point Boundary Value Problems, Academic Press (1968)
- 3) S.M. Roberts and J.S. Shipman : Two-Point Boundary Value Problems : Shooting Methods, American Elsevier Pub. Co. Inc. (1972)
- 4) E.S. Lee : Quasilinearization and Invariant Imbedding, Academic Press (1968)
- 5) 日野幹雄：境界値問題の解法，朝倉書店（1981）
- 6) H.M. Paynter : Scaling Transformations for the Kepler Orbit, Nonlinear System. Anal. Synt., **2**, ASME, 75/88 (1980)
- 7) J.L. Casti : Nonlinear System Theory, Academic Press (1985)
- 8) 高田 等：非線形システムに対する非線形逆関数形の形式的線形化法，電気学会論文誌，**C-105-9**, 177/183(1985)
- 9) A.J. Krener : Approximate Linearization by State Feedback and Coordinate Change, Systems and Control Letters, **5**, 181/185 (1984)
- 10) C. Reboulet and C. Champetier : A New Method for Linearizing Non-Linear Systems : the Pseudo-linearization, Int. J. Control, **40-4**, 631/638 (1984)
- 11) W.T. Baumann and W.J. Rugh : Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31-1**, 40/46 (1986)
- 12) 高田 等：重みつき残差法による非線形システムの形式的線形化計算法，計測自動制御学会論文集，**27-3**, 283/290 (1991)
- 13) 洲之内治男：数値計算，サイエンス社（1983）
- 14) A.P. Sage and C.C. White III : Optimal Systems Control, 2nd Edition, Prentice-Hall, Inc. (1977)

〔著 者 紹 介〕

高 田 等 (正会員)

1973年，九州大学大学院電気工学専攻博士課程修了，同年九州大学助手。1975年九州工業大学助教授（電気工学科情報工学教室），現在に至る。主に非線形システム制御論の研究に従事。工学博士。電気学会，システム制御情報学会，IEEEなどの会員。