非線形システムの実用安定化制御

石 島 辰太郎*

Practical Stabilization of Nonlinear Control Systems

Shintaro ISHIJIMA*

Motivated by the observation that if $\det(B) \neq 0$ in a linear system (A, B) , the controller design problem is trivial in some sense, the concept of full-controlled system will be introduced. It is shown every strongly attainable nonlinear control system can be decomposed to a series of full-controlled subsystems by introducing the virtual input variables. The decomposition is called the virtual decomposition. A nonlinear full-controlled subsystems do not have so good properties as linear ones. To discuss the stabilization problem of the virtually decomposed system, the concept of the practical stabilization has been introduced. A system is called practically stabilizable if the trajectory of the system has been confined in the arbitrary small neighborhood of the equilibrium point by the state feedback. A full controlled system is called completely decomposable if it admits the decomposition to scalar subsystems which are linear in input. It is shown that the completely decomposable full-controlled systems are practically stabilizable. Finally, a controller design method will be proposed for the virtually decomposed nonlinear systems.

Key Words : virtual decomposition, full-controlled system, complete decomposition, practical stabilization

1. はじめに

制御対象が線形であれ非線形であれ、制御系の設計で最初に問題となるのは、閉ループ系の安定性であると考えられる。非線形制御系に対してはこれまで微分幾何学を適用して多くの興味深い結果が導かれている¹⁾。しかし、ほとんどの研究がデカップリング問題のように、システムのベクトル場によって定義される代数体の性質に帰着できるような性質に関するものであり、安定化制御器の設計という原初的な目的に沿うものは少ない。こうした研究の例としては、局所制御性と関連した一連の局所安定化可能性の研究やシステム線形化と中心多様体の概念を用いたゼロダイナミクスに関連する議論が代表的なものであろう^{5),6)}。後者の研究はシステムの構造に関連する議論とハイゲインフィードバック制御の結合という観点から興味深い。しかし、これらの研究ではシステムの定性的性質に主な興味があり、設計アルゴリズムの

開発という観点からは必ずしも十分な成果が得られているとはいいがたい。

本論文では、システムの制御信号の流れに注目してシステムを仮想的なサブシステムに分解し、各サブシステムにリアプノフ関数を割り当てることにより安定化制御器を設計することを考える。すなわち、システムは制御信号の伝達遅れを表わすと考えられる相対次数を基にいくつかのサブシステムに分割される。この分割は仮想分割とよばれ、可到達なシステムは常に完全可到達とよぶ特別の性質をもつサブシステムに分割されることが示される。状態の一部を仮想的な入力と考える考えかたは、これまでに非線形システムの可制御性の研究や⁸⁾、特異摂動理論による安定化の研究⁹⁾などで見られたが、本論文ではこのアイデアを発展させ仮想入力をシステム構造を表現する相対次数¹⁾と関連づけて非線形システムの Hessenberg 型標準系といえる標準型を導いている。ここで、完全可到達なシステムとは線形システムでは入力係数行列が正則なシステムを意味し、特に、完全分割可能という性質をもつ完全可到達システムは非線形システムの場合においても好ましい性質をもつことが実用安定化という概念を用いて示される。ここでは、実用安定化

* 東京都立科学技術大学 日野市旭が丘 6-6

* Tokyo Metropolitan Institute of Technology, Hino
(Received April 30, 1991)
(Revised November 15, 1991)

可能とは、システムの状態を任意に“狭い”領域に閉じ込められるということの意味している。実用安定性についてはシステムパラメータの変動に対する解の有界性という観点、いいかえれば解の安定度という観点から文献10)などで議論されている。また、文献11)では実用安定性についての種々の概念を述べ、スカラーの“比較系”を用いた実用安定性のチェック条件を与えている。これらの研究に対し、ここでは安定化可能性を制御システムの構造に根ざす制御性能を表わす性質としてとらえ、システム構造との関連において議論している。すなわち、実用安定化可能性の定義では、解を単純にある領域に閉じ込めることが可能であるだけでなく、その閉込め領域を“制御”できることを要求している。BIBO安定性、ラグランジュの意味での安定性などの解の有界性に関する議論についても、制御システムの内部構造との関連で安定化の能力という観点からの議論は多くない。

最後に、完全分割される入力項をもつ完全可到達サブシステムへ分割されるシステムに対する実用安定化制御則の設計アルゴリズムが提案される。

2. 仮想分割と完全可到達システム⁷⁾

$R^T \times R^n$ から R^n への解析的写像 $f(u, x)$ がつぎのように展開可能であるとする。

$$f(u, x) = f^0(x) + f^1(x)u + f^2(x)u^{[2]} + \dots \quad (1)$$

ここで、 $u^{[s]}$ は s 次の多項式を要素とするベクトルとし、 $f^i(x)$ は解析関数を要素とする適当な大きさの行列とする。こうした性質をもつ関数 $f(u, x)$ を用いて、制御対象はつぎの数学モデルで記述されるものとする。

$$\dot{x} = f(u, x) \quad (2)$$

マトリクス $f^i(x)$ の各列ベクトルは R^n 上の解析ベクトル場であると見なすことができる。ベクトル場の集合 L を $f^j, j=0, 1, \dots$ のすべての列ベクトルからなるものとする。以下ではベクトル場の集合 $L = \{X_1, \dots, X_s\}$ と L によって定義されるディストリビューション、すなわち対応 $x \rightarrow \text{span} \{X_1(x), \dots, X_s(x)\}$ を同じ記号 L で表わすとする。ディストリビューション D に対して $\bar{D}$ で D を含む最小のインボリューティブなディストリビューション（インボリューティブクロージャ）を表わすものとする。ベクトル場 X に対して、 $[X, D] \subset D$ を満たすディストリビューション D を X 不変なディストリビューションという。ただし、 $[X, D] = \{[X, Y] | Y \in D\}$ とする。

