離散時間最適レギュレータの極限と外乱分離問題†

小林 伸明*・加藤 明*・中溝 高好**・桜井 光広*

The Limiting Form of Discrete-Time Linear Optimal Regulators and Disturbance Decoupling Problem

Nobuaki KOBAYASHI*, Akira KATOH*, Takayoshi NAKAMIZO** and Mituhiro SAKURAI*

In this paper, we discuss the property of a limiting form derived from a standard discrete-time linear optimal regulator problem by letting a weighting matrix with input vectors tend to zero. It is shown that there exists an explicit relationship between limiting form of discrete-time linear optimal regulators and the exact disturbance decoupling problem.

Key Words: multivariable systems, discrete-time linear systems, linear optimal regulators

1. はじめに

本小論では離散時間システムの最適レギュレータにおける極限形の特性について論じる。最適レギュレータの2次形式評価関数の入力項の重みを零に極限した極限形の議論については、連続時間系、離散時間系ともすでにいくつかの報告がある。特に離散時間系についてはShakedによって極限形の陽表現¹⁾が得られているが、最適レギュレータの極限がいかなる制御の役割を果たしているかは明確でない。

そこで、ここでは離散時間系の最適レギュレータの入力項の重みを零とした極限が最大非可観測系を与える制御となっていることを示し、この結果をもとに離散時間系の最適レギュレータの極限ゲインと外乱分離問題との関わりを明らかにする。

2. 最適レギュレータの極限形の性質

考察するシステムはつぎの離散時間系

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \quad (1)$$

であり、 $x_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, $y_k \in R^m$ はおのおのの状態ベクトル、入力ベクトル、出力ベクトルである。

(1)式の制御対象に対し、2次形式評価規範

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (y_k^T Q y_k + u_k^T R u_k) \quad (2)$$

を最小とする最適レギュレータ問題の解が

$$u_k = Fx_k \quad (3)$$

$$F = -(R + B^T S B)^{-1} B^T S A \quad (4)$$

$$S = C^T Q C + A^T S A - A^T S B (R + B^T S B)^{-1} B^T S A \quad (5)$$

で与えられることはよく知られている。ここでは、重み行列を $Q = I$, $R = \rho I$, $\rho \rightarrow 0$ とした最適レギュレータ問題の解の極限形の性質について論ずる。

仮定として、システムは可到達、可観測であり、またシステムの零点については、つぎの条件(A)条件(A)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad \text{for } |z| \geq 1 \quad (6)$$

が成立するものとする。

極限形の性質を述べる前に、上述の仮定のもとで最適レギュレータと双対関係にあるカルマンフィルタの極限形を扱ったShakedの結果の概要を示しておく。

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k \quad (7)$$

$$z_k = Cx_k + v_k$$

なるシステムを考える。ただし、 $w_k \in R^m$, $v_k \in R^m$ は

$$\text{cov}(w_k, w_j) = \tilde{Q} \delta_{kj} \quad \tilde{Q} > 0$$

$$\text{cov}(v_k, v_j) = \tilde{R} \delta_{kj} \quad \tilde{R} > 0$$

$$\text{cov}(w_k, v_j) = 0$$

を満たす白色雑音であり、 δ_{kj} はクロネッカーのデルタ関数を表わす。(7)式に対するカルマンフィルタは

$$\hat{x}_{k+1} = (A - KC) \hat{x}_k + K z_k \quad (8)$$

で表わされ、フィルタゲイン K は

$$K = A M C^T (\tilde{R} + C M C^T)^{-1} \quad (9)$$

$$M = A M A^T + B \tilde{Q} B^T - A M C^T (\tilde{R} + C M C^T)^{-1} C M A^T \quad (10)$$

† 第35回システム制御情報学会研究発表講演会で発表(1991・5)

* 金沢工業大学 金沢南局区内野々市町扇ヶ丘 7-1

** 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* Kanazawa Institute of Technology, Kanazawa

** National Defence Academy, Yokosuka

(Received July 1, 1991)

(Revised December 2, 1991)

である。このとき可逆なシステム (A, B, C) について上述の仮定が満たされていれば観測雑音の共分散 $\tilde{R}$ を $\tilde{R} \rightarrow 0$ としたフィルタゲインはつぎの補題で与えられる。

〔補題 1〕¹⁾ 離散時間カルマンフィルタ(8)式において $\tilde{R} \rightarrow 0$ の極限でのフィルタゲイン K は

$$K = (A^{l+p} B a_0, A^{l+p-1} B a_1, \dots, A^l B a_p) \hat{\beta} \quad (11)$$

である。ここで $\hat{\beta}$ は

$$\hat{\beta} = (\beta_{00}^T, \beta_{11}^T, \dots, \beta_{pp}^T)^T$$

であって α_i, β_{ii} は

$$C A^i B a_j = 0 \quad i \leq l+p-2-j \quad j=0, \dots, p \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^p C A^{l+p-i-1} B a_i \beta_{ii} = I_m \quad (13)$$

