フィードバック遅れを考慮した離散時間 二重既約分解の状態空間表現

石原 正*・鄭 良安*・猪岡 光*

State-Space Representation of Discrete-Time Doubly
Coprime Factorization Accounting Feedback Delays

Tadashi ISHIHARA*, Liang-An ZHENG* and Hikaru INOOKA*

Taking account of feedback delays, we discuss a state-space representation of the discrete-time doubly coprime factorization. First, we give eight proper and stable matrices satisfying the relation of the doubly coprime factorization based on the predictor-based LQG controller which consists of a filtering type Kalman filter and a state predictor. It is found that the factorizations for different delays are related to each other by a simple free parameter in the YJB parametrization. Then we propose a simple and convenient parametrization for all stabilizing controllers under feedback delays. The free parameter in this parametrization can be an arbitrary proper and stable rational matrix. Using this parametrization, we can easily apply various new design techniques, which are usually proposed for continuous-time systems, to discrete-time systems under feedback delays. Finally, as an application, we discuss loop transfer recovery using the free parameter in the proposed parametrization.

Key Words: discrete-time systems, doubly coprime factorization, YJB parametrization, LQG controllers, feedback delays, state predictor, loop transfer recovery

1. はじめに

最近、安定化コントローラのパラメトリゼーション (YJB パラメトリゼーション)¹⁾に基づく種々の制御系設計法が提案されている^{2)~5)}。これらの設計法により得られるコントローラは従来用いられているものに比べて多くのオンライン計算を必要とするため、デジタル制御系として実現した場合、演算時間によるフィードバック遅れが問題となる可能性が高い。この問題を回避する一つの方法は離散時間系に対するフィードバック遅れを考慮した安定化コントローラのパラメトリゼーションに基づいて設計を行うことである。

この場合、コントローラとして1個のプロセッサが用いられるのであれば、1ステップの演算遅れを考慮すれば十分である。しかし、複数のプロセッサの利用やセンサ信号の伝送遅れが存在する場合への対処を

考慮すると、一般的なフィードバック遅れに対するパラメトリゼーションについて考察することも必要と考えられる。

安定化コントローラのパラメトリゼーションを得るためには、二重既約分解を満足する安定有理関数行列を求める必要がある²⁾。連続時間系に対するこれらの行列はLQGコントローラに基づく状態空間表現により容易に求められることが知られている⁶⁾。しかし、この結果に対応する離散時間表現を用いて、一般的なフィードバック遅れに対する安定化コントローラのパラメトリゼーションを行うと、自由パラメータに制約を課す必要が生じる。

本論文では、フィードバック遅れを考慮した離散時間二重既約分解の状態空間表現を導き、この表現に基づく安定化コントローラのパラメトリゼーションについて考察する。まず、ろ波型Kalmanフィルタと状態予測器を用いた離散時間LQGコントローラ^{7)~9)}に基づく離散時間二重既約分解の状態空間表現を導く。この結果は文献8), 9)ですでに報告されている結果を含むものであるが、ここではYJBパラメトリゼーション

* 東北大学工学部 仙台市青葉区荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

(Received June 28, 1991)

(Revised September 10, 1991)

ン¹⁾に基づく構造的な証明を与え、いくつかの性質を明らかにする。つぎに、この状態空間表現を用いたフィードバック遅れを考慮した安定化コントローラの簡単なパラメトリゼーションを提案し、オブザーバを含むコントローラとしての解釈を与える。このパラメトリゼーションにおける自由パラメータとしては任意のプロパー安定有理関数行列が許容されるため、これを用いて種々の最適化を容易に行うことができる。最後に、提案したパラメトリゼーションの応用として、自由パラメータを用いたループ伝達関数回復について考察し、通常のループ伝達関数回復法との関係を明らかにする。

2. 状態予測器を用いた離散時間 LQG コントローラ

プラントのつぎのような離散時間状態空間確率モデルを考える。

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^m$ は制御入力、 $y(t) \in R^m$ は出力ベクトルである。また、 $w(t) \in R^n$ は外乱ベクトル、 $v(t) \in R^m$ は観測ノイズであり、共分散行列がそれぞれ Q 、 R で与えられる零平均正規性白色過程であるものとする。また、 (A, B) は可安定、 (C, A) は可検出であるものと仮定する。さらに、出力 $y(t)$ から制御入力 $u(t)$ までのフィードバック経路には L ステップのフィードバック遅れが存在するものとする。このとき、つぎのような 2 次形式評価関数を最小化する問題を考える。

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} [y'(t)y(t) + \rho u'(t+L)u(t+L)]/T \right\} \quad (2.2)$$

ここで、 ρ は非負のスカラー定数である。この離散時間 LQG 問題の解はつぎのように与えられることが知られている。

$$u(t+L) = -F\hat{x}(t+L|t) \quad (2.3)$$

ここで、行列 F は全状態が完全に測定可能であり、フィードバック遅れが存在しない場合 ($L=0$) の最適フィードバックゲインであり、 $\hat{x}(t+L|t)$ は t ステップまでの入出力データに基づく $t+L$ ステップにおける状態の最適予測値である。この予測値はつぎのような状態予測器により算出される。