ベクトル場の集合 L^u を、

$$L^u(x) = \{X | X: \text{column of } f^i(x), i=1, \dots\}$$

と定義し、 L^u をディストリビューションとみなして入力ディストリビューションとよぶ。また、 $\bar{L}_0$ を $\bar{L}^u$ を含み、

f_0 不変な最小のディストリビューションとする。

ここで、システム(2)の可到達性をつぎのように定義する。

【定義1】

システム(2)に対してつぎの命題が成立するときシステムは点 x_0 で可到達であるという。

「点 x_0 の近傍で定義された関数 $\phi(x)$ が、

$$d\phi(x)f(u, x) = 0 \quad (3)$$

を満足するなら、 $d\phi(x) = 0$ である。」

さらに、つぎの命題が成立するとき、システムは点 x_0 で強可到達であるという。

「点 x_0 の近傍で定義された関数 $\varphi(x)$ で、任意の $k=1, \dots$ に対して(2)の解 $x(t)$ に沿って、

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{d^k \varphi(x)}{dt^k} \right\} = 0 \quad (4)$$

が満足されるなら、 $d\varphi(x) = 0$ である。」

また、任意の点でシステムが(強)可到達となると、単にシステムは(強)可到達であるという。□

可到達性に関してはつぎの定理が知られている³⁾。

《補助定理1》

システムが点 x_0 で、可到達であるための必要十分条件は、

$$\dim \bar{L}(x_0) = n \quad (5)$$

が成立することである。また、点 x_0 で強可到達であるための必要十分条件は

$$\dim \bar{L}_0(x_0) = n \quad (6)$$

が成立することである。□

つぎに、システムの完全可到達性をつぎのように定義する。

【定義2】

システム(2)は、その入力ディストリビューション L^u が条件、

$$\dim \bar{L}^u(x) = n \quad (7)$$

を満足するとき、完全可到達であるといわれる。□

システムが線形、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8)$$

であれば、システムが完全可到達であるとは、

$$\text{rank}(B) = n \quad (9)$$

を意味するということは定義から明らかであろう。可到達、強可到達、完全可到達の間にはつぎの関係が成立する。

《補助定理2》

システム(2)は完全可到達であれば強可到達であり、強可到達であれば可到達である。

(証明)

システムが強可到達でないと仮定する。定義により、

このとき関数 $\eta(x) \neq \text{const}$ で,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \eta(x)}{\partial x} f(u, x) \right\} \equiv 0$$

を満足するものが存在する。 $f(u, x)$ の展開式 (1) を用いれば上式から, $\{\partial \eta / \partial x\} f^j(x) \equiv 0$ が $j \geq 1$ について成立することになる。したがって, システムは完全可到達とはならない。また, 定理の後半部分は補助定理 1 から明らかである。□

さて, システム (2) が完全可到達でないとすれば, 入力ディストリビューション L^u の積分多様体を用いてシステムはつぎのように分割される。いま,

$$\dim \bar{L}^u(x) = n_1 \quad (10)$$

とする。このとき, 定義により座標変換,

$$z = S_1(x)$$

が存在して, システムはつぎのように表わされる。

$$\dot{z}_1 = f_1(u, z_1, z_2) \quad (11)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) \quad (12)$$

ただし, $\dim(z_1) = n_1$ である。すなわち, 変数 z_2 をパラメータとして, (11) は完全可到達なシステムとなる。

一方, 方程式 (12) は, z_1 を入力変数とする制御システムであると見なすことができる。そこで, 形式的に新しい入力変数を $v_2 = z_1$ として, 制御システム

$$\dot{z}_2 = f_2(v_2, z_2) \quad (13)$$

を考える。以下では, こうして導入される形式的な入力変数を仮想入力とよび, 仮想入力を含む (13) のようなシステムを仮想システムとよぶ。

仮想システム (13) の可到達性については, つぎの定理が容易に証明される。

《定理 1》

仮想システム (13) が可到達となるための必要十分条件は, システム (2) が可到達であることである。

(証明)

いま, $z_0 = S_1(x_0)$ とし, システム (2) が点 x_0 で可到達でないと仮定する。定義からこのとき, 関数 $\phi(x) \neq \text{const}$ が存在して, $d\phi f(u, x) \equiv 0$ が成立する。いま, $x = S_1^{-1}(z)$ をこれに代入すれば,

$$d\phi \begin{bmatrix} f_1(u, z_1, z_2) \\ f_2(z_1, z_2) \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (14)$$

を得る。ただし, $\phi(z) = \phi(S_1^{-1}(z))$ である。仮定により, システム (11) は完全可到達であるから, 上式から,

$$\frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_1} \equiv 0 \quad (15)$$

および,

$$\frac{\partial \phi(z_1, z_2)}{\partial z_2} f_2(z_1, z_2) \equiv 0 \quad (16)$$