を満足する。また l は

$$l = \min \{k | C A^{k-1} B \neq 0\}$$

で定義される。

この補題およびフィルタと制御の双対関係を用いると、最適レギュレータの極限形の性質についてつぎの補助定理を導くことができる。

《補助定理》 離散時間システム (A, B, C) の最適レギュレータ問題の解で $R \rightarrow 0$ の極限でのフィードバック則は、閉ループ系を最大非可観測システムとする。

(証明) 補題 1 の (12), (13) の関係式は

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{l+p-1} & B \\ 0 & CB & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & CAB & \\ 0 & & & 0 & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_p \beta_{pp} \\ \vdots \\ \alpha_0 \beta_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

を意味するから、上式の転置を取れば、

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & (\alpha_p \beta_{pp})^T & \dots & (\alpha_0 \beta_{00})^T \\ B^T C^T & & & & & 0 \\ B^T A^T C^T & B^T C^T & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ B^T A^{l+p-1} C^T & \dots & B^T C^T \end{bmatrix} = (I_m \ 0 \ \dots \ 0) \quad (15)$$

が成り立つ。ここで推定と制御の双対性から

$$A^T \rightarrow A \quad B^T \rightarrow C \quad C^T \rightarrow B \quad K^T \rightarrow F$$

とすれば $R \rightarrow 0$ の最適レギュレータの極限ゲインは

$$F = -\bar{R}L \quad (16)$$

$$\bar{R} = [0, \dots, 0 \ (\alpha_p \beta_{pp})^T \dots (\alpha_0 \beta_{00})^T]$$

$$L = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{l+p} \end{bmatrix}$$

となる。この $\bar{R}$ は (15) 式で $A^T \rightarrow A, B^T \rightarrow C, C^T \rightarrow B,$

$K^T \rightarrow F$ とした関係を満足しているから、文献 3) の補題のフィードバックゲインに一致し、閉ループ系を最大非可観測とするフィードバックゲインであることがわかる。

この補助定理を使って次章で最適レギュレータ問題の極限形と外乱分離問題との関係を明らかにする。

3. 外乱分離問題と最適レギュレータ問題の極限解

ここでは加法的に外乱が印加されたシステム

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + D \xi_k \quad (17)$$

$$y_k = C x_k$$

で、 $x_k \in R^n, u_k \in R^m, y_k \in R^r, \xi_k \in R^r$ を考える。

外乱分離問題はシステム (17) 式に対し、適当なフィードバック則により

$$C(zI - A - BF)^{-1}D = 0 \quad (18)$$

を達成させ、外乱の影響を出力に及ぼさないようにする問題であり、その可解条件は

$\mathcal{C}^* \triangleq \text{Ker } C$ に含まれる最大 $A-B$ 不変部分空間とすると

$$\mathcal{C}^* \supset \mathcal{D} \quad \mathcal{D} \triangleq \text{Im } D \quad (19)$$

である。

前節の補助定理から (A, B, C) が条件 (A) 式を満足すれば最適レギュレータの極限ゲインから外乱分離問題の解がつぎのように導かれる。

《定理 1》 条件 (A) を満たす離散時間システム (17) 式で、 $Q=I, R \rightarrow 0$ として 2 次形式評価関数

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T C^T Q C x_k + u_k^T R u_k)$$

を最小にする制御則により構成されるシステムは、外乱分離条件 (19) 式を満足するとき外乱分離を達成し、閉ループ系の極は原点極と零点で与えられる。

(証明) 補助定理より、評価関数の入力に関する重み行列 R を 0 に極限したときの制御則はシステムを最大非可観測にするから、外乱分離問題の可解条件を満足すれば外乱分離を達成することがわかる。閉ループ系の極については文献 1) の双対から明らかである。

つぎに、最適レギュレータの極限ゲインで非最小位相系の外乱分離達成可能なシステムのクラスを考える。外乱分離条件を満足するシステム (A, B, C, D) について、最大非可観測システム $(A+BF, B, C, D)$ を構成するフィードバックゲイン F を選ぶ。さらに変換行列 T_1 によって $x_k = T_1 z_k$ と変数変換し

$$z_{k+1} = \bar{A} z_k + \bar{B} v_k + \bar{D} \xi_k$$

$$y_k = \bar{C} z_k$$

$$\bar{A} = T_1^{-1}(A+BF)T_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = T_1^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad \bar{D} = T_1^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT_1 = [\bar{C}_1 \ 0]$$

とする。ただし、変換行列 T_1 は $(\bar{A}_{22}, \bar{D}_2)$ が可制御ペアとなるように選ぶ。ここで、条件(A)のかわりに条件(B)が成立するものとする。

条件(B)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI & B \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + m$$

を満たす z から

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - zI & B & D \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} < n + m$$