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+L|t) &= A^L \hat{x}(t|t) + A^{L-1}Bu(t) + A^{L-2}Bu(t+1) \\ &\quad + \cdots + Bu(t+L-1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで、 $\hat{x}(t|t)$ はつぎのような波型 Kalman フィルタにより得られる状態 $x(t)$ の最適推定値である。

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t+1) &= A\hat{x}(t|t) + Bu(t) + K_f[y(t+1) \\ &\quad - C[A\hat{x}(t|t) + Bu(t)]] \\ &= (I - K_fC)[A\hat{x}(t|t) + Bu(t)] \\ &\quad + K_f y(t+1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、 K_f は波型 Kalman フィルタゲイン行列である。Fig. 1 に制御対象入力側に L ステップのフィードバック遅れが含まれるとした場合の制御系のブロック図を示す。

(2.3)~(2.5)式から、制御入力と状態推定値の間にはつぎの関係が成立することが容易に確かめられる。

【命題 2.1】 $u(z)$ および $\hat{x}(z)$ をそれぞれ制御入力 $u(t)$ および状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ の z 変換とすると、つぎの関係が成立する。

$$u(z) = \Phi_L(z)\hat{x}(z) \quad (2.6)$$

とすると、

$$\Phi_L(z) = -z^{-L}D_L^{-1}(z)FA^L \quad (2.7)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} D_L(z) &= I + z^{-1}FB + \cdots + z^{-L}FA^{L-1}B \quad (L \geq 1) \\ &= I \quad (L=0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。

上の命題から、Fig. 1 の状態予測器を含む LQG 制御系は Fig. 2 のように (2.5) 式の波型 Kalman フ

Fig. 1 The discrete-time control system including the feedback delays and the predictor-based LQG controller

Fig. 2 Simplified structure of the control system shown in Fig. 1

フィルタと (2.7) 式で与えられる動的なフィードバックゲイン行列 $\Phi_L(z)$ により構成されているとみなせる。

(注意 2.1) Fig. 1 と Fig. 2 の制御系が等価であることはブロック図の等価変換によっても明らかである。また、Fig. 2 の表現ではフィードバック遅れは動的なフィードバックゲイン行列 $\Phi_L(z)$ に陰に含まれていることに注意する必要がある。

(注意 2.2) $L \geq 1$ の場合には、(2.3) ~ (2.5) 式で与えられるコントローラと等価なものを $(L-1)$ ステップ先を予測する状態予測器とフィルタゲイン行列 K_f を AK_f とした予測型 Kalman フィルタにより構成できる。

3. 二重既約分解の状態空間表現

連続時間系に対して、Nett ら⁶⁾は二重既約分解を満足する行列の状態空間表現を LQG コントローラを用いて与えている。連続時間 Kalman フィルタに対応する離散時間 Kalman フィルタは予測型のものであることを考えれば、この結果から離散時間二重既約分解の予測型 Kalman フィルタを用いた LQG コントローラに基づく状態空間表現がただちに得られる。予測型 Kalman フィルタは波型 Kalman フィルタと 1 ステップ先を予測する状態予測器を組み合わせたものとみなせる。

前章で考察した波型 Kalman フィルタと L ステップ先を予測する状態予測器を用いた LQG コントローラを用いると、つぎのような離散時間二重既約分解の状態空間表現が得られる。この結果は文献 8) で直接的な行列計算により導いた結果と等価なものであるが、ここでは、YJB パラメトリゼーション¹⁾を用いた構造的な証明を与える。

[命題 3.1] (2.1) 式で与えられる離散時間プラントの制御入力 $u(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数行列を $G(z)$ と定義する。すなわち、

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (3.1)$$

とする。また、このプラントに対する L ステップの状態予測器を含む LQG コントローラの $y(t)$ から $u(t)$ までの伝達関数行列を $H_L(z)$ と定義する。このとき、伝達関数行列 $G(z)$ および $H_L(z)$ はプロパー安定有理関数行列によりそれぞれつぎのように既約分解される。

$$G(z) = \bar{M}^{-1}(z)\bar{N}(z) = N(z)M^{-1}(z) \quad (3.2)$$

$$H_L(z) = \bar{V}_L^{-1}(z)\bar{U}_L(z) = U_L(z)V_L^{-1}(z) \quad (3.3)$$

ここで、

$$M(z) = I - F(zI - A + BF)^{-1}B \quad (3.4)$$

$$N(z) = C(zI - A + BF)^{-1}B \quad (3.5)$$

$$\bar{M}(z) = I - C[zI - A(I - K_f C)]^{-1}AK_f \quad (3.6)$$

$$\bar{N}(z) = C[zI - A(I - K_f C)]^{-1}B \quad (3.7)$$

$$U_L(z) = -z^{-(L-1)}F(zI - A + BF)^{-1}A^L K_f \quad (3.8)$$

$$V_L(z) = W_L(z) + z^{-L}C(A - BF) \cdot (zI - A + BF)^{-1}A^L K_f \quad (3.9)$$

$$\bar{U}_L(z) = -z^{-(L-1)}FA^L[zI - (I - K_f C)A]^{-1}K_f \quad (3.10)$$

$$\bar{V}_L(z) = D_L(z) + z^{-L}FA^L[zI - (I - K_f C)A]^{-1} \cdot (I - K_f C)B \quad (3.11)$$