が導かれる。したがって, (15) より, ϕ は z_2 のみの関数

となり, (16) は

$$\frac{\partial \phi(z_2)}{\partial z_2} f_2(v_2, z_2) \equiv 0, (v_2 = z_1)$$

と書ける。すなわち, システム (13) は可到達とはならない。逆も同様にして容易に示すことができる。□

したがって, 可到達なシステムは一つの完全可到達なサブシステムと, もう一つの可到達な仮想システムに分割されることになる。ただし, 定理の証明で, z_2 がスカラーとなる場合には $f_2(v_2, z_2)$ が z_2 のみの関数であってもよい点に注意する必要がある。すなわち, 1 次元システム

$$\dot{y} = f(y)$$

は $f(y_0) \neq 0$ であれば点 y_0 で可到達であるということになる。これは可到達性の定義から導かれる結論であり, こうした問題を回避するために, 強可到達性の概念が必要となる。

いま, 仮想システム (13) の入力ディストリビューション L^{v_2} に対しても,

$$\dim \bar{L}^{v_2}(z_2) = n_2 \quad (17)$$

が任意の z_2 で成立していると仮定する。さらに, 以下ではすべてのディストリビューションが正則, すなわち任意の点で定数次元の部分空間を張ると仮定する。この仮定のもとで, システム (13) はさらに, 一つの完全可到達なサブシステムと可到達な仮想システムに分割される。以上の手続きを繰り返せば最終的につぎのような分割を得る。

$$\dot{z}_1 = f_1(v_1, z_1, \dots, z_q, z_{q+1})$$

$$\dot{z}_2 = f_2(v_2, z_2, \dots, z_q, z_{q+1})$$

...

...

$$\dot{z}_q = f_q(v_q, z_q, z_{q+1})$$

$$\dot{z}_{q+1} = f_{q+1}(z_{q+1})$$

ここで,

$$v_1 = u(\text{real input})$$

$$v_k = z_{k-1}, k=2, \dots, q$$

である。いま, $\dim(z_i) = n_i, i=1, \dots, q+1, \sum_{i=1}^{q+1} n_i = n$ とすれば, 以上をまとめてつぎの定理を得る。

《定理 2》

分割 (18) において, つぎの性質が成立する。

- (1) 仮想入力 $v_j, j=1, \dots, q$ を含むサブシステムは完全可到達である。
- (2) $n_{q+1} \geq 2$ あるいは $df_{q+1} = 0$ であればシステムは可到達でない。
- (3) $n_{q+1} = 1$ かつ $df_{q+1} \neq 0$ であれば, システムは可到達であるが強可到達ではない。

- (4) $n_{q+1}=0$ であれば、システムは強可到達である。
(証明)

$df_{q+1}=0$ の場合は明らかであるので、 $df_{q+1} \neq 0$ と仮定する。命題(1)、(2)は定義から明らかである。また、(4)も直接計算すれば容易に確かめられる。そこで、(3)について、 $n_{q+1}=1$ のとき、可到達となることを示す。定理1を(18)に適用すれば、このことを示すことは、

$$\dot{z}_q = f_q(v_q, z_q, z_{q+1}) \quad (19)$$

$$\dot{z}_{q+1} = f_{q+1}(z_{q+1}) \quad (20)$$

が $n_{q+1}=1$ のとき、可到達となることを示せばよい。

(19)は完全可到達であるから、定理1の証明と同様の議論によって、関数 $\phi(z_q, z_{q+1})$ が存在して、

$$d\phi \left[f_q(v_q, z_q, z_{q+1}) \right]_{f_{q+1}(z_{q+1})} = 0$$

であれば、 ϕ は z_{q+1} だけの関数であり、

$$\frac{\partial \phi(z_{q+1})}{\partial z_{q+1}} f_{q+1} = 0$$

となることが示される。ところが、仮定によって、 $n_{q+1}=1$ かつ $f(z_{q+1}) \neq 0$ であるから、 $\phi(z_{q+1}) = \text{const}$ が成立する。すなわち、システムはこのとき可到達となる。□

以後、システムは強可到達であると仮定して、(18)の分割を完全可到達システムへの仮想分割とよぶ。

次章では仮想分割を用いて安定化制御則の設計問題を考察するがそのために、平衡点での入力ディストリビューションの正則性が保証されないようなシステムの仮想分割を考える必要がある。入力ディストリビューション L^u に対して、正則なディストリビューション $\hat{L}^u$ で、点 x_0 の近傍 U の任意の点 $x \in x_0$ に対して、

$$\hat{L}^u(x) = L^u(x)$$

を満たすものを L^u の被覆ディストリビューションとよぶことにする。一般の入力ディストリビューションが被覆ディストリビューションをもつとは限らないが、 L^u が被覆ディストリビューションをもてば、つぎのような分割が可能となる。いま、 U を x_0 の近傍とし、入力ディストリビューション L^u は任意の点 $x \in U - \{x_0\}$ で $\dim L^u(x) = n_1$ を満足しているとして、 L^u の被覆ディストリビューション $\hat{L}^u$ が存在していると仮定する。仮定により被覆ディストリビューションは正則であるから、適当な局所座標 $(x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_n)$ で、 $(x_1, \dots, x_{n_1})$ が $\hat{L}^u$ の積分多様体の局所座標となるようなものが存在する。いま、 $x^1 = (x_1, \dots, x_{n_1})$, $x^2 = (x_{n_1+1}, \dots, x_n)$ と書くとすれば、この局所座標のもとで、システムは、