を満たす z を除いたものすべてが $|z| < 1$ に存在する。

条件(B)のもとでは $\bar{A}_{22}$ の固有値が安定である⁴⁾。さて、 (A, B) が可制御であれば $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ は可制御であるから $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$ を Luenberger の第2可制御正準形に変換されたものとする。可制御指数を d_i ($i=1, \dots, m$) として

$$\bar{h}_{1i} = [0 \ 0 \ \vdots \ \overbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}^{d_i} \ \vdots \ 0 \ \dots \]$$

i ブロック

と選べば

$$\bar{h}_{1i} \bar{A}_{11} \bar{B}_1 = 0 \quad (j \leq d_i - 2) \quad (20)$$

$$\bar{h}_{1i} \bar{A}_{11}^{d_i-1} \bar{B}_1 \neq 0 \quad (21)$$

が成立する。この $\bar{h}_{1i}$ を用いて

$$\bar{H}_1 = (\bar{h}_{11}^T \ \bar{h}_{12}^T \ \dots \ \bar{h}_{1m}^T)^T$$

で $\bar{H}_1$ を定義すると $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{H}_1)$ は強可観測となる。さらに、 H を $HT_1 = [\bar{H}_1 \ 0]$ と定義すると、条件(B)が成り立つ前提でつぎのような性質が成立する。

(性質1) システム (A, B, H) は最小位相系である。

(証明) H の構成法より $\bar{A}_{22}$ の固有値が $(A + BF, B, H)$ の零点であるから、条件(B)のもとで

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + BF - zI & B \\ H & 0 \end{bmatrix} = n + m$$

for $|z| \geq 1$

となり、零点はフィードバック不変であるのでシステム (A, B, H) も $|z| \geq 1$ の零点をもたない。

$$\begin{aligned} (\text{性質2}) \quad \text{Im } C^T \subset \text{Im} \{ & h_1^T (h_1 A)^T (h_1 A^{d_1-1})^T \\ & \dots h_m^T \dots (h_m A^{d_m-1})^T \} \end{aligned}$$

が成立する。ただし、 h_i ($i=1, \dots, m$) は H の第 i 行ベクトルである。

(証明) $(A + BF, B, H)$ の相対次数

$$d_i = \min \{j | h_i (A + BF)^{j-1} B \neq 0\}$$

はフィードバック不変²⁾であるから (A, B, H) の相対次数と等しい。したがって

$$h_i (A + BF)^j = h_i A^j \quad (j \leq d_i - 1)$$

であり、 H の構成から性質2が成立する。

(性質3) (A, B, H, D) は外乱分離条件を満足する。

(証明) システム $(A + BF, B, H, D)$ が外乱分離系であることは明らか。さらに、外乱分離条件のフィードバック不変性より (A, B, H, D) は外乱分離条件を満足する。

以上の性質から、つぎの定理が成立する。

《定理2》 非最小位相システム

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + D\xi_k$$

$$y_k = Cx_k$$

が外乱分離可能で零点に関して条件(B)を満たすとき、

(性質1) ~ (性質3) を満足する H が存在し、 $Q = I, R \rightarrow 0$ としてつぎの2次形式評価関数

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T H^T Q H x_k + u_k^T R u_k)$$

を最小にする制御入力 u_k は外乱分離を達成する。

(証明) 性質1 からシステム (A, B, H) は最小位相系である。性質3 および、定理1の極限性質から $R \rightarrow 0$ としたフィードバックゲインを $\tilde{F}_0$ とすると

$$H(zI - A - B\tilde{F}_0)^{-1}D = 0$$

を達成する。さらに(24)式および性質2からつぎの関係

$$C(zI - A - B\tilde{F}_0)^{-1}D = 0$$

が成立して、出力には外乱の影響が現れない。

4. おわりに

本論文では離散時間系の最適レギュレータの入力項に関する重みを零に極限したときの最適レギュレータ問題の解が最大非可観測システムを構成することを明らかにし、この極限ゲインが最小位相システムの外乱分離を達成することを示した。

また、非最小位相システムについて、条件(B)が成立する外乱分離可能なシステムは、最適レギュレータ問題の極限ゲインを用いることにより外乱分離を達成することを示した。

参考文献

- 1) U. Shaked: Explicit Solution to the Singular Discrete-Time Stationary Linear Filtering Problem, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-30-1**, 34/47 (1985)
- 2) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear System with Application to Decoupling Problem, SIAM J. Control, **7-1**, 50/60 (1969)
- 3) E. Emre and L. M. Silverman: New Criteria and System Theoretic Interpretations for Relatively Prime Polynomial Matrices, IEEE Trans., **AC-22-2**, 239/242 (1977)
- 4) 小林, 中溝: 最大非可観測システムの安定性とその応用, 計測自動制御学会論文集, **17-2**, 168/175 (1981)