である。ただし、(3.11) 式に含まれる行列 $D_L(z)$ は (2.8) 式で定義され、(3.9) 式に含まれる行列 $W_L(z)$ はつぎのように定義されるものとする。

$$W_L(z) = I + z^{-1}CAK_f + \dots + z^{-L}CA^L K_f \quad (L \geq 1) \\ = I \quad (L = 0) \quad (3.12)$$

さらに、(3.4) ~ (3.11) 式で与えられる行列はつぎの二重既約分解の関係を満足する。

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_L & -\bar{U}_L \\ -\bar{N} & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U_L \\ N & V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

(証明) 行列 $A - BF$, $A(I - K_f C)$, $(I - K_f C)A$ の安定性は LQG 理論により保証されていることと、行列 $D_L(z)$ および $W_L(z)$ は FIR 型であることから (3.4) ~ (3.11) 式により定義される各行列はプロパーかつ安定な有理関数行列であることが容易に確かめられる。

$L = 0$ の場合に上の命題が成立することは直接行列計算を行うことにより容易に示される。また、 $L \geq 0$ に対する $H_L(z)$ の左既約分解は (3.10) および (3.11) 式で定義される行列により与えられることが (2.3) ~ (2.5) 式から容易に導かれる。したがって、 $L \geq 1$ に対する $H_L(z)$ の右既約分解の表現を得ることと、(3.4) ~ (3.11) 式が二重既約分解の関係 (3.13) 式を満たすことを示す必要がある。このことを $L = 0$ の場合の結果と YJB パラメトリゼーションを用いることにより証明する。

$L = 0$ とした (3.4) ~ (3.11) 式に基づく YJB パラメトリゼーションを考える。コントローラ $H_L(z)$ ($L \geq 0$) はプラント $G(z)$ に対する安定化コントローラの一つであるから、このパラメトリゼーションにより表現できる。すなわち、つぎの関係を満足するプロパー安定有理関数行列 R_L が存在する。

$$H_L(z) = (\bar{V}_0 + R_L \bar{N})^{-1}(\bar{U}_0 + R_L \bar{M}) \\ = (U_0 + MR_L)(V_0 + NR_L)^{-1} \quad (3.14)$$

$H_L(z)$ の左既約分解の一つは (3.10) および (3.11) 式で与えられることから、

$$\bar{U}_L = \bar{U}_0 + R_L \bar{M} \quad (3.15)$$

$$\bar{V}_L = \bar{V}_0 + R_L \bar{N} \quad (3.16)$$

を満足するプロパー安定有理関数行列 R_L が存在す

ば、行列 $(U_0 + MR_L)$ および $(V_0 + NR_L)$ により $H_L(z)$ の右既約分解の一つが与えられることになる。行列 $\bar{M}$ は正則であり、 $\bar{U}_L$ および $\bar{U}_0$ の表現はすでに得られていることから、(3.15)式を満足する R_L は次式から一意的に定まる。

$$R_L(z) = [\bar{U}_L(z) - \bar{U}_0(z)]\bar{M}^{-1}(z) \quad (3.17)$$

(3.6)式およびすでに得られている(3.10)式の表現を用いると(3.17)式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} R_L(z) &= zF(I - z^{-L}A^L)[zI - (I - K_fC)A]^{-1}K_f \\ &\quad \cdot \{I - C[zI - A(I - K_fC)]^{-1}AK_f\}^{-1} \\ &= zF(I - z^{-L}A^L)[zI - (I - K_fC)A]^{-1}K_f \\ &\quad \cdot \{I - CA[zI - (I - K_fC)A]^{-1}K_f\}^{-1} \\ &= F(I - z^{-L}A^L)(I - z^{-1}A)^{-1}K_f \\ &= FK_f + z^{-1}FAK_f + \cdots + z^{-(L-1)}FA^{L-1}K_f \end{aligned} \quad (3.18)$$

上式は FIR (Finite Impulse Response) 型であり、明らかにプロパー安定な有理関数行列である。(3.18)式を(3.16)式右辺に代入し、計算を行うと(3.16)式が成立することが確かめられる。(3.18)式を用いて $(U_0 + MR_L)$ および $(V_0 + NR_L)$ を計算すると、それぞれ(3.8)および(3.9)式に一致することが確かめられる。

また、(3.13)式が $L=0$ の場合に満足されているば、任意のプロパー安定有理関数行列 Q に対してつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{V}_0 + Q\bar{N} & -(\bar{U}_0 + Q\bar{M}) \\ -\bar{N} & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U_0 + MQ \\ N & V_0 + NQ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

したがって、 $L \geq 1$ の場合に、(3.4)～(3.11)式が二重既約分解の関係(3.13)式を満たすことは明らかである。

(3.1)式で与えられるプラント $G(z)$ を安定化するすべてのコントローラの集合を $\Omega(G)$ で表わす。命題 3.1 で与えたプラントおよびコントローラ $H_L(z)$ の既約分解表現に基づく YJB パラメトリゼーションを考えると、 $\Omega(G)$ に属する任意のコントローラ $H(z)$ はプロパー安定有理関数行列 Q を用いてつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} H(z) &= (\bar{V}_L + Q\bar{N})^{-1}(\bar{U}_L + Q\bar{M}) \\ &= (U_L + MQ)(V_L + NQ)^{-1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