$$\dot{x}^1 = g_1(u, x^1, x^2) \quad (21)$$

$$\dot{x}^2 = g_2(x^1, x^2) \quad (22)$$

と分割される。こうして、点 x_0 の近傍において各入力ディストリビューションが被覆ディストリビューションを

もてば、システムは(18)と同様の形に仮想分割されることがわかる。

3. 実用安定化可能性

次式で記述されるシステムを考える。

$$\dot{y} = g(v, y) \quad (23)$$

$g(v, y)$ は $R^s \times R^p$ から R^p への解析写像とし、前節におけると同様に展開可能とする。 $g(0, 0) = 0$ とし、 y_0 を初期点とする入力 v に対するシステム(23)の解を $y(t, y_0, v)$ と書く。ここでは、従来の安定化可能性の概念を若干拡張した実用安定化可能性の概念をつぎのように定義する。

【定義3】

W を平衡点 $y=0$ の近傍とする。このとき、 W を含む近傍 U および解析的なフィードバック制御 $v = k_W(y)$ が存在して、任意の $y_0 \in U$ および、ある $T > 0$ に対して、 $t > T$ で $y(t, y_0, k_W(y)) \in W$ が成立するとき、システムは $(y=0)$ で W 安定化可能であるといい、平衡点は W 安定であるという。平衡点 $y=0$ が W 安定化可能であるとき、平衡点が $\hat{W}$ 安定化可能となる $\hat{W} \subset W$ が常に存在するなら、システムは実用安定化可能であるという。さらに、任意の平衡点近傍 $\hat{U} \subset U$ に対して平衡点が $\hat{W}$ 安定化可能となる $\hat{W} \subset \hat{U}$ を選べるときシステムは強実用安定化可能であるという。□

ここでは、システムが実用安定化可能であるということ、単に解を平衡点のある近傍に閉じ込めることができるだけでなく、その近傍にある意味(体積)で小さくとれることと定義している。ただし、近傍の形はシステムの性質によって決まってしまう一般には任意にはとれない。これに対して、平衡点にいくらかでも近い領域に解を閉じ込めることができることを保証するのが強実用安定化可能性である。文献10)で提案されている実用安定性は、システムパラメータに変動がある場合にも平衡点がある近傍 W に対して、 W 安定となるということとほとんど同じである。定義から明らかなように、平衡点が漸近安定化可能であれば、システムは強実用安定化可能である。しかし、強実用安定化可能であっても漸近安定化可能であるとは限らない。たとえば、スカラーシステム、

$$\dot{y} = y + y^2 v \quad (24)$$

の原点は有界な制御則では漸近安定化できないことは明らかであろう。しかし、たとえば

$$v = -k_e y, k_e > 0$$

のような制御則で強実用安定化可能である。実際、 $V(y) = y^2/2$ とすれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $|y| > \varepsilon$ である限り、 $\dot{V} < 0$ を満足するように $k_e > 0$ を決定できる ($k_e > 1/\varepsilon^2$)。

この章では実用安定化可能性の問題を考察するために、平衡点を例外点とする仮想分割を考える必要がある。そこで、以下のシステム分割では各入力ディストリビューションが被覆ディストリビューションをもつものと仮定する。

さて、実用安定化可能性を保証するシステムの性質として、完全分割可能性をつぎのように定義する。 w を新しいスカラー入力として、フィードバック変換、

$$v = h(w, y)$$

を考える。このとき、システム

$$\dot{y} = g(h(w, y), y) \quad (25)$$

がそれぞれ平衡点を除く領域で 1 次元の完全可到達なサブシステム、

$$\dot{y}_j = G_{0,j}(y_1, \dots, y_e) + G_j(y_j, \dots, y_e)w_j, j=1, \dots, e \quad (26)$$

$$w_j = H_j(y_{j-1}), j=2, \dots, e$$

$$w_1 = w$$

に仮想分割されるとき、システムは完全分割可能であるということにする。ただし、 $j=1, \dots, e$ について、 $G_{0,j}(0) = 0$ 、任意の $(y_j, y_{j+1}, \dots, y_e) \neq 0$ に対して、 $G_j(y_j, \dots, y_e) \neq 0$ とし、関数 H_j は可逆とする。また、以下の議論では解の存在は常に保証されているものとする。

《定理 3》

完全分割可能なシステムは実用安定化可能である。

(証明)

簡単のため、システムが二つのサブシステムに完全分割されていると仮定する。

$$\dot{y}_1 = G_{0,1}(y_1, y_2) + G_1(y_1, y_2)w_1 \quad (27)$$

$$\dot{y}_2 = G_{0,2}(y_2) + G_2(y_2)w_2 \quad (28)$$

$$w_2 = y_1 \quad (29)$$

仮定により、すべての $(y_1, y_2) \neq 0$ を満たす (y_1, y_2) に対して、 $G_1(y_1, y_2) \neq 0$ であり、任意の $y_2 \neq 0$ に対して $G_2(y_2) \neq 0$ である。また、簡単のため、 H_2 は恒等写像と仮定した。いま、 $B_2 = \{y_2 | \epsilon_2 < |y_2| < \alpha_2, \alpha_2 > \epsilon_2 > 0, \}$ とする。このとき、 B_2 で、

$$m_2 < |G_2(y_2)| < M_2, |G_{0,2}(y_2)| < N_2$$

を満たす定数、 $M_2 > m_2 > 0, N_2 > 0$ が存在する。さて、 $V_2 = y_2^2/2$ とすれば、

$$\dot{V}_2 = y_2 G_{0,2}(y_2) + y_2 G_2(y_2)w_2$$

となり、任意の $K_2 > 0$ に対してフィードバック制御 $w_2 = -f_2 y_2 G_2(y_2)$ により $\dot{V}_2 < -K_2$ とすることが可能である。実際、 $f_2 > (K_2 + \alpha_2 N_2) / (\epsilon_2^2 m_2^2)$ とすればよい。

つぎに、 $e_1 = y_1 + f_2 y_2 G_2(y_2)$ とすれば、

$$\dot{e}_1 = \tilde{G}_{0,1}(e_1, y_2, f_2) + \tilde{G}_1(e_1, y_2)w_1$$

を得る。 $B_1 = \{e_1 | \epsilon_1 < |e_1| < \alpha_1, \alpha_1 > \epsilon_1 > 0\}$ とする。このとき、任意の $(e_1, y_2) \in B_1 \times B_2$ に対して、

$$m_1 < |\tilde{G}_1(e_1, y_2)| < M_1, |\tilde{G}_{0,1}(e_1, y_2, f_2)| < N_1$$

を満たす $M_1 > m_1 > 0$ および $N_1 > 0$ が存在する。いま、 $V_1 = e_1^2/2$ とおけば、任意の $K_1 > 0$ および $(e_1, y_2) \in B_1 \times B_2$ に対して $\dot{V}_1(e_1, y_2) < -K_1$ を満足するようなフィードバック制御、 $w_1 = -f_1 e_1 \tilde{G}_1(e_1, y_2)$ が存在する。実際、 $f_1 > (K_1 + \alpha_1 N_1) / (\epsilon_1^2 m_1^2)$ とすればよい。

さて、 $w_2 = y_1 = e_1 - f_2 y_2 G_2$ に注意すれば(28)は、

$$\dot{y}_2 = G_{0,2}(y_2) - f_2 y_2 G_2^2(y_2) + G_2(y_2)e_1$$

と表わされる。そこで、 $V(e_1, y_2) = V_1(e_1) + V_2(y_2)$ とすれば、 $B_1 \times B_2$ 上で、

$$\dot{V}(e_1, y_2) < -K_1 - K_2 + y_2 G_2(y_2)e_1$$

が成立する。ここで、 $|y_2 G_2 e_1| < \alpha_1 \alpha_2 M_2$ であり、あらかじめ K_1 を十分大きく選んでおけば $B_1 \times B_2$ で $\dot{V} < 0$ とできる。以上から、このフィードバック制御により $U = \{(e_1, y_2) | |e_1| < \alpha_1, |y_2| < \alpha_2\}$ 内の点を初期点とする解は少なくとも領域 $B(\epsilon_1, \epsilon_2) = \{(e_1, y_2) | |e_1| < \epsilon_1, |y_2| < \epsilon_2\}$ に閉じ込められる。すなわち、 $W = B(\epsilon_1, \epsilon_2) = \{(y_1, y_2) | |y_1 + f_2 y_2 G_2(y_2)| < \epsilon_1, |y_2| < \epsilon_2\}$ として平衡点は W 安定となる。一方明らかに、 ϵ_1, ϵ_2 は自由にとれるから、 $\tilde{W} = B(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$ 、 $\tilde{\epsilon}_1 < \epsilon_1$ とすれば、 $\tilde{W} \subset W$ に対して $\tilde{W}$ 安定化可能となる。すなわち、システムは実用安定化可能である。

強実用安定化可能性についてはつぎの結果が導ける。

《定理 4》

完全分割されたシステム(26)は $j=2, \dots, e$ に対して、 $G_j(0, \dots, 0) \neq 0$ が成立すれば、強実用安定化可能である。

(証明)

完全分割されたシステム(26)を考える。簡単のため、 $w_j = y_{j-1}$ と仮定する。いま、定理の仮定が成立すれば座標変換 $z = S(y)$ によってシステムは平衡点 $y = 0$ の近傍で、

$$\dot{z}_1 = Q(z_1, \dots, z_e) + P(z_1, \dots, z_e)w \quad (30)$$

$$\dot{z}_j = z_{j-1}, j=2, \dots, e \quad (31)$$

と変換される。このことはつぎのようにして示される。まず、 $z_e = y_e$ とし、

$$\dot{z}_e = G_{0,e}(z_e) + G_e(z_e)w_e$$

を得る。仮定によって、 $z_e = 0$ の近傍で $G_e(z_e) \neq 0$ であるから、 $w_e = -G_e^{-1} G_{0,e}$ とすれば、

$$\dot{z}_e = 0$$

を得る。ところが、 $w_e = y_{e-1}$ であるから、 $z_{e-1} = G_e(z_e)y_{e-1} + G_{0,e}(z_e)$ とすれば、座標変換 $(y_1, \dots, y_{e-1}, y_e) \rightarrow (y_1, \dots, z_{e-1}, z_e)$ によって、第 e および第 $(e-1)$ サブシステムはそれぞれ、

$$\dot{z}_e = z_{e-1}$$

$$\dot{z}_{e-1} = \tilde{G}_{0,e-1}(z_{e-1}, z_e) + \tilde{G}_{e-1}(z_{e-1}, z_e)w_{e-1}$$