(注意 3.1) (3.20)式のパラメトリゼーションは L ステップのフィードバック遅れを考慮した LQG コントローラに基づいているが、プラント $G(z)$ に対する全安定化コントローラのパラメトリゼーションを与えるものであり、自由パラメータ Q を任意に選んだ場

合、 $H(z)$ が L ステップの遅れを許容する保証はない。フィードバック遅れを許容するパラメトリゼーションについては次章で考察する。

命題 3.1 の証明の副産物として、異なるフィードバック遅れに対する状態予測器を用いた LQG コントローラは YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータによりつぎのように関係づけられることがわかる。

[命題 3.2] (a) $L=0$ として得られる LQG コントローラ $H_0(z)$ に基づく YJB パラメトリゼーションを考える。このとき、 L ステップの状態予測器を用いた LQG コントローラ $H_L(z)$ に対応する YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータは

$$R_L(z) = FK_f + z^{-1}FAK_f + \cdots + z^{-(L-1)}FA^{L-1}K_f \quad (3.21)$$

で与えられる。

(b) $(L+1)$ ステップの状態予測器を用いた LQG コントローラ $H_{L+1}(z)$ は L ステップの状態予測器を用いた LQG コントローラ $H_L(z)$ に基づく YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータ

$$R_{L+1/L}(z) = z^{-L}FA^L K_f \quad (3.22)$$

に対応する。

(証明) (a) 命題 3.1 における証明の過程から明らか。(b) LQG コントローラ $H_L(z)$ は $H_0(z)$ に基づく YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータ R_L により与えられるとき、 $H_{L+1}(z)$ は $H_L(z)$ に基づく YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータ

$$R_{L+1/L}(z) = R_{L+1}(z) - R_L(z) \quad (3.23)$$

により与えられることが容易に確かめられる。(3.21)および(3.23)式から(3.22)式が得られる。■

(注意 3.2) 異なる遅れに対する状態予測器を用いた LQG コントローラは YJB パラメトリゼーションにおける FIR 型の自由パラメータにより表現される。YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータを可調整パラメータとみなし、オフラインあるいはオンラインで最適化する制御系の構成法が提案されている^{4),5)}が、これらの構成法では、FIR 型の自由パラメータが用いられている。上の命題は特別な FIR 型の自由パラメータに対して明確な意味付けを与えるものである。

(注意 3.3) 最近、連続時間系に対して、動的なフィードバックゲイン行列を含む制御系と YJB パラメトリゼーションの関係が明らかにされている¹⁰⁾。命題 2.1 で指摘したように、状態予測器を含む LQG コントローラは Kalman フィルタと動的なフィードバック

ゲイン行列 $\Phi_L(z)$ により構成されているとみなせる。上の命題は (2.7) 式で与えられる動的なフィードバックゲイン行列 $\Phi_L(z)$ に (3.21) 式で与えられる自由パラメータが対応していることを示している。

連続時間系に対しては、Nett^ら⁶⁾の結果を用いることにより、YJB パラメトリゼーションの自由パラメータの役割を LQG コントローラと関係付けて解釈できることが知られている⁴⁾。離散時間 YJB パラメトリゼーションにおける自由パラメータと命題 2.1 で与えられる波型 Kalman フィルタを用いた離散時間 LQG コントローラの関係はつぎのように与えられる。

[命題 3.3] 命題 3.1 で与えられる行列と自由パラメータ Q を用いた YJB パラメトリゼーションにより、つぎのように左既約分解表現されるコントローラ $H(z)$ を考える。

$$H(z) = [\bar{V}_L(z) + Q(z)\bar{N}(z)]^{-1} [\bar{U}_L(z) + Q(z)\bar{M}(z)] \quad (3.24)$$

このとき、制御入力 $u(t)$ の z 変換 $u(z)$ はつぎのように表わされる。

$$u(z) = \Phi_L(z)\hat{x}(z) + D_L^{-1}(z)Q(z)\varepsilon(z) \quad (3.25)$$

ここで、 $\varepsilon(z)$ は 1 ステップ先の出力予測誤差系列の z 変換であり、 $y(z)$ および $\hat{x}(z)$ をそれぞれ出力 $y(t)$ および状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ の z 変換とすると、つぎのように与えられる。

$$\varepsilon(z) = y(z) - z^{-1}C[A\hat{x}(z) + Bu(z)] \quad (3.26)$$

(証明) $u(z) = H(z)y(z)$ であるから、(3.24) 式を用いると $u(z)$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{V}_L(z)u(z) &= \bar{U}_L(z)y(z) + Q(z)[\bar{M}(z)y(z) \\ &\quad - \bar{N}(z)u(z)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

(2.5) 式から状態推定値 $\hat{x}(t|t)$ の z 変換 $\hat{x}(z)$ はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{x}(z) &= [zI - (I - K_f C)A]^{-1} \\ &\quad \cdot [(I - K_f C)Bu(z) + zK_f y(z)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