と変換される。このとき、 $\tilde{G}_{e-1}(z_{e-1}, z_e) \neq 0$ が容易に示される。したがって、以上のような座標変換を繰り返せば、

システムは最終的に、(30), (31) 式に示されるような形に変換される。

(31) 式で表わされる線形部分に対する仮想入力を $v (=z_1)$ とすれば、適当な 2 次形式、 $V_2 = (\bar{z}^T \Sigma \bar{z})/2$ で $\dot{V}_2 = -\bar{z}^T \Lambda \bar{z}$ を満たすフィードバック制御 $v = -F_2 \bar{z}$ が存在する。ただし、 $\bar{z} = (z_2, \dots, z_e)^T$ として、 Λ は $\Lambda = \text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_e)$ と書ける正定値行列とする。また、 Σ は適当な正定値行列である。

そこで、 $e_1 = z_1 + F_2 \bar{z}$ とすれば、

$$\dot{e}_1 = \bar{Q}(e_1, \bar{z}) + \bar{P}(e_1, \bar{z})w \quad (32)$$

$$\dot{\bar{z}} = (\bar{A} - \bar{B}F_2)\bar{z} + \bar{B}e_1 \quad (33)$$

を得る。ただし、

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする。また、 $\bar{P}(e_1, \bar{z}) = P(e_1 - F_2 \bar{z}, \bar{z})$ であるから、仮定により $\bar{P}(e_1, \bar{z}) \neq 0$ が点 $(0, 0)$ 以外で成立する。いま、 $B = \{(e_1, \bar{z}) | 0 < e_1 < \alpha_1, 0 < e_2 < \|\bar{z}\| < \alpha_2\}$ とする。さて、 $V(e_1, \bar{z}) = e_1^2/2 + V_2(\bar{z})$ として (32), (33) に沿って微分すれば、

$$\dot{V} = e_1(\bar{Q} + \bar{P}w) - \bar{z}^T \Lambda \bar{z} + \bar{z}^T \Sigma \bar{B}e_1 \quad (34)$$

となる。上式から明らかに、領域 B において、 $\dot{V} < 0$ とするフィードバック制御、 $w = -F_1 e_1 \bar{P}$ が存在する。実際、領域 B で、 $|\bar{Q}| < N_1$ 、かつ $m_1 < |\bar{P}| < M_1$ であれば、 $F_1 > \alpha_1(N_1 + \sigma \alpha_2)/(e_1^2 m_1^2)$ とすればよい。ただし、 $\sigma = \|\Sigma\|$ である。したがって、近傍 $U = \{(e_1, \bar{z}) | e_1 < \alpha_1, \|\bar{z}\| < \alpha_2\}$ に初期点をもつ解はこのフィードバック制御によって、 $W = \{(e_1, \bar{z}) | e_1 < e_1, \|\bar{z}\| < e_2\}$ に閉じ込められる。

ここで、 $e_1 = z_1 + F_2 \bar{z}$ であるが、 F_2 は e_2 とは独立にとれるから、任意の近傍 U に含まれる W をとることができる。すなわち、システムは強実用安定化可能である。

□

たとえば、つぎのシステムは定理の条件を満足し、強実用安定化可能である。

$$\dot{y}_1 = (y_1^2 + y_2^2)u_1 \quad (35)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 \quad (36)$$

いま、この解を $W = \{(y_1, y_2) | |y_1| < e_1, |y_2| < e_2\}$ に閉じ込める制御則を求めてみよう。 $k_2 > 0$ を適当な定数として、座標変換 $(y_1, y_2) \rightarrow (e_1, y_2)$ を考える。ここで、 $e_1 = y_1 + k_2 y_2$ である。この座標系でシステムは、

$$\dot{e}_1 = ((e_1 - k_2 y_2)^2 + y_2^2)u_1 + k_2(e_1 - k_2 y_2)$$

$$\dot{y}_2 = -k_2 y_2 + e_1$$

と書ける。したがって、 $V(e_1, y_2) = (e_1^2 + y_2^2)/2$ とおけば、

$$k_1 > \frac{(1 - k_2^2)^2 + 4k_2^2}{4k_2 \min\{e_1^2, e_2^2\}}$$

として、 $u = -k_1 e = -k_1(y_1 + k_2 y_2)$ とすれば、任意の $(y_1, y_2) \in R^2 - W$ に対して、 $\dot{V} < 0$ が成立する。このことは、 $V(e_1, y_2)$ を微分すれば、

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_1, y_2) = & e(y_1^2 + y_2^2)u_1 - k_2 \left(y_2 - \frac{(1 - k_2^2)}{2k_2} e_1 \right)^2 \\ & + \frac{4k_2^2 + (1 - k_2^2)^2}{4k_2} e_1^2 \end{aligned}$$

となることから明らかである。したがって、解は近傍 W に閉じ込められる。この例からもわかるように、実用安定化制御則は定理の証明で用いたパラメータ α_1, α_2 などに依存せずに決定される場合がある。

入力に対して線形なシステムについては、システムが可到達であれば適当な状態フィードバックにより、1 入力でも可到達なシステムに変換可能であることが証明されている⁴⁾。ただし、ここで述べた完全分割可能性についてはコンパクトな形での条件は知られていない。しかし、仮想分割の手法を利用することによって完全分割を導くことができるものと思われる。完全可到達システムの強実用安定化可能性に関する自明な条件はつぎの定理で与えられる。