この表現を用いると、状態の 1 ステップ最適予測値 $A\hat{x}(t|t) + Bu(t)$ の z 変換はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} A\hat{x}(z) + Bu(z) &= A[zI - (I - K_f C)A]^{-1} \\ &\quad \cdot [(I - K_f C)Bu(z) + zK_f y(z)] \\ &\quad + Bu(z) \\ &= [zI - A(I - K_f C)]^{-1} \{A(I - K_f C) \\ &\quad + [zI - A(I - K_f C)]\} Bu(z) \\ &\quad + z[zI - A(I - K_f C)]^{-1} AK_f y(z) \\ &= z[zI - A(I - K_f C)]^{-1} [AK_f y(z) \\ &\quad + Bu(z)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.6), (3.7), (3.26), (3.29) 式から

$$\bar{M}(z)y(z) - \bar{N}(z)u(z) = \varepsilon(z) \quad (3.30)$$

が成立していることが容易に確かめられる。(3.10), (3.11), (3.28), (3.30) 式を (3.27) 式に用いると

$$D_L(z)u(z) = -z^{-L}FA^L\hat{x}(z) + Q(z)\varepsilon(z) \quad (3.31)$$

が得られる。(2.7) 式を (3.31) 式に用いると (3.25) 式の表現が得られる。■

(注意 3.4) 自由パラメータ Q に加えられる信号 $\varepsilon(z)$ は出力の 1 ステップ予測誤差であり、 $y(z) - C\hat{x}(z)$ とは異なることに注意されたい。

4. フィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーション

本章では、フィードバック遅れを考慮した安定化コントローラのパラメトリゼーションについて考察する。以下の議論では、前章で考察した LQG コントローラの伝達関数 $H_L(z)$ と同様にフィードバック遅れはコントローラの伝達関数行列に含めて考えるものとする。

正整数 L に対して、つぎのように定義されるフィードバック遅れを含むコントローラのクラスを考える。

$$\Omega_L(G) = \{H | H \in \Omega(G) \text{ and } \lim_{z \rightarrow \infty} z^{L-1}H(z) = 0\} \quad (4.1)$$

ここで、 $\Omega(G)$ は (3.1) 式で与えられるプラント $G(z)$ を安定化するすべてのコントローラの集合である。

(注意 4.1) コントローラ $H(z)$ のインパルス応答系列を $\{h_i, i=0, 1, \dots\}$ とするとき、(4.1) 式の 2 番目の条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{L-1}H(z) = 0 \quad (4.2)$$

は、 $i=0, 1, \dots, L-1$ に対して $h_i=0$ が成立することを意味することが容易に確かめられる。したがって、 $\Omega_L(G)$ は ' L ステップ以上のフィードバック遅れを含む安定化コントローラのクラス' と考えることができる。

$H_L(z)$ に基づく YJB パラメトリゼーションの自由パラメータと $\Omega_L(G)$ との間に、つぎの補題が成立する。

[補題 4.1] YJB パラメトリゼーションにより (3.20) 式のように与えられるコントローラ $H(z)$ を考える。このとき、 $H \in \Omega_L(G)$ となる必要かつ十分な条件は

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{L-1}Q(z) = 0 \quad (4.3)$$

が成立することである。

(証明) (3.20) 式の右既約分解表現を用いると

$$\begin{aligned} z^{L-1}H(z) &= [z^{L-1}U_L(z) + z^{L-1}M(z)Q(z)] \\ &\quad \cdot [V_L(z) + N(z)Q(z)]^{-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

自由パラメータ Q はプロパーな安定有理関数行列であ

ることから

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Q(z) < \infty \quad (4.5)$$

が成立する。また、(3.4)～(3.9)式から

$$M(\infty) = I, \quad N(\infty) = 0, \quad V_L(\infty) = I \quad (4.6)$$

および

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-L-1} U_L(z) = 0 \quad (4.7)$$

が成立する。(4.5)～(4.7)式を(4.4)式に用いると、(4.3)式は(4.1)式の2番目の条件(4.2)式に等価であることが容易に確かめられる。

上の補題を用いると、(3.20)式のパラメトリゼーションに簡単な修正を加えるだけで、つぎのようなフィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーションを容易に得ることができる。

〔命題 4.1〕 L ステップの状態予測器を含む LQG コントローラ $H_L(z)$ に基づく(3.20)式で与えられる YJB パラメトリゼーションを考える。 Q_L を任意のプロパー安定有理関数行列とすると、(3.20)式における自由パラメータ Q を

$$Q(z) = z^{-L} Q_L(z) \quad (4.8)$$

で置き換える。このとき、(4.1)式で定義される集合 $\Omega_L(G)$ に属するコントローラはプロパー安定有理関数行列 Q_L によりパラメトライズされる。

(注意 4.2) 上の命題で与えられるパラメトリゼーションでは、新しい自由パラメータ Q_L に制約はない。したがって、このパラメトリゼーションを用いて種々の周波数領域におけるフィードバック特性の最適化を容易に行うことができる。通常、フィードバック遅れが増加すると、達成可能なフィードバック特性は悪化する。このことから、‘ L ステップ以上のフィードバック遅れを含む安定化コントローラのクラス’ $\Omega_L(G)$ に関して最適化を行った結果得られるコントローラは多くの場合 L ステップの遅れを含むものとなる。したがって、実質的には、このパラメトリゼーションを用いて L ステップの遅れを含むコントローラを効率的に設計できると考えられる。

命題 3.3 を利用すると、命題 4.1 で与えたパラメトリゼーションにおける新しい自由パラメータ Q_L の役割に関して、つぎの結果が容易に得られる。

〔命題 4.2〕 (3.20) 式の左既約分解表現と(4.8)式により与えられるパラメトリゼーションによりつぎのように表現されるコントローラ $H(z)$ を考える。

$$H(z) = [\bar{V}_L(z) + z^{-L} Q_L(z) \bar{N}(z)]^{-1} \cdot [\bar{U}_L(z) + z^{-L} Q_L(z) \bar{M}(z)] \quad (4.9)$$

Fig. 3 Modified parametrization accounting the feedback delays

このとき、制御入力 $u(t)$ の z 変換 $u(z)$ はつぎのように表わされる。

$$u(z) = -z^{-L} D_L^{-1}(z) [F A^L \hat{x}(z) - Q_L(z) \varepsilon(z)] \quad (4.10)$$

ここで、 $\varepsilon(z)$ は(3.26)式で定義される1ステップ先の出力予測誤差系列の z 変換である。

(証明略)

(4.10)式を用いると、命題 4.1 で与えたパラメトリゼーションは Fig. 3 のように表現できる。新しいパラメトリゼーション Q_L により波された予測誤差系列 $\varepsilon(z)$ は動的なフィードバックゲイン行列 $z^{-L} D_L^{-1}(z)$ の前に挿入される。

5. 自由パラメータを用いたループ伝達関数回復

最近、Moore ら¹¹⁾は、連続時間系に対して YJB パラメトリゼーションの自由パラメータを用いたループ伝達関数回復法を提案している。ここでは、前章で与えたパラメトリゼーションの応用として、フィードバック遅れを伴う離散時間系に対する自由パラメータを用いたループ伝達関数回復について考察する。この場合回復されるループ伝達関数に対しては、連続時間系の場合のような大きな安定余裕が保証されない。しかし、回復される特性は、理想的な場合に対応するものであり、定性的には優れたロバスト性を有していることが期待できる。

以下の議論では、状態空間モデルの伝達関数行列の表現によく用いられるつぎのような表示法を用いる。

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]_T = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (5.1)$$

また、ここではループ伝達関数回復問題を感度行列の回復問題に帰着させて考えることにする。

Ishihara⁸⁾はフィードバック遅れを伴う離散時間系

に対する評価関数の重み行列あるいは観測雑音の共分散行列の漸近値を用いる通常のループ伝達関数回復法について考察している。そこでは、最小位相プラントに対してプラント入力側で回復されるべき感度行列はつぎのように与えられることが明らかにされている。

$$S_L^*(z) = [I + F(zI - A)^{-1}B]^{-1}D_L(z) \quad (5.2)$$

ここで、 $D_L(z)$ は (2.8) 式で定義される行列である。この結果と前節で与えたフィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーションを用いることにより、つぎの結果が得られる。

【命題 5.1】 (3.1) 式で与えられるプラント $G(z)$ は最小位相であると仮定する。このプラントに命題 4.1 で与えたフィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーションを考える。このとき、自由パラメータ Q_L をつぎのように選べば、プラント入力側におけるループ伝達関数回復が達成される。

$$Q_L^*(z) = z \left[\begin{array}{c|c} [I - B(CB)^{-1}C]A & B(CB)^{-1} - K_f \\ \hline -FA^L & 0 \end{array} \right]_T \quad (5.3)$$

(証明) 行列に関する恒等式

$$[I + F(zI - A)^{-1}B]^{-1} = I - F(zI - A + BF)^{-1}B$$

が成立することを用いると、(3.4) 式で定義される行列 $M(z)$ を用いると (5.2) 式はつぎのように表わされる。

$$S_L^*(z) = M(z)D_L(z) \quad (5.4)$$

命題 4.1 で与えられたパラメトリゼーションにおける自由パラメータ Q_L により (4.9) 式のように与えられるコントローラ $H(z)$ により、プラント入力において達成される感度行列はつぎのように表わされる。

$$S_L(z) = [I - H(z)G(z)]^{-1} \\ = M(z)[\bar{V}_L(z) + z^{-L}Q_L(z)\bar{N}(z)] \quad (5.5)$$

ループ伝達関数回復に関する誤差感度行列を

$$\bar{S}_L(z) = S_L(z) - S_L^*(z) \quad (5.6)$$

と定義すると、(5.4)、(5.5) 式により、この行列はつぎのように表わせる。

$$\bar{S}_L(z) = M(z)\{z^{-L}Q_L(z)\bar{N}(z) - [D_L(z) - \bar{V}_L(z)]\} \quad (5.7)$$