《定理 5》

完全可到達システム (23) は

$$\text{rank} \left[\frac{\partial g(0, 0)}{\partial v} \right] = p (=s) \quad (37)$$

が成立するとき強実用安定化可能である。

(証明)

定理の条件が成立すれば、陰関数の存在定理によってシステムは局所的にフィードバック制御、 $v = \alpha(\bar{v}, x)$ によって線形化可能である。ここで、 $\bar{v}$ は v と同じ次数の入力ベクトルとする。すなわち、システムは

$$\dot{y} = \bar{v}$$

と変換され、明らかに強実用安定化可能である。 □

4. 仮想分割されたシステムの実用安定化

ここでは q 個の完全可到達なサブシステムに分割されているシステム、

$$\dot{z}_1 = f_1(v_1, z_1, \dots, z_q)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(v_2, z_2, \dots, z_q)$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dot{z}_q = f_q(v_q, z_q)$$

を考える。ただし、 $v_j = z_{j-1}$ 、 $z_0 = u$ (real input) とする。仮想分割の性質としてつぎの定理が成立することは明らかであろう。

《補助定理 3》

仮想分割は変換、

$$\bar{z}_i = z_i + \phi_i(z_{i+1}, \dots, z_q), i=1, \dots, q-1 \quad (39)$$

$$\bar{z}_q = z_q \quad (40)$$

に対して不変である。すなわち、 $\bar{z}_i, i=1, \dots, q$ も同じ形の方程式に従う。

(証明)

$\bar{z}_i$ は定義によって、 z_i と同じ相対次数をもつ¹⁾。したがって、座標変換 $(z_1, \dots, z_q) \rightarrow (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_q)$ によって、微分方程式の形は不変である。□

完全可到達システムに対する実用安定化制御則を導くために、完全可到達システムの完全分割について考える。いま、完全可到達システム Γ を、

$$\dot{y} = F(v, y) \quad (41)$$

とする。ただし、 $y(t) \in R^s$ とし、 $v(t) \in R^l$ とする。関数 F は考えている領域で v について、

$$F(v, y) = F^0(y) + F^1(y)v + \dots \quad (42)$$

$$= F^0(y) + F^c(v, y) \quad (43)$$

と展開できるものとする。このとき、システム Γ に対して、次式で定義されるシステムをシステム Γ^0 とよぶ。

$$\dot{y} = F^c(v, y) \quad (44)$$

システム Γ^0 は Γ が完全可到達であるから完全可到達である。いま、変換 $v = h(k, w, y)$ で、

$$F(h(k, w, y), y) = k \cdot \bar{F}(w, y) \quad (45)$$

を満足し、システム Γ^0 が

$$\dot{y}_j = k \{G_{0,j}(y_j, \dots, y_s) + G_j(y_j, \dots, y_s)\} w_j \quad (46)$$

$$w_j = H_j(y_{j-1}) \quad (j \geq 2) \quad (47)$$

$$w_1 = w \quad (48)$$

と仮想分割されるとき、完全可到達システム Γ は完全分割される入力項をもつということにする。ただし、 k は定数とし、 w はスカラー入力である。また、 $G_{0,j}, G_j$ は (26) におけると同様の条件を満足するものとし、 H_j は可逆とする。

《定理 6》

システム Γ が完全分割される入力項をもてば、任意の解析関数 $\Delta(y)$ について、

$$\dot{y} = F(v, y) + \Delta(y) \quad (49)$$

は実用安定化可能である。

(証明)

仮定により、システムは完全分割される入力項をもつ。したがって、変換 $v = h(k, w, y)$ が存在して、システムは適当な変換により、

$$\dot{y}_i = \delta_i(y) + k \{G_{0,i}(y_i, \dots, y_s) + G_i(y_i, \dots, y_s) w_j\} \quad (50)$$

と表わされる。ただし、記述の簡略化のため、ここではドリフト項 F_0 は関数 $\Delta(y) = (\delta_1, \dots, \delta_s)$ に含めて考えることとし、分割後の座標を分割前の座標と同じ記号で書いている。いま、システム

$$\dot{y}_i = G_{0,i}(y_i, \dots, y_s) + G_i(y_i, \dots, y_s) w_j$$

は完全分割されたシステムであるから、定理 3 により実用安定化可能であり、原点 $y=0$ のまわりの適当な領域 Ω と 2 次形式関数 $V = y^T Q y$ で、上の微分方程式に沿って、すべての点 $y \in \Omega$ に対し、 $\dot{V}(y) = \nu(y) < 0$ を満足するものが存在する。ただし、 Ω は W および U を $W \subset U$ を満たす $y=0$ の適当な近傍とすると、 $\Omega = U - W$ と書けるとする。いま、 $V(y)$ を方程式 (50) に沿って微分すれば、

$$\dot{V}(y) = k\nu(y) + \frac{\partial V(y)}{\partial y} \Delta(y)$$

が得られる。ここで、右辺第 2 項が領域 Ω で有界であることと、 $\nu(y) \leq -\rho < 0$ であることに注意すれば、 $\dot{V} < 0$ が成立するように定数 $k > 0$ を選べることは明らかである。すなわち、システムは実用安定化可能である。□

各サブシステムが「完全分割された入力項をもつ」という性質はつぎの定理が示すように座標変換 (40) に対して不変である。

《補助定理 4》

仮想分割 (38) の各サブシステムが完全分割される入力項をもつとする。このとき、変換 (40) によって変換された後の各サブシステムも完全分割される入力項をもつ。