(3.4) 式で定義される行列 $M(z)$ は正則であることに注意すると、 $\bar{S}_L(z) = 0$ とする自由パラメータ $Q_L^*(z)$ はつぎの関係式を満足する。

$$Q_L^*(z)\bar{N}(z) = z^L[D_L(z) - \bar{V}_L(z)] \quad (5.8)$$

(3.7)、(3.11) 式を用いると、(5.8) 式はつぎのように書ける。

$$Q_L^*(z)C[zI - A(I - K_fC)]^{-1}B \\ = -FA^L[zI - (I - K_fC)A]^{-1}(I - K_fC)B \quad (5.9)$$

ここで、(5.9) 式の両辺に z をかけ、 $Q_L^*(z)$ をプロパーな安定有理関数行列の比としてつぎのように表わす。

$$Q_L^*(z) = -\{zFA^L[zI - (I - K_fC)A]^{-1}(I - K_fC)B \\ \cdot \{zC[zI - A(I - K_fC)]^{-1}B\}^{-1} \\ = -z\{FA^L(I - K_fC)[zI - A(I - K_fC)]^{-1}B \\ \cdot \{C[zI - A(I - K_fC)]^{-1}A(I - K_fC)B \\ + CB\}^{-1} \quad (5.10)$$

明らかに、(3.1) 式で与えられるプラント $G(z)$ が最小位相であれば、(5.10) 式で与えられる $Q_L^*(z)$ はプロパー安定有理関数行列となるが、(5.10) 式の表現の分母、分子行列は共通の極を含む。以下、これらの極を除いた表現を導く。簡単のために、

$$A_f = A(I - K_fC) \quad (5.11)$$

と定義し、(5.10) 式の右辺の行列を (5.1) 式の表示法に対するよく知られている基本演算を用いて書き換えると、つぎのような表現が得られる。

$$Q_L^*(z) \\ = z \left[\begin{array}{c|c} A_f & B \\ \hline -FA^L(I - K_fC) & 0 \end{array} \right]_T \left[\begin{array}{c|c} A_f & A_f B \\ \hline C & CB \end{array} \right]_T^{-1} \\ = z \left[\begin{array}{c|c} A_f & B \\ \hline -FA^L(I - K_fC) & 0 \end{array} \right]_T \\ \times \left[\begin{array}{c|c} A_f[I - B(CB)^{-1}C] & A_f B(CB)^{-1} \\ \hline -(CB)^{-1}C & (CB)^{-1} \end{array} \right]_T \\ = z \left[\begin{array}{c|c} A_f & -B(CB)^{-1}C \\ \hline 0 & A_f[I - B(CB)^{-1}C] \end{array} \right]_T \\ \times \left[\begin{array}{c|c} B(CB)^{-1} & \\ \hline A_f B(CB)^{-1} & \\ \hline 0 & \end{array} \right]_T \\ = z \left[\begin{array}{c|c} [I - B(CB)^{-1}C]A_f & B(CB)^{-1} \\ \hline -FA^L(I - K_fC) & 0 \end{array} \right]_T \quad (5.12)$$

ここで、(5.11) 式および

$$(I - K_fC)[I - B(CB)^{-1}C] = [I - B(CB)^{-1}C] \quad (5.13)$$

が成立することに注意すると、(5.12) 式から (5.3) 式が容易に得られる。 ■

(注意 5.1) (5.3) 式から明らかのように、ループ伝達関数回復を達成する自由パラメータ $Q_L^*(z)$ の零点のみがフィードバック遅れのステップ数 L により変化し、極は L によらず一定である。

つぎの結果は命題 5.1 で与えられたループ伝達関数回復法における $Q_L^*(z)$ の役割と通常のループ伝達関数回復法との関係を明らかにするものである。

【命題 5.2】 (5.3) 式で定義されるフィルタ $Q_L^*(z)$ によりろ波された (3.26) 式で定義される出力予測誤差

系列の z 変換 $\varepsilon(z)$ はつぎの関係を満たす。

$$Q_L^*(z)\varepsilon(z) = -FA^L[\hat{x}^*(z) - \hat{x}(z)] \quad (5.14)$$

ここで、 $\hat{x}(z)$ は (2.5) 式で与えられるる波型 Kalman フィルタにより得られる状態推定値であり、 $\hat{x}^*(z)$ は観測ノイズの共分散行列の漸近値を用いる通常のループ伝達関数回復法で用いられるる波型 Kalman フィルタにより得られる状態推定値である。

(証明) 観測ノイズの共分散行列の漸近値を用いる通常のループ伝達関数回復法では Kalman フィルタゲイン行列を

$$K_f = B(CB)^{-1} \quad (5.15)$$

のように選ぶことによりループ伝達関数回復が達成される⁸⁾。 $\hat{x}^*(z)$ はこのフィルタゲイン行列を用いたる波型 Kalman フィルタにより得られる状態推定値の z 変換である。このとき、

$$\begin{aligned} \hat{x}^*(z) - \hat{x}(z) &= z[zI - (I - K_f^*C)A]^{-1} \\ &\quad \cdot (K_f^* - K_f)\varepsilon(z) \end{aligned} \quad (5.16)$$

のように表わされることが容易に導ける。また、(5.15)式のフィルタゲイン行列を用いて(5.3)式の $Q_L^*(z)$ を表わすと、

$$Q_L^*(z) = -zFA^L[zI - (I - K_f^*C)A]^{-1}(K_f^* - K_f) \quad (5.17)$$

が得られる。(5.16)、(5.17)式から(5.14)式が容易に得られる。■

(注意 5.2) (5.14)式を命題 4.2 の (4.10)式で与えられるコントローラの表現に用いると、

$$u(z) = -z^{-L}D_L^{-1}(z)FA^L\hat{x}^*(z) \quad (5.18)$$

が得られる。明らかに、命題 2.1 から、(5.18)式で与えられる制御入力、観測ノイズの共分散行列の漸近値を用いる通常のループ伝達関数回復法により得られるものに一致することがわかる。

プラント出力側での自由パラメータを用いたループ伝達関数回復法についてはつぎの結果が得られる。証明は入力側の場合とほぼ同様に行えるので省略する。なお、プラント出力側で回復されるべき感度行列はつぎのように与えられる⁸⁾。

$$O_L^*(z) = W_L(z)[I + C(zI - A)^{-1}AK_f]^{-1} \quad (5.19)$$

ここで、 $W_L(z)$ は (3.12) 式で定義される行列である。

[命題 5.3] (3.1)式で与えられるプラント $G(z)$ は最小位相であると仮定する。このプラントに命題 4.1 で与えたフィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーションを考える。このとき、自由パラメータ Q_L をつぎのように選べば、プラント入力側におけるループ伝達関数回復が達成される。

$$Q_L^*(z) = z \left[\frac{[I - B(CB)^{-1}C]A}{(CB)^{-1}CA - F} \mid \frac{-A^L K_f}{0} \right]_T \quad (5.20)$$

(証明略)

6. おわりに

る波型 Kalman フィルタと状態予測器を用いた LQG コントローラに基づく、離散時間二重既約分解表現の状態空間表現について考察した。る波型 Kalman フィルタを用いることの利点は $L \geq 0$ の場合を統一的に扱える点にある。ただし、この表現では、制御対象の入力側と出力側におけるフィードバック特性に双対性は成立しない。 $L \geq 1$ の場合には、予測型 Kalman フィルタに基づく表現を用いることにより、双対な表現を得ることができる。

提案したフィードバック遅れを考慮したパラメトリゼーションの応用として自由パラメータを用いたループ伝達関数回復法について考察したが、このパラメトリゼーションは不等式制約法に基づく制御系設計⁴⁾やロバスト制御系の適応化⁵⁾などに広く用いることができる。このような応用に対する具体的検討は今後の課題としたい。

参考文献

- 1) D. C. Youla, H. A. Jabr and J. J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers: Part II, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-21-3**, 319/338 (1976)
- 2) M. Vidyasagar: Control Systems Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press (1985)
- 3) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer (1987)
- 4) S. P. Boyd et al.: A New CAD Method and Associated Architectures for Linear Controllers, IEEE Trans., **AC-32-3**, 268/283 (1988)
- 5) T. T. Tay and J. B. Moore: Performance Enhancement of Two-Degree-of-Freedom Controllers via Adaptive Techniques, Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing, **4**, 69/84 (1990)
- 6) C. Nett, C. Jacobson and M. Balas: A Connection between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representation, IEEE Trans., **AC-29-9**, 831/832 (1984)
- 7) T. Ishihara and H. Takeda: Loop Transfer Recovery Techniques for Discrete-Time Optimal Regulators Using Prediction Estimators, IEEE Trans., **AC-31-12**, 1149/1151 (1986)
- 8) T. Ishihara: Sensitivity Properties of a Class of Discrete-Time LQG Controllers with Computation Delays, Systems and Control Letters, **11**, 299/307 (1988)
- 9) 石原, 植田, 竹田: 演算時間を考慮した離散時間 LQG コントローラのフィードバック特性, 計測自動制御学会論文集, **25-2**, 35/42 (1989)
- 10) J. B. Moore, K. Glover and A. Telford: All Stabilizing Controllers as Frequency Shaped State Estimate Feedback, IEEE Trans., **AC-35-2**, 203/208 (1990)
- 11) J. B. Moore and T. T. Tay: Loop Recovery via H^∞/H^2 Sensitivity Recovery, Int. Journal of Control, **49-4**, 1249/1271 (1989)

[著 者 紹 介]

石 原 正 (正会員)

1977 年, 東北大学大学院工学研究科博士課程修了, 同年, 同大学電気工学科助手. 1987 年, 同大学機械工学科助教授. 現在, 同大学機械航空工学科助教授. 確率系の最適制御および適応制御, デジタル制御系などの研究に従事. 電子情報通信学会, 日本機械学会, IEEE などの会員 (工学博士).

猪 岡 光 (正会員)

1969 年, 東北大学大学院工学研究科博士課程修了, 同年, 東北大学高速力学研究所講師, 1971 年, 同大学工学部助教授, 1984 年, 同大学機械工学科教授. 現在同大学機械航空工学科教授. 自動制御理論, 手動制御, メカトロニクスなどの研究に従事. 日本機械学会, 人間工学会, IEEE などの会員 (工学博士).

鄭 良 安 (学生会員)

1986 年, ニューヨーク州立大学 (バッファロー) 修士課程修了. 同年, 台湾台南県崑山工業専科学校講師. 1989 年東北大学大学院工学研究科博士後期課程入学. デジタル制御系の研究に従事.