(証明)

(40) により、 $\bar{z}_i$ の微分は、 μ_i を適当な解析関数として、

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_i &= f_i(v_i, z_i, \dots, z_q) + \mu(z_i, \dots, z_q) \\ &= \bar{f}_i(v_i, \bar{z}_i, \dots, \bar{z}_q) + \bar{\mu}(\bar{z}_i, \dots, \bar{z}_q) \end{aligned}$$

のように書けることがわかる。したがって、変換後のシステムの入力項は、 f_i を座標変換したものにほかならない。このことから、定理は明らかに成立する。□

定理 6 および補助定理 4 を用いれば、完全分割される入力項をもつサブシステムへ仮想分割されたシステムに対する実用安定化制御則の設計アルゴリズムをつぎのようにまとめることができる。

[ステップ 1] サブシステム、

$$\dot{z}_q = f_q(v_q, z_q) \quad (51)$$

に対して、 z_q を平衡点近傍の領域に拘束する仮想入力 $v_q = \alpha_q(z_q)$ を求める。仮定により、(51) は完全分割される入力項をもつからこれは可能である。なお、 $\bar{z}_q = z_q$ とする。

[ステップ 2] j 番目のサブシステムに対する仮想入力 $v_j = \alpha_j(\bar{z}_j, \dots, \bar{z}_q)$ により、 $(\bar{z}_j, \dots, \bar{z}_q)$ は平衡点 $\bar{z}_j = \dots = \bar{z}_q = 0$ の近傍のある領域に閉じ込められるとする。このとき、 $\bar{z}_{j-1} = z_{j-1} - \alpha_j(\bar{z}_j, \dots, \bar{z}_q)$ とおけば、

$$\dot{\bar{z}}_{j-1} = \bar{f}_{j-1}(v_{j-1}, \bar{z}_{j-1}, \dots, \bar{z}_q) \quad (52)$$

が得られるが、補助定理 4 によれば、このシステムも完

全分割される入力項をもつ。したがって、平衡点、

$$\bar{z}_{j-1} = \bar{z}_j = \cdots = \bar{z}_q = 0$$

の近傍に解を閉じ込める仮想入力 $v_{j-1} = \alpha_{j-1}(\bar{z}_{j-1}, \cdots, \bar{z}_q)$ を求めることができる。

[ステップ3] $j > 2$ であればステップ2を繰り返し、 v_1 が求められれば、実入力を $u = v_1 = \alpha_1(\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_q)$ とする。

このとき、 u が求める実用安定化制御則である。

5. おわりに

本論文では、完全可到達、完全分割、実用安定化といった概念を導入し非線形システムの安定化可能性について考察した。その結果、強可到達な非線形システムが常に完全可到達なサブシステムに仮想分割できることを示し、特に各サブシステムが完全分割される入力項をもてば、実用安定化可能であることを示した。完全分割される入力項をもつという性質は安定化問題を考えるうえではさらに弱い条件で置き換えることができ、システムが完全可到達であれば、多くの場合こうした性質が満足されると期待される。また、完全分割可能性を保証する条件を明らかにすることは将来における重要な課題である。

論文の内容および参考文献などの不備に関して多くの有益なご指摘をいただいた査読者の方々に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) A. Isidori: Nonlinear Control Systems, Lecture Note in Control and Information Sciences, New York Springer Verlag (1985)
- 2) R. Su and L. R. Hunt: A Canonical Expansion for Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31**-7, 670/673 (1986)
- 3) H. Sussmann and V. Jurdjevic: Controllability of Nonlinear Systems, J. Differential Equations, **12**, 95/

116 (1972)

- 4) J. Tsiniias and N. Kalouptsidis: Transforming a Controllable Multiinput Nonlinear System to a Single Input Controllable System by Feedback, System & Control Letters, **1**-3, 173/178 (1981)
- 5) C. I. Byrnes and A. Isidori: Asymptotic Expansions, Rootloci and Global Stability, Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, edited by M. Fliess and M. Hazewinkel, 159/179, D. Reidel Publishing Company (1986)
- 6) R. Marino: Feedback Stabilization of Single-Input Nonlinear Systems, System & Control Letters, **1**-5, 301/308 (1988)
- 7) S. Ishijima: Virtual Decomposition and Time Scale Decoupling Control of Nonlinear Systems, Nonlinear Control Systems Design, edited by A. Isidori, 59/63, Pergamon Press (1989)
- 8) H. Tokumaru and N. Adachi: On the Controllability of Non-Linear Systems, Automatica, **6**, 715/720 (1970)
- 9) V. R. Saksena, J. O'Reilly and P. V. Kokotovic: Singular Perturbation and Time Scale Methods in Control Theory: Survey, Automatica, **20**-3, 273/293 (1984)
- 10) J. La Salle, and S. Lefschetz: Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, Inc. (1961)
- 11) V. Lakshmikantham, S. Leela and A. A. Martynyuk: Practical Stability of Nonlinear Systems, World Scientific Publishing Co. (1990)

[著者紹介]

石島 辰太郎 (正会員)

1976年、早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了。同年、東京都立工科短期大学に捧職。1985年同短期大学教授を経て1986年東京都立科学技術大学教授、現在に至る。柔軟構造物制御、線形制御系設計法、非線形制御系の解析と設計理論などの研究に従事(工学博士